龙门状元

状元笔记

ZHUANGYUAN BIJI

九年级数学 上

BS

★内含教材习题答案★

丛书主编：洪林旺　本册主编：沈洪辉

昔日状元读书留笔记
今朝我用笔记中状元

龍門書局 | 龙门品牌 · 学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

ZHUANGYUAN BIJI

九年级数学 上

BS

丛书主编：洪林旺

本册主编：沈洪辉

编　　委：吴鸿儒　李火瑞　陈胜达　何火存

杨盛清　郑朝玉　郑俊艺　涂勤波

李林娟　沈晓智　沈茂娟　蔡耀华

龍門書局

北　京

举报电话:010-64031958;13801093426

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记.九年级数学.上:BS/洪林旺丛书主编;沈洪辉本册主编.—修订版.—北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-80191-533-7

Ⅰ.状… Ⅱ.①洪…②沈… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第055828号

责任编辑:张凤玲 张运静/封面设计:魏晋文化

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2004年6月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2011年4月第五次修订版 印张:9 3/4

2011年5月第十六次印刷 字数:393 000

定 价:20.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

他山之石，可以攻玉

——《状元笔记》前言

是否，在冥思苦想之余，仍感困惑？

是否，在洗耳恭听之时，还是无助？

是否，在挑灯夜战之后，犹觉茫然？

问鼎状元，如千军万马过独木桥。父母、老师不要求每一位孩子、每一位学生都能力争状元，但如果我们都来借鉴、掌握状元的学习方法、学习技巧，那么，我们就能跳出题海，用较少的时间取得良好的学习效果。因此，龙门书局将全国各省高考状元的各个学科的学习心得和方法技巧，经过名师整理、挖掘与提升出来，形成《状元笔记》，与同学们一起分享。

它用"详解"破译你的困惑；用"技巧"解除你的无助；用"警示"驱走你的茫然。

翻开这本笔记，你将看到的经典栏目有：

教材详解：全面、细致地讲解教材上的知识点，深入剖析其内涵，并配典型例题对其进行巩固。一讲一练夯实基础，使你考试稳拿基础分。

解题技巧：归纳各节的解题方法和技巧，辅以例题，通过对例题的分析和点评，让你掌握解题所用的通性通法以及小窍门，快速提高解题能力。

状元笔记：总结规律、提炼学习方法和技巧，让你掌握状元的学习方法。

陷阱警示：梳理学习过程中遇到的易错点和易混点，通过错因透视，扫除学习中的困惑和障碍。

参考答案及点拨：给出本书所有习题以及教材习题的答案，并用精细的分析，对习题进行点拨。

亲爱的同学，"他山之石，可以攻玉"，取状元学习之精华，架成功积累之天梯。如能掌握本书的方法和技巧，到时，你将成为或班级、或学校、或县市、或全省乃至全国的佼佼者。

在学习过程中有什么疑问或本书如有遗漏之处，请与 zyxxbj@163.com 联系，不胜感谢！

洪林旺

2011 年 4 月

《状元笔记》学生顾问团

·赵永胜·

2007年山西省文科状元
现就读于中国人民大学财政金融学院
星座：射手座
喜欢的运动：爬山　乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”

·卢　毅·

2006年浙江省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：跑步　滑板
喜欢的书：卡尔维诺文集
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统的梳理，无论是预习时或复习时，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合

·武睿颖·

2005年河北省文科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：游泳　网球
喜欢的书： *A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习习惯，如制订学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

·刘诗泽·

2005年黑龙江省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：金牛座
喜欢的运动：篮球　台球　排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

·邱　汛·

2005年四川省文科状元
现就读于北京大学
星座：处女座
喜欢的运动：篮球　乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远
学习方法、技巧：1.要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2.学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3.学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4.坚持锻炼，劳逸结合。

·林　叶·

2005年江苏省文科状元
现就读于北京大学
星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步　台球　放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

·田　禾·

2005年北京市理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废

·朱师达·

2005年湖北省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：足球　篮球　游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，
有希望就不要放弃
学习方法、技巧：1.知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2.知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3.整体把握兴趣和强弱科的平衡。4.正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

目录 CONTENTS

第一章

证明（二）

如图，两条小河交汇形成的三角区，土壤肥沃，气候宜人．小猪看中了这块宝地，想在这里建一个小房子，并使房子到两条小河的距离相等，但它不知该如何选址，你能帮帮它么？

本章学习目标

◆ 经历探索、猜测、证明的过程，进一步体会证明的必要性，发展初步的演绎推理能力．

◆ 进一步掌握综合法的证明方法，结合实例体会反证法的含义（难点）．

◆ 了解作为证明基础的几个公理的内容，能够证明与三角形、线段垂直平分线、角平分线等有关的性质定理及判定定理（重点）．

◆ 结合具体的例子了解逆命题的概念，会识别两个互逆命题，并知道原命题成立，其逆命题不一定成立．

◆ 能够利用尺规作图作已知线段的垂直平分线和已知角的平分线；已知底边及底边上的高，能用尺规作出等腰三角形．

1 你能证明它们吗

整体感知

概念图

- 由几个公理可证得
  - 全等三角形的判定
    - 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（AAS）
  - 等腰三角形
    - 性质
      - 等腰三角形的两个底角相等
      - 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合
    - 判定
      - 等角对等边
    - 等边三角形
      - 性质
        - 等边三角形的三个角都相等，并且每个角都等于60°
      - 判定
        - 有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形
      - 推论
        - 在直角三角形中,如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半

教材详解

知识点一 全等三角形的判定定理及性质

公理 (1)三边对应相等的两个三角形全等(SSS)；

(2)两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(SAS)；

(3)两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(ASA).

推论 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等,简写成“角角边”或“AAS”.

详解 (1)判定两个三角形全等时,应根据已知条件准确地选择适当的判定方法,

如：已知两个三角形的两角对应相等时，可考虑选择 ASA 或 AAS，再寻求第三组量是否对应相等.

(2)用“AAS”定理来判定两个三角形全等时，要特别注意“相等的边”必须是“一组相等的角的对边”，此外要注意按角、角、边的顺序列出全等的三个条件.

(3)“SSS”、“SAS”、“ASA”、“AAS”是判定三角形全等的条件，但符合三组量对应相等的不一定都能作为三角形全等的条件，如“AAA”、“SSA”.

性质 全等三角形的对应边相等、对应角相等.

详解 (1)注意“相等的边”是“对应边”，“相等的角”是“对应角”.

(2)该性质常用于证明两个角或两条线段相等.

【例 1】 如图 1-1-1 所示，AB 与 CD 交于 O，$OA=OB$，要使 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$，可添加的一个条件是__________（写一个即可）

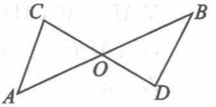

图 1-1-1

解析：本题是一道开放题，根据已知条件并结合图形可知：$\angle AOC=\angle BOD$，$OA=OB$，即已有“AS”，要使三角形全等，可设法构造“ASA”或“AAS”或“SAS”.

解：(1)$OC=OD$ (SAS). (2)$\angle A=\angle B$ (ASA). (3)$\angle C=\angle D$ (AAS).

状元笔记 **易错提示**：这里不可填 $AC=BD$，因为SSA 无法判定两个三角形全等，此外AAA 也不能判定两个三角形全等.

【例 2】 如图 1-1-2 所示，已知 B,C,E 三点在同一直线上，$AC\parallel DE$，$AC=CE$，$\angle ACD=\angle B$，求证：$\triangle ABC\cong\triangle CDE$.

解析：从条件 $AC\parallel DE$ 入手可得：$\angle ACB=\angle E$，$\angle ACD=\angle D$，又已知$\angle ACD=\angle B$，则可得$\angle D=\angle B$，再结合条件 $AC=CE$，可由 AAS 定理证得$\triangle ABC\cong\triangle CDE$.

证明：$\because AC\parallel DE$，

$\therefore \angle ACB=\angle E$，$\angle ACD=\angle D$.

$\because \angle ACD=\angle B$.

$\therefore \angle B=\angle D$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle CDE$ 中，$\angle ACB=\angle E$，$\angle B=\angle D$，$AC=CE$.

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CDE$ (AAS).

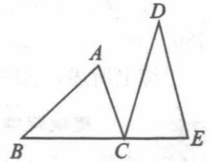

图 1-1-2

状元笔记 **方法技巧**：从已知条件入手，将题目所给的间接条件转化成能为证明结论所服务的直接条件，是几何证明中常用的重要方法.

知识点二 等腰三角形的性质

性质 1 等腰三角形的两个底角相等，即“等边对等角”.

详解 (1)符号语言叙述为：如图 1-1-3 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

(2)定理的作用：①在同一个三角形中，将边相等转化成角相

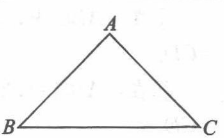

图 1-1-3

等.②结合三角形内角和定理，解决三角形中有关角度的计算问题.

温馨提示 ①“等边对等角”成立的前提条件是“在同一个三角形中”；②只有一个三角形成为等腰三角形后才能有“底角”这个概念.

【例3】 如图1-1-4所示，已知$\triangle ABC$，E是AB延长线上的一点，$AE=AC$，AD平分$\angle BAC$，$BD=BE$，连接DE. 求证：$\angle BDE=\angle C$.

解析： 在$\triangle BDE$中，由$BD=BE$可得$\angle BDE=\angle E$，欲证$\angle BDE=\angle C$，只需证$\angle E=\angle C$，显然根据已知条件可证得$\triangle ADE\cong\triangle ADC$.

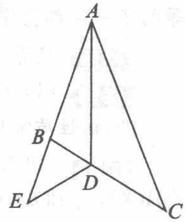

图 1-1-4

证明： $\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle EAD=\angle CAD$.

$\because AE=AC$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ADC$(SAS).

$\therefore \angle E=\angle C$.

又$\because BD=BE$，$\therefore \angle E=\angle BDE$，$\therefore \angle BDE=\angle C$.

> 状元笔记 **规律总结**：当题目条件中出现同一个三角形中有两条边相等，而结论又是欲证角与角相等时，通常需要利用等腰三角形“等边对等角”的性质，将边相等转化为角相等.

【例4】 已知$\triangle ABC$是等腰三角形，且$\angle A=80°$，请求出$\angle B$的度数.

解析： $\triangle ABC$是等腰三角形，且$\angle A=80°$，故$\angle A$可能是顶角，也可能是底角，因此需分两种情况进行讨论.

解： (1)若$\angle A$是顶角，则$\angle B=\angle C$.

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A=80°$，$\therefore \angle B=\frac{1}{2}(180°-80°)=50°$.

(2) 若$\angle A$是底角，则当$\angle B$是底角时，$\angle B=\angle A=80°$；而当$\angle B$是顶角时，$\angle B=180°-80°-80°=20°$.

综上所述，$\angle B$的度数是50°或80°或20°.

> 状元笔记 **思维延伸**：若将题目中的$\angle A=80°$改为$\angle A=90°$，那么$\angle B$的度数是多少呢？此时还需要分两种情形讨论吗？答案：$\angle B=45°$.

性质2 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.（简称“三线合一”）

详解 (1)“三线合一”是等腰三角形才具有的性质，一般三角形不具有这个性质，“三线”中只要有“一线”成立，则其余“两线”都成立.

(2)符号语言叙述为：如图1-1-5所示，

①在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，$\therefore AD\perp BC$，$BD=CD$.

②在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，$BD=CD$.

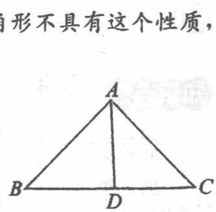

图 1-1-5

③在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC,BD=CD$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD,AD\perp BC$.

(3)该性质揭示了等腰三角形的轴对称性，即等腰三角形是以顶角平分线(底边上的中线、底边上的高)所在的直线为对称轴的轴对称图形.

(4)作用：证明角相等、线段相等或垂直关系.

【例5】 如图1-1-6所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC,BD\perp AC$，求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

解析：本题要证$\angle DBC$为$\angle A$的一半，那么什么情况下会出现"$\angle A$的一半"呢？由此联想到作$\angle A$的平分线，再利用等腰三角形"三线合一"的性质及"同角的余角相等"，便可证得结论.

证明：作$\angle A$的平分线AE交BC于点E，则$\angle CAE=\frac{1}{2}\angle A$.

$\because AB=AC$，AE平分$\angle A$，

$\therefore AE\perp BC$，

$\therefore \angle CAE+\angle C=90°$.

又$\because BD\perp AC$，

$\therefore \angle DBC+\angle C=90°$.

$\therefore \angle CAE=\angle DBC$.

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

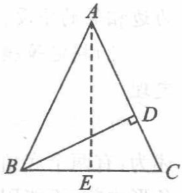

图1-1-6

状元笔记 **方法技巧**：在解决有关等腰三角形的问题时，作顶角的平分线或底边上的中线或底边上的高等辅助线是解决问题的常用方法.

知识点三 等边三角形的性质

性质 等边三角形的三个内角都相等，并且每个内角都等于60°.

详解 (1)等边三角形是一种特殊的等腰三角形，它具备等腰三角形的所有性质. 并且每一条边上都有"三线合一"，因此等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴.

(2)符号语言叙述为：如图1-1-7所示，在$\triangle ABC$中，

$\because AB=AC=BC$，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

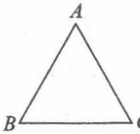

图1-1-7

【例6】 如图1-1-8所示，D,E分别是等边三角形ABC的边AB，BC上的点，且$AD=BE$，

求证：$AE=CD$.

解析：欲证$AE=CD$，可证AE、CD所在的两个三角形全等，结合图形及已知条件，只需证$\triangle CAD\cong\triangle ABE$即可.

证明：$\because \triangle ABC$是等边三角形.

$\therefore AC=BA,\angle CAD=\angle ABE$

又$\because AD=BE$，

$\therefore \triangle CAD\cong\triangle ABE$(SAS).

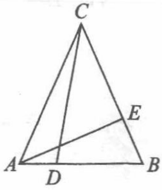

图1-1-8

$\therefore AE=CD$.

状元笔记 **思维延伸**：图 1-1-8 中是否还存在其他的全等三角形呢？本题能否通过其他方法来证明 $AE=CD$？答案：可证$\triangle ACE\cong\triangle CBD$.

知识点四 等腰三角形的判定

定理 有两个角相等的三角形是等腰三角形.(简称"等角对等边")

详解 (1)符号语言叙述为：如图 1-1-9 所示，$\because \angle B=\angle C$，$\therefore AB=AC$.

(2)作用：证明同一个三角形中的边相等，它是把三角形中角相等转化为边相等的重要依据.

(3)判定等腰三角形的方法有两个：一是等腰三角形的定义；二是判定定理.

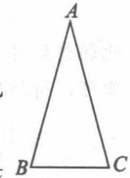

图 1-1-9

温馨提示 ①"等角对等边"成立的前提是"在同一个三角形中"；②该定理不能叙述为：有两个底角相等的三角形是等腰三角形. 因为在没有判断出一个三角形是等腰三角形之前，不能用"底角""腰"这些名词.

【例 7】 如图 1-1-10 所示，已知$\angle CAE$是$\triangle ABC$的外角，且 AD 平分$\angle CAE$，$AD\parallel BC$，求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.

解析：本题的解题思路流程如图 1-1-11 所示：

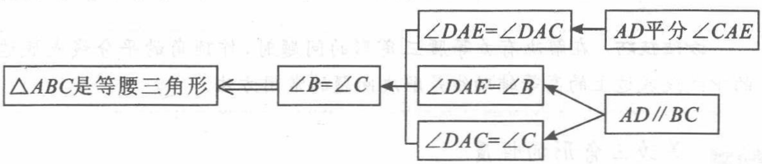

图 1-1-11

证明：$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DAE=\angle B$，

$\angle DAC=\angle C$，

$\because AD$ 平分$\angle CAE$.

$\therefore \angle DAE=\angle DAC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

即$\triangle ABC$是等腰三角形.

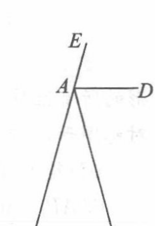

图 1-1-10

状元笔记 **方法总结**：判定等腰三角形的方法通常有：①根据定义"有两条边相等的三角形是等腰三角形"；② 运用等腰三角形的判定定理"等角对等边".

知识点五 等边三角形的判定

定理1 有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

详解 (1)运用此定理的前提是:三角形是等腰三角形,其次是该三角形中有一个角等于60°,从而判定这个三角形是等边三角形.

(2)符号语言叙述为:如图1-1-12所示,在$\triangle ABC$中,

$\because AB=AC,\angle A=60^\circ$(或$\angle B=60^\circ$或$\angle C=60^\circ$),

$\therefore AB=BC=AC$.

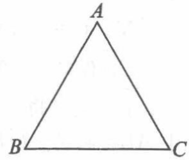

图1-1-12

(3)作用:证明一个三角形是等边三角形.

定理2 三个角都相等的三角形是等边三角形.

详解 (1)该定理是"等角对等边"的一个推论,由三个角相等推导出三条边相等.

(2)符号语言叙述为:如图1-1-12所示,在$\triangle ABC$中,

$\because \angle A=\angle B=\angle C,\therefore AB=BC=AC$.

(3)作用:证明一个三角形是等边三角形.

归纳 证明三角形是等边三角形的三种方法:①等边三角形的定义;②有一个角为60°的等腰三角形是等边三角形;③三个角都相等的三角形是等边三角形.

【例8】 已知:如图1-1-13,$\triangle DEF$是等边三角形,且$\angle EAB=\angle DCA=\angle FBC$. 求证:$\triangle ABC$是等边三角形.

解析:由已知条件给出$\angle EAB=\angle DCA=\angle FBC$,以及由"等边三角形"也可推出$\triangle DEF$三个角都等于60°,所以我们应该从"角"的角度来思考判定$\triangle ABC$,即考虑能否证明$\triangle ABC$三个角相等. 结合条件易知$\angle EAB+\angle DAC=\angle DAC+\angle DCA=120^\circ$,即$\angle BAC=60^\circ$,同理可得$\triangle ABC$其余两角也等于60°.

证明:$\because \triangle DEF$是等边三角形,

$\therefore \angle D=60^\circ$,即$\angle DAC+\angle DCA=120^\circ$.

$\because \angle EAB=\angle DCA$,

$\therefore \angle EAB+\angle DAC=120^\circ$.

$\therefore \angle BAC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

同理可证得:$\angle ABC=\angle BCA=60^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

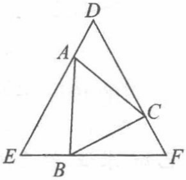

图1-1-13

状元笔记

思维延伸:若将本题改为"已知:如图1-1-13,$\triangle ABC$是等边三角形,且$\angle EAB=\angle DCA=\angle FBC$.求证:$\triangle DEF$是等边三角形"你会证明吗?答案:$\triangle DEF$是等边三角形(可证$\angle D=\angle E=\angle F=60^\circ$).

知识点六 含30°角的直角三角形的性质

性质 在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

详解 (1)该定理的条件有两个：一是三角形是直角三角形；二是三角形有一内角是30°.

(2)符号语言叙述为：如图1-1-14所示，在Rt△ABC中，

$\because \angle C=90°, \angle A=30°, \therefore BC=\frac{1}{2}AB.$

(3)作用：证明一条线段是另一条线段的一半或两倍.

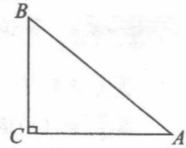

图1-1-14

【例9】 将一张矩形的纸片ABCD，如图1-1-15那样折叠，其中AB=4，若∠C′ED=30°，则折痕ED的长为__________.

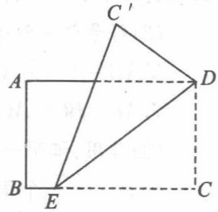

图1-1-15

解析：欲求ED，可把ED放在Rt△DEC中来解决. 根据折叠可知∠CED=∠C′ED=30°，又由矩形ABCD可得：CD=4，∠C=90°，故在Rt△DCE中可求得DE=2CD=8.

答案：8

> **规律总结**：①解决“折叠”问题关键要抓住折叠前后两个图形全等，并由此得出对应相等的边或对应相等的角；②在含30°角的直角三角形中，已知其中一边就可求出其他各条边.

知识点七 反证法

定义：在证明时，先假设命题的结论不成立，然后推导出与定义、公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果，从而证明命题结论一定成立，这种证明方法称为反证法.

详解 (1)反证法是一种重要的数学证明方法，当一个命题从正面直接推理有困难时，可从问题的反面入手解决，即使用反证法，它常常会有出人意料的作用.

(2)证明步骤：

图1-1-16

【例10】 求证：在同一个三角形中，如果两条边不相等，那么它们所对的角也不相等.

解析：本题从正面直接推理有困难，所以考虑用反证法. 这是个文字命题，应先写出已知、求证，然后按反证法的步骤进行推理证明.

已知：在△ABC中，AB≠AC.

求证：∠B≠∠C.

证明：假设∠B=∠C，那么根据“等角对等边”可得：AB=AC. 这与已知条件AB≠AC相矛盾，

故假设不成立，因此∠B≠∠C，即：在同一个三角形中，如果两条边不相等，那么它们所对的角也不相等.

> **易错提示**：这里不能“想当然”地认为：AB≠AC，则必然∠B≠∠C. 我们并未学习过此结论，所以必须用反证法进行严格的数学推理证明.

解题技巧

技巧1　巧用等腰三角形性质解决实际问题.

【例11】 如图1-1-17所示，$\triangle ABC$是等腰三角形的木尺，在它的顶角的顶点上垂下一条挂铅垂P的线，用这个木尺怎样验证横梁是否水平？

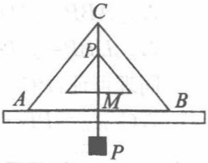

图1-1-17

解析：由于CP垂直于地面，要验证横梁是否水平，只要验证CP是否垂直于横梁. 可取AB的中点M，若CP过中点M，则由于$AC=BC$，那么必有$CM\perp AB$.

解：可先在AB上取中点M，把AB紧贴在横梁上，若铅垂线能经过点M，那么根据"三线合一"，可知横梁一定水平，否则就不水平.

> 状元笔记　**方法技巧**：本题是一道实际应用题，解决此类问题要充分理解题意，将实际问题抽象出数学模型，然后利用所学数学知识解答.

技巧2　反复使用Rt△中的30°角证线段"倍半"关系.

【例12】 如图1-1-18所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，D是BC的中点，$DE\perp AB$于点E，求证：$EB=3EA$.

解析：欲证$EB=3EA$，注意到$\angle BAC=120°$，由$\triangle ABC$是等腰三角形及"三线合一"性质，可求出$\angle B=30°$，$AD=\frac{1}{2}AB$；在$Rt\triangle ABD$和$Rt\triangle AED$中反复运用"30°角所对的直角边等于斜边的一半"进行转化，可得$AB=4AE$，则$EB=3EA$.

证明：$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$.

$\because D$是BC的中点，$AB=AC$，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC=60°$.

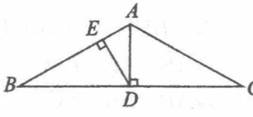

图1-1-18

又$\because DE\perp AB$，

$\therefore \angle ADE=90°-\angle DAE=30°$.

在$Rt\triangle ABD$中，$\angle B=30°$，$\therefore AB=2AD$.

在$Rt\triangle AED$中，$\angle ADE=30°$，$\therefore AD=2AE$.

$\therefore AB=4AE$. $\therefore EB=3EA$.

> 状元笔记　**探究点拨**：应用含30°角的直角三角形的性质时，前提条件是该三角形是Rt△，此性质反映了直角三角形中边与角的关系，是今后证明边的倍分关系常用的证明依据.

技巧3　活用"等角对等边"证线段"和差".

【例13】 如图1-1-19所示，在$\triangle ABC$中，$BC=5$ cm，BP、CP分别是$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线，且$PD/\!/AB$，$PE/\!/AC$，请求出$\triangle PDE$的周长.

解析：由BP是$\angle ABC$平分线及$PD/\!/AB$可得：$\angle DBP=\angle DPB$，即$BD=DP$；同理可证得：$PE=CE$，于是$\triangle PDE$的周长转化为：$BD+DE+CE=BC$.

解：∵BP 是 $\angle ABC$ 的平分线，

∴$\angle ABP=\angle DBP$.

∵$PD /\!/ AB$，

∴$\angle ABP=\angle DPB$.

∴$\angle DBP=\angle DPB$. 即：$BD=PD$.

同理可证：$PE=CE$.

∴$C_{\triangle PDE}=PD+PE+DE=BD+CE+DE=BC=5$ (cm).

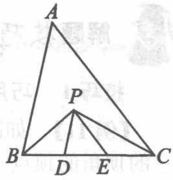

图 1-1-19

状元笔记 方法技巧：利用角平分线和平行线建立角与角之间相等的关系，再利用“等角对等边”推出边与边相等，从而实现 $C_{\triangle PDE}$ 与 BC 的转化是解决本题关键.

变式引申　“截长补短”证线段之“和差”

【例 14】 已知：如图 1-1-20，AD 平分 $\angle CAB$，$\angle B=2\angle C$，求证：$AB+BD=AC$.

解析：用“补短法”将 AB 延长至 E，使 $AE=AC$，并连接 DE，则易证 $\triangle ADC\cong\triangle ADE$. 可得：$\angle C=\angle E$，结合 $\angle ABC=2\angle C$ 以及 $\angle ABC=\angle E+\angle BDE$ 可证得：$\angle BDE=\angle E$，即 $BD=BE$. 于是可证 $AB+BD=AC$

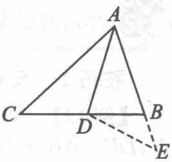

图 1-1-20

证明：延长 AB 至点 E，使 $AC=AE=AB+BE$，并连接 DE.

∵AD 平分 $\angle CAB$，

∴$\angle CAD=\angle EAD$.

又∵$AC=AE$，$AD=AD$，

∴$\triangle ADC\cong\triangle ADE$(SAS).

∴$\angle C=\angle E$.

∵$\angle ABC=\angle E+\angle BDE=2\angle C$，

∴$\angle BDE=\angle E$，即：$BD=BE$.

∴$AE=AB+BD$.

∴$AB+BD=AC$.

启示

解决有关线段“和差”问题时，常常需要用到“截长法”和“补短法”.

状元笔记 思维延伸：本题是否还有其他证明方法呢？请动动脑筋吧！提示：用“截长法”在 AC 上截取 $AE=AB$，并连接 DE.

技巧 4　巧化边角，因题而异，妙求角度.

角度的计算方法
- 直接推算　常规（例15）
- 巧妙设元　方程思想（方法引申 1）
- 分类讨论　缜密思维（方法引申 2）