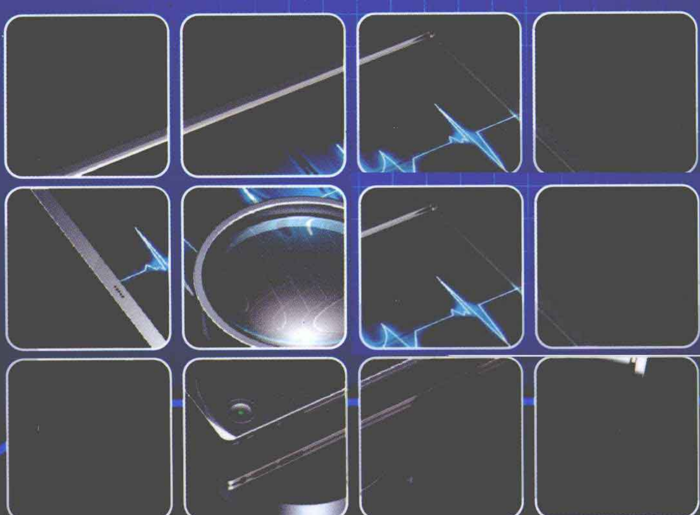
小波理论算法与滤波器组

Wavelets: Theory, Algorithms and Filter Banks

范延滨　潘振宽　王正彦　编著



科学出版社

小波理论　算法与滤波器组

范延滨　潘振宽　王正彦　编著

本书得到青岛大学出版基金资助

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书着力从滤波器组观点阐述小波技术及其应用，重点突出小波理论、算法与滤波器组相统一的思想。本书共9章，从小波分析的基础（小波概念）、小波空间的分解（多分辨率分析）和小波变换的实现（滤波器组）三个方面对“小波理论、算法与滤波器组”进行阐述。其主要内容包括：信号变换与框架原理，多抽样系统与滤波器组，小波与小波变换，空间分解与多分辨率分析，正交小波与正交滤波器组，双正交小波与双正交滤波器组，小波包与小波包滤波器组，提升小波与提升小波滤波器组，信号奇异性检测与小波变换。

本书可以作为普通高等院校理工科专业高年级本科生和研究生的教材及参考书，也可以作为相关领域工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

小波理论　算法与滤波器组/范延滨，潘振宽，王正彦编著．—北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030848-1

Ⅰ.①小…　Ⅱ.①范…　②潘…　③王…　Ⅲ.①小波理论-应用-算法　②小波理论-应用-滤波器　Ⅳ.①O174.22　②O24　③TN713

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第070643号

责任编辑：陈晓苹/责任校对：耿　耘
责任印制：吕春珉/封面设计：北大彩印

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码　100717
http //www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011年6月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2011年6月第一次印刷　印张：18 3/4
印数：1—2 000　字数：440 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62142126　编辑部电话 010-62135793-8003

前　言

自 1984 年 J. Morlet 第一次提出小波概念至今，小波先后经历了小波和小波包、第一代小波和第二代小波、单小波和多小波、一维小波和高维小波等全方位的迅速发展，小波理论体系日臻完善，小波变换技术日趋成熟，小波应用领域日益广泛。

小波是多学科研究与应用的热点，是信息分析与信号处理的前沿理论和方法。从数学的角度看，小波分析是在应用数学的基础上发展起来的一门新兴学科，也是调和分析的结晶；从应用的角度看，小波变换是计算机应用、信号处理、图形分析、生物医学、非线性科学和工程技术等在方法上的重大突破；小波技术的“自适应性”和“数学显微镜”的特性，使小波分析与人类观察和分析问题的方法十分接近，因而被广泛应用于基础科学和工程技术。

小波分析是在傅里叶分析的基础上发展起来的，但小波分析与傅里叶分析存在本质的差异。从微观上看，小波变换与傅里叶变换的根本区别是由小波和正弦波的不同局部化性质产生的；从宏观上看，傅里叶分析是整体域分析，用独立的时域或频域表征信号的特征，而小波分析是局部化时频分析，用时域和频域的联合共同表征信号的特征。

小波理论具有很深的数学背景，小波变换具有很强的算法技巧，小波应用具有很高的滤波器组技术。因此，不论是小波理论学习还是小波工程应用都具有较大的难度，读者既要具备较好的数学基础，又要掌握较高的信号处理技术。

小波分析工具是数学推演，小波实现方法是滤波器组。数学推演是帮助读者理解小波的内涵、掌握小波变换的技术，滤波器组是读者应用小波技术解决工程问题的具体工具和方法。如何处理好小波的理论推演和工程实现之间的关系，自然就是写作过程中应重点研究的内容。

多年来，作者一直从事小波理论及小波应用方面的教学与研究工作，本书是作者在计算机类研究生课程“小波理论、算法与滤波器组”的讲义基础上完善而成的。本书着力从滤波器组观点阐述小波技术及其应用，重点突出小波理论、算法与滤波器组相统一的思想，旨在通过完整融合小波算法和滤波器组的方法，建立一种简单的、系统的、严谨的从小波理论到应用的结构体系，有效地降低小波分析数学理解上的难度和推演上的复杂度，显示小波分析在工程实践中的易用性和广泛性，让小波分析方法成为一种基础的、实用的、容易为读者所掌握和应用的数学工具。

从“小波理论、算法与滤波器组”的整体结构体系上看，主要应该透彻理解以下三个方面的内容：小波分析的基础（小波概念）、小波空间的分解（多分辨率分析）和小波变换的实现（滤波器组）。

首先，小波变换与傅里叶变换一样是一种数学变换理论，傅里叶变换是基于三角正交基函数对信号的正交变换，小波变换则是一种基于小波基函数对信号的变换，其基本变换方法是内积（空间分解），其基本实现方法是卷积（线性滤波器）。小波变换的基础

主要包括连续/离散小波正变换和小波逆变换的定义、方法与实例，是研究小波变换的理论基础。

其次，小波变换的最显著的特性是其局部化、多分辨率时频分析——“数学显微镜”特性，其局部化特性是通过小波的紧支撑性体现的，多分辨率分析是通过小波的压扩性实现的。通过小波母函数的平移运算能够生成希尔伯特空间的基，通过小波母数的压扩与平移联合运算能够张成不同的希尔伯特子空间，在不同的希尔伯特子空间中进行信号分析就揭示了信号由粗及精的逼近特性，这也是“数学显微镜”的内涵。在某一分辨率下，如果由母小波生成希尔伯特子空间的正交基，那么就得到了正交小波变换；如果放弃正交性，由母小波生成希尔伯特子空间的双交基，那么就得到了双正交小波变换；如果对不同分辨率下母小波生成的所有希尔伯特子空间的基，根据实际需要并按照某种规则选取不同分辨率下的基函数，则就生成了小波包。因此，泛函分析是小波分析的理论基础，是研究小波变换性质的基本方法，小波空间分解表征了多分辨率分析。

最后，小波变换不仅是一种数学理论，更重要的是要对其进行广泛的工程应用，从数学理论到工程应用就是小波变换的实现。小波变换的数学方法是内积，卷积具有内积的表示形式，卷积是线性系统对信号处理的基本操作，小波变换可以用滤波器实现，小波变换的多分辨率分析可以通过滤波器组实现，因此小波变换最基本的实现方法是滤波器组。正交小波变换可以用正交滤波器组实现，双正交小波变换可以用双正交滤波器组实现，小波包变换可以用小波包滤波器组实现。

关于小波母函数，其定义十分宽泛，如果一个紧支撑的函数的积分为零，即不包含直流分量，就可以认为是一个小波，如果把小波看成是一个系统的系统函数，那么该系统是带通的。小波变换定义为信号与小波函数的内积或与小波函数反褶、共轭后的卷积，即小波变换是对信号的滤波过程。从理论上看，如果小波基函数的带宽足够窄，则可以实现信号任意窄带的分析；小波基函数是通过小波母函数平移得到的，小波基函数可以覆盖整个时域，因此能够实现信号时域多点的同时分析；小波基函数是通过小波母函数压扩来控制其支撑区间，如果小波基函数的支撑区间足够小，则能够实现信号在时域任意点上的任意区间的局部分析。

另外，第一代小波是基于时频分析的小波变换，通过提升方案，进一步获得了第二代小波。与第一代小波相比，第二代小波具有明显的优势，如计算复杂度降低了约30%；属于有理小波变换，易于通过硬件实现。

本书共分 9 章，主要内容总结为以下几个方面。

第 1 章是信号变换与框架原理，主要讲述信号变换的基本方法和基本框架，是小波分析的数学基础。

第 2 章是多抽样系统与滤波器组，主要讲述多抽样系统与滤波器组的基本概念、设计方法和实现技术，是小波变换实现的技术基础。前两章是全书的理论分析与工程实现基础。

第 3 章主要阐述小波与小波变换的基本概念、基本理论与基本分析方法，包括连续小波与连续小波变换、离散小波与离散小波变换、二进小波与二进小波变换、二维小波与二维小波变换。

第 4 章是关于空间分解与多分辨率分析的研究，主要阐述小波多分辨率分析的基本概念、基本理论与基本方法，建立了小波变换与滤波器组的关系、小波多分辨率分析与滤波器组的关系，这是小波分析工程实践的理论基础。

第 5 章是关于正交小波与正交滤波器组的研究，重点介绍了正交小波基函数的构造和共轭镜像滤波器组，讨论了正交小波基与共轭镜像滤波器组的对应关系以及马拉特算法的快速算法，并给出应用小波变换处理信号的基本步骤和具体应用实例。

第 6 章是关于双正交小波与完全重构滤波器组的研究，在正交小波多分辨率分析的基础上，类比介绍了双正交小波多分辨率分析，讨论了双正交小波基函数与完全重构滤波器组的对应关系以及马拉特算法的快速算法。

第 7 章是关于小波包与小波包滤波器组的研究，详细阐述小波包变换的基本原理、马拉特算法的快速算法、最优基的选取算法等；以图像分解为例，给出了具体地分解、重构算法的设计与编程实现实例。

第 8 章是关于提升小波与滤波器组的研究，主要包括提升理论，第一代小波的提升，第二代小波。

第 9 章是关于信号奇异性检测与小波变换的研究，详细讨论了小波奇异性刻画的特性、多尺度边缘检测算子，以图像边缘检测为例，给出了应用二进小波模极大进行图像多尺度边缘提取的具体算法的设计与编程实现。

本书得到了青岛大学出版基金的资助，在此表示感谢。

在编写本书过程中，我们参考了一些文献，在此向文献的作者表示感谢。

本书的写作得到了研究生宋洁、成金勇、臧萍、张坤、崔雪英、周娜、刘彩霞、于雷、陈文永、卜园渊等同学的帮助，在此表示感谢。

本书还提供了电子课件和 Matlab 程序实例。

限于作者水平，书中肯定存在错漏和不妥之处，恳请读者给予批评与指正。

范延滨
2011 年 4 月

目　录

第 1 章　信号变换与框架原理

在数学上，小波分析是当前数学中一个迅速发展的新领域，小波分析是泛函数、傅里叶（Fourier）分析、调和分析、数值分析的最完美的结晶；在应用领域，特别是在信号处理、图像处理、语音处理以及众多非线性科学领域，它被认为是继傅里叶分析之后的又一种有效的时频分析方法。小波变换与傅里叶变换相比，是一个时间和频域的局域变换，因而能有效地从信号中提取信息，解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题。多分辨率分析使小波变换具有“数学显微镜”的优良特性。

框架理论最初来源于信号处理。1952 年，Duffin 和 Schaffer 在研究非调和傅里叶级数时，提出了希尔伯特（Hilbert）空间框架的概念。Daubechies、Grossmann 和 Meyer 把连续小波变换的理论与框架理论相结合，定义了仿射框架（或称小波框架）。框架已经广泛应用于小波分析、信号分析、图像处理、数值计算、巴拿赫（Banach）空间理论、索伯莱夫（Sobolev）空间理论、贝索夫（Besov）空间理论等理论和应用领域的研究中。

本章主要介绍信号变换与框架原理，这两部分内容是小波分析的信号处理基础和泛函分析基础，其重点内容是信号变换与框架原理的定义与性质。

在信号变换中，首先介绍了线性空间与泛函分析，然后将其应用于信号分解，然后再讲述正交分解和双正交分解的数学基础和基本形式，主要包括矢量空间与矢量分解、线性空间与距离空间、赋范空间与巴拿赫（Banach）空间、内积空间与希尔伯特空间、线性算子与线性算子空间、内积空间的信号分解、$L^2(R)$ 空间与 $l^2(z)$ 空间、内积空间的逼近、信号双正交分解。

在框架原理中，首先给出了框架的概念，然后重点讲述了框架下的信号分解与重构的数学基础和基本形式，主要包括框架的概念、框架算子、对偶框架概念、框架下的采样、框架下的信号分解与重构、里茨（Riesz）基框架、对偶框架的构造。

写作思路：以信号分解为主题，从信号的分解入手，首先在矢量空间对信号分解，然后引入函数空间（距离空间、赋范空间和内积空间）并讨论信号的分解。

学习方法：重点掌握信号变换与框架原理的概念与表达，理解信号分解与重构的数学内涵。本章是后续章节学习的基础。

1.1 信号分解

信号的分解就是把待研究的信号分解成已知信号或者特殊性信号的组合，达到简化信号分析的目的。常用的分解方法有信号的交流与直流分解、信号的奇与偶分解、信号的实与虚分解、信号的正交分解、信号的双正交分解、信号的变换域分解及信号逼近等。本节主要介绍信号的正交分解、信号的双正交分解和信号逼近。

1.1.1 矢量空间与矢量分解

在矢量空间U中，早就熟知矢量之间的正交性、矢量的分解和投影，这些概念都可以通过内积推广到抽象内积空间中，从而也可以讨论其中函数之间的正交性、函数的分解和投影，并且具有与矢量空间非常类似的性质。

在矢量空间U中，可以用矢量来描述空间的元素，主要特性如下。

1. 矢量空间的基

定义 1.1 在矢量空间U中，假设存在一组线性无关的矢量集$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$，对于任意给定的矢量$\vec{V}\in U$均可以表示成$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$的线性组合，即

$$\vec{V}=\sum_{n\in\Gamma}v_n\vec{e_n},\quad \forall\,\vec{V}\in U \tag{1.1}$$

且展开系数集$\{v_n\}_{n\in\Gamma}$是唯一的，则称$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$为矢量空间$U$的基且是完备的，$\Gamma$是任意维指标集，并称$U$为$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$张成的矢量空间，记为

$$U=\mathrm{span}\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma} \tag{1.2}$$

2. 矢量的正交性

定义 1.2 在矢量空间U中，假设矢量$\vec{V_1}$，$\vec{V_2}\in U$，则$\vec{V_1}$和$\vec{V_2}$存在点积、叉积和并积等运算。其中，点积运算定义为$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=V_1V_2\cos\theta$，式中$\theta$是$\vec{V_1}$和$\vec{V_2}$的夹角。如果$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=V_1V_2\cos\theta=0$，则$\vec{V_1}$和$\vec{V_2}$正交，记作$\vec{V_1}\perp\vec{V_2}$。

3. 矢量空间的内积

定义 1.3 在矢量空间U中，定义矢量的内积为$\langle\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\rangle=\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$，则$\vec{V_1}$和$\vec{V_2}$正交性可表示为$\langle\vec{V_1},\vec{V_2}\rangle=0$。

4. 矢量空间的正交基

定义 1.4 假设$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$是矢量空间$U$的基，且$\langle\vec{e_m},\vec{e_n}\rangle=C_m\delta_{mn}$，则称$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$为矢量空间$U$的一个完备正交系。如果$C_m=1$，则称$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$为矢量空间$U$的一个完备规范正交系，或称一组完备规范正交基。

5. 矢量空间的正交分解

如果$\vec{V}\in U$，则$\vec{V}$可以在$\{\vec{e_n}\}_{n\in\Gamma}$上作如下正交分解

$$\vec{V}=\sum_{n\in Z}v_n\vec{e_n}$$

$$v_n = \vec{V} \cdot \vec{e_n} = \langle \vec{V}, \vec{e_n} \rangle \tag{1.3}$$

1.1.2　线性空间与距离空间

信号常常被看成矢量，然后通过建立一个空间，引入一个算子来进行信号分析。泛函分析（Functional Analysis）的内容是空间与算子，信号分析的理论基础是泛函分析。

在集合论中，集合与集合之间的关系称为映射。在泛函分析中，把具有一定性质的元素的集合称为空间；定义元素之间满足线性运算关系的空间为线性空间，定义距离的空间为距离空间，定义范数的空间为赋范空间，定义内积的空间为内积空间。从空间到空间或数域的关系定义为算子或泛函，将由空间到空间的映射称为算子，将由空间到数域的映射称为泛函。可以认为泛函是一种特定的算子，通常的算子是由赋范线性空间与赋范线性空间的映射。

1. 线性空间

定义 1.5　设 U 为一个非空集合，K 为数域（实数域 R 或复数域 C），通过规定映射公理有

S：$U+U \to U$，其内容为 $S(x, y)=x+y$，x，$y \in U$。

M：$K \times U \to U$，其内容为 $M(\lambda x)=\lambda x$，$\lambda \in K$，$x \in U$。

定义 U 中两个元素之间的加法运算以及数与 U 中元素之间的乘法运算，如果这两种运算遵守以下的条件，就称 U 为数域 K 上的线性空间或矢量空间。

（1）加法运算满足公理

① $x+y=y+x$，$\forall x$，$y \in U$。

② $(x+y)+z=x+(y+z)$，$\forall x$，y，$z \in U$。

③ $\exists \theta \in U$ 使得 $\theta+x=x$，$x \in U$，θ 为零元素。

④ $\forall x \in U$，$\exists x' \in U$ 使得 $x+x'=\theta$，x' 称为 x 的逆元素并记为 $x'=-x$。

（2）乘法运算满足公理

① $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$，$\forall \lambda$，$\mu \in K$，$\forall x \in U$。

② $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$，$\forall \lambda \in K$，$\forall x$，$y \in U$。

③ $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$，$\forall \lambda$，$\mu \in K$，$x \in U$。

④ $I \times x=x$，$x \in U$，I 称为单位矩阵。

当 $K=R$ 时，U 称为实线性空间；当 $K=C$ 时，就称为复线性空间。线性空间中的元素常常称为点或矢量。

2. 距离空间

定义 1.6　所谓距离空间 $\{U, d\}$，是指在其中定义了距离 d 这种结构的非空集合 U，d 将 U 的任意两个元素 x，$y \in U$ 映射成一个非负实数 $d(x, y)$，对于任意 x，y，$z \in U$，$d(x, y)$ 满足公理

① $d(x, y) \geqslant 0$，$d(x, y)$ 非负。

② $d(x, y)=0$，当且仅当 $x=y$。

③ $d(x, y)=d(y, x)$，对称性。

④ $d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(y, z)$，三角不等式。

3. 距离空间的完备性

定义 1.7　如果距离空间 U 中的每一个柯西（Cauchy）点列均收敛于 U 中的一点，则称 U 为完备的距离空间。

实例 1.1　n 维矢量空间 U^n。

$U^n=\{x \mid x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \xi_k \in K, k=1, 2, \cdots, n\}$，其中的任意两个元素为$\begin{cases} x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \\ y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \end{cases}$，定义代数运算$\begin{cases} x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n) \\ \lambda x=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n) \end{cases}$，则 U^n 为 n 维线性空间。$U^n=R^n$ 为实矢量空间或欧几里得（Euclid）空间，则 $U^n=C^n$ 称为复矢量空间或酉空间。

定义距离：

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

U^n 为完备的距离空间。

1.1.3　赋范空间与巴拿赫空间

从现代观点来看，泛函分析研究的主要内容是实数域或复数域上的完备赋范线性空间。这类空间被称为巴拿赫空间，巴拿赫空间中最重要的特例被称为希尔伯特空间，其上的范数由一个内积导出。这类空间是信号分析数学描述的基础。

1. 赋范线性空间

定义 1.8　设 U 是数域上的线性空间，在 U 上定义映射 $\|\cdot\|$：$U \to K$，使每一个 $x \in U$ 都有一个非负的实数 $\|x\|$ 与之对应，对任意的 x，$y \in U$ 和 $\alpha \in K$ 满足公理

① $\|x\| \geqslant 0$（非负性）。

② $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$（θ 为空集）。

③ $\|\alpha x\|=|\alpha| \|x\|$，（齐次性）。

④ $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$，（三角不等式）。

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数，称 $\{U, \|\cdot\|\}$ 为赋范线性空间。

在 U 中定义距离 $d(x, y)=\|x-y\|$，称为由范数诱导的距离。不难证明，这样的距离满足距离公理，因而可按导出的距离使赋范空间也是一个距离空间。

由范数导出的距离具有平移不变性和绝对齐次性。设 U 是赋范空间，d 是由范数导出的距离，则对于所有 x，$y \in U$ 和任意 $a \in K$，有

① $d(x+a, y+a)=d(x, y)$（平移不变性）。

② $d(ax, ay)=|a| d(x, y)$（绝对齐次性）。

2. 巴拿赫空间

定义 1.9　如果赋范线性空间$\{U, \|\cdot\|\}$按距离

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

是完备的，则称为巴拿赫（Banach）空间，记为$B=\{U, \|\cdot\|\}_B$。

3. 巴拿赫空间的实例

实例 1.2　U^n 空间按如下定义范数

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

构成为一个赋范线性空间，也是巴拿赫空间。

实例 1.3　假设连续函数 $x(t)\in L^p(R)$，如下定义其范数

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $L^p(R) =\{x: \|x\|_p<+\infty\}$是一个赋范线性空间，也是巴拿赫空间。

实例 1.4　假设离散序列 $x[n] \in l^p(Z)$，如下定义其范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in Z} |x[n]|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $l^p(Z) =\{x: \|x\|_p<+\infty\}$是一个赋范线性空间，也是巴拿赫空间。

1.1.4　内积空间与希尔伯特空间

在矢量代数中，两个非零矢量正交的充要条件是其点积为零。通过引入内积，可以把矢量空间的一些重要性质直接推广到一般的内积空间。

1. 内积空间

内积空间是矢量空间的自然推广，并保留了它的许多重要特性，其核心是正交性概念，内积空间的正交性是通过定义内积而引入的，由正交性概念产生投影和傅里叶级数的一般理论。这些性质是赋范空间所不具备的，但通过内积可以诱导出范数和距离，从而使内积空间又是赋范空间和距离空间。它具备了代数、距离、范数和内积等结构，因而有非常广泛和重要的应用。

定义 1.10　设U是数域K上的线性空间，如果定义映射$\langle\cdot, \cdot\rangle$: $U\times U\to K$对于任意x，y，$z\in U$及$\alpha\in K$满足公理

① $\langle x+y, z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$。

② $\langle \alpha x, y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$。

③ $\langle x, y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$。

④ $\langle x, x\rangle\geqslant 0$，当且仅当$x=0$，$\langle x, x\rangle=0$。

则称$\langle x, y\rangle$为x，y的内积。定义了内积的线性空间U称为内积空间，并记

作$\{U, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$。

内积诱导的范数：设U是内积空间，对于任意$x \in U$，定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

则$\|x\|$是x的范数，U构成赋范空间，这样定义的范数称为由内积诱导的范数。

2. 希尔伯特空间

定义 1.11　如果内积空间$\{U, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$在内积诱导的范数下是完备的赋范空间，则称$U$是完备的内积空间或希尔伯特（Hilbert）空间，通常用H表示希尔伯特空间，记为$H = \{U, \langle \cdot, \cdot \rangle\}_H$。

在希尔伯特空间H中，假设$x(t)$，$y(t) \in H$、α_1，$\alpha_2 \in K$，则存在下列性质：

① 左函数线性性：$\langle \alpha x + \lambda y, g \rangle = \alpha \langle x, g \rangle + \lambda \langle y, g \rangle$。

② 厄米（Hermitian）对称性：$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$。

③ 柯西-施瓦茨（Cauchy-Schwarz）不等式：$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|, x = y$。

3. 希尔伯特空间的实例

常用的希尔伯特空间。

实例 1.5　U^n空间。

设x，$y \in U^n$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$。

定义内积：$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}$

诱导范数：$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

诱导距离：$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

不难证明上面定义的内积满足内积公理，因此在此定义下U^n是内积空间。R^n为实内积空间，C^n为复内积空间。由上面内积定义导出的距离与完备距离空间R^n和C^n中的距离定义相同，因此，U^n又是完备的内积空间，即为希尔伯特空间。

实例 1.6　$L^2_{[a,b]}$空间。

定义内积：$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) \mathrm{d}t$

诱导范数：$\|x\| = \langle x, y \rangle = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$

诱导距离：$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$

则可证明$L^2_{[a,b]}$为内积空间且为希尔伯特空间。

实例 1.7　l^2空间。

定义内积：$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^*$