21世纪高等学校教材

邓友祥　杨俊林　孙振祖

高等几何

GAODENGJIHE

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等几何

邓友祥　杨俊林　孙振祖　编

东南大学出版社

内容提要

本书是在国内外现有同类高等几何教材的基础上编写而成。相对现有国内同类教材其内容更充实，论证更严密。主要内容包括：平面上的仿射几何学、射影平面、射影坐标系与射影变换、二次曲线的射影理论、变换群与几何学、罗氏平面几何简介。书后还附有射影几何的公理系统、实数域上的欧氏几何等内容。

本书可作为高等师范院校及综合性大学数学专业本科生和专科生教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/邓友祥等编．—南京：东南大学出版社，2005.6

ISBN 7-81089-910-4

Ⅰ．高… Ⅱ．邓… Ⅲ．高等几何—高等学校教材 Ⅳ．O18

版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049190 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销 姜堰市晨光印刷有限公司印刷

开本：700mm×1000mm 1/16 印张：11.25 字数：221 千字

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

定价：18.00 元

序

高等几何是高等院校数学类专业(特别是师范类)的重要基础课之一,与“数学分析”、“高等代数”一起,被称为“前三高”。

本书主要介绍了仿射几何学、射影几何学,更侧重于后者。正如作者在书中第 6 章第 2 节中提到的,几何学还包括欧氏几何学、椭圆几何学(Riemann 几何)、双曲几何学(Lobachevsky 几何)以及无穷维几何学等。建议读者先阅读一下该节的内容,对什么是仿射几何学、什么是射影几何学以及其它几何学有个大致的了解,然后再阅读全书。我想这是很有好处的。

本书中概念比较多,掌握一些重要的基础概念及其应用有着提纲挈领的效果,如交比、仿射变换、射影变换、对偶原理、射影坐标系、极点、极线、虚圆点等。而有些概念又可与初等几何学中的对应概念做比较,如二次曲线的焦点、准线、渐近线、主轴、顶点、离心率等等,以便于更好地掌握射影几何学中二次曲线的理论。

一些历史上著名的定理对射影几何学的发展起到了很大的推动作用,如 Pascal 定理、Steiner 定理、Pappus 定理、Desargue 定理、Brianchon 定理。当然现在看来,用射影几何学的知识可以很好地证明它们,事实上,它们也的确属于射影几何学的范畴,掌握这些著名的定理无疑会增加对学习射影几何学的兴趣。

本书取材广泛,论述严谨,前五章还配有大量习题以巩固学习和增加知识点,只要读者具备少许线性代数和解析几何的知识便可阅读。

王宏玉

2004 年 10 月于扬州大学

前　　言

高等几何是高等院校数学专业的基础课之一。通过本课程的学习可以帮助学生进一步拓宽几何空间知识，以更高层面的观点来认识几何，从而提高学生的数学素养。

本教材的编者多年来一直从事高等几何的教学与研究。在教学过程中，通过对各种版本的教材的学习与思考，结合中学阶段新的课程标准的颁布与实施，感觉到有必要编写一本更适应新时代需要的高等几何教材。在编写过程中，我们仍然汲取了现有几种版本的教材内容，特别是梅向明教授等编写的《高等几何》中的处理方法，即将解析法与综合法结合起来作为研究问题的手段。同时，我们还增加了射影平面中研究二阶曲线的度量性质特别是焦点、准线的性质等内容，为中学教师更深入地处理中学平面解析几何中有关二次曲线问题提供理论上的指导。在编写过程中，我们同时注重语言表述上的严谨、论证的严密，努力加强本教材的可读性和师范性。

本教材的前六章为课堂教学内容，以平面射影几何为主，同时介绍变换群观点。为了使学生在观点上有一个提高，我们从 H. B. Ефимов 的《高等几何》中摘录了部分罗氏几何内容作为本书第七章，同时还增加了吴光磊先生写的“射影几何的公理系统”和梅向明教授写的“实数域上的欧氏几何”作为附录，供学生阅读，以帮助学生对几何有一个较全面的认识。

本教材各章节具体分工如下：第一章（杨俊林执笔）；第二章（邓友祥执笔）；第三章（邓友祥、杨俊林执笔）；第四章（邓友祥、孙振祖执笔）；第五章（杨俊林、孙振祖执笔）；第六章、第七章（孙振祖执笔）。

教材仅是教师与学生议论的“话题”，是师生研究问题的中介，因而读者在阅读时不必拘泥于教材，何况教材中也一定存在不少错误与疏漏之处，恳请读者给予批评指正。

在编写教材过程中，扬州大学特聘教授、博士生导师王宏玉教授曾对初稿进行了认真审阅，对教材的初稿中不少部分作了修改，同时对教材的进一步完善提出了很好的意见，并欣然为本书作序。在教材出版之际编者对他表示衷心感谢！编写本教材，我们参照了国内外不少相关书籍，在此对这些书籍的编写者同样表示衷心感谢！东南大学出版社的编辑为本书的顺利出版，做了认真而有益的工作，也一并表示衷心感谢！

编　者

2005 年 1 月于泰州师专

目　录

1 平面上的仿射几何学

1.1 仿射坐标系

本教材只介绍平面上的几何，这里只定义平面上点的仿射坐标，空间中点的仿射坐标可类似定义.

平面上任意给定不共线的三点 O、E_1、E_2，记 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$，它们构成一个仿射坐标系$\{O;E_1,E_2\}$，或写成$\{\boldsymbol{O};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，也称之为仿射标架. 称 O 为坐标原点，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为坐标向量(或标架向量).

在平面上取定一个标架$\{\boldsymbol{O};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，则平面上任意一点 P，唯一决定一个向量$\overrightarrow{OP}$，称为点 P 的位置向量. 这些向量的全体构成一个二维向量空间. 于是点 P 与向量$\overrightarrow{OP}$ 的对应，就建立了平面上的点集与二维向量空间之间的一个一一对应. $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$是向量空间中的一组基，任意给定平面上的一点 P，向量$\overrightarrow{OP}$有唯一分解式：

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2. \tag{1.1}$$

我们称有序数组(x,y) 为点 P 在仿射坐标系$\{\boldsymbol{O};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中的仿射坐标. 建立了仿射坐标系的平面称之为仿射平面. 特别地，如果 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$，$\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$ 都是单位向量($|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$)，则称之为平面上的 Descartes 坐标系，如果 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为相互垂直的单位向量，此即为通常所说的平面直角坐标系.

在仿射平面内，过点 P 作 OE_1(x 轴)、OE_2(y 轴) 的平行线分别交 y 轴、x 轴于点 P_2、P_1，则有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$. 点 P 的坐标为(x,y)，x、y 分别是$\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 和$\overrightarrow{OP_2}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的比值.

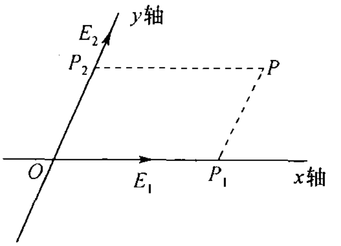

图 1-1

显然，平面上点 P 的坐标(x,y) 与坐标系的选取有关. 如果给定平面上另

一仿射坐标系$\{O';e'_1,e'_2\}$，则设

$$\overrightarrow{OO'}=\xi e_1+\eta e_2,\overrightarrow{O'P}=x'e'_1+y'e'_2.$$

其中$e'_1=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2$，$e'_2=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2$，$(x',y')$为点$P$在新坐标系$\{O';e_1',e'_2\}$中的坐标. 因而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=xe_1+ye_2=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=\xi e_1+\eta e_2+x'e'_1+y'e'_2\\&=(\alpha_{11}x'+\alpha_{21}y'+\xi)e_1+(\alpha_{12}x'+\alpha_{22}y'+\eta)e_2.\end{aligned}$$

由此推得

$$\begin{cases}x=\alpha_{11}x'+\alpha_{21}y'+\xi,\\y=\alpha_{12}x'+\alpha_{22}y'+\eta\end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

式(1.2)称之为仿射坐标变换公式，它是非退化的线性变换(非退化即为系数矩阵满秩). 显见，每一非退化线性变换式(1.2)也表示一个仿射坐标变换公式.

注意：平面上的直角坐标变换公式与式(1.2)形式一致，其系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}\end{pmatrix}$$

为正交矩阵，但在仿射坐标变换式(1.2)中，若系数矩阵A正交，并不能得出它一定是直角坐标变换. 只有当仿射标架$\{O;e_1,e_2\}$和$\{O';e'_1,e'_2\}$中有一个是直角标架时，才能得出式(1.2)是直角坐标变换公式.

1.2 平面上的仿射几何

本节将列举解析几何课程中已学过的几何知识，说明它们在仿射坐标系中仍成立.

首先，平行线段的比值，定比分点公式，直线方程的一般式、二点式、截距式等在仿射坐标系中仍成立.

其次，二阶曲线C：

$$F(x,y)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2b_1x+2b_2y+c=0, \tag{1.3}$$

即

$$(x\quad y\quad 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \tag{1.3'}$$

的渐近方向(X,Y)仍满足方程

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+2a_{12}XY=0$$

或

$$(X\quad Y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=0. \tag{1.4}$$

一对共轭方向(X,Y)与(X',Y')满足方程

$$(X\quad Y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=0. \tag{1.5}$$

再次,曲线C上一点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$(x_0\quad y_0\quad 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0. \tag{1.6}$$

与非渐近方向(X,Y)共轭的直径方程为

$$(X\quad Y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0. \tag{1.7}$$

中心$S(x_0,y_0)$满足方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+b_1=0,\\F_2(x,y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+b_2=0.\end{cases} \tag{1.8}$$

以上各式在平面上的仿射坐标系中同样成立.

平面上的其它几何性质,如距离、夹角、主方向等在已知仿射标架向量的长度和夹角后,也可以用仿射坐标来计算.例如,记

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=g_{11},\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=g_{12},\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=g_{22},\\&\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=g_{21}=g_{12}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

两点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$间的距离$|AB|$有

$$|AB|^2=g_{11}(x_1-x_2)^2+2g_{12}(x_1-x_2)(y_1-y_2)+g_{22}(y_1-y_2)^2. \tag{1.10}$$

上述二阶曲线C的主方向(X,Y)满足方程组

$$\begin{cases}a_{11}X+a_{12}Y=\lambda(g_{11}X+g_{12}Y),\\a_{12}X+a_{22}Y=\lambda(g_{21}X+g_{22}Y).\end{cases} \tag{1.11}$$

上式中λ也称为特征值,它满足特征方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda g_{11}&a_{12}-\lambda g_{12}\\a_{12}-\lambda g_{21}&a_{22}-\lambda g_{22}\end{vmatrix}=0, \tag{1.12}$$

即

$$|A-\lambda G|=0,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}.$$

通常称 g_{11}、g_{12}、$g_{21}(=g_{12})$、g_{22} 为平面上的度量张量.

平面上三点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$ 决定的三角形的面积为

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}(e_1,\ e_2), \tag{1.13}$$

其中$(e_1,e_2)=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$表示以 e_1、e_2 为邻边作成的平行四边形的面积.

在下一节的仿射映射(变换)下,上面列举的公式、性质与原解析几何中相应公式、性质保持不变都将得到证明.

1.3　仿射映射(变换)

定义 1.3.1　共线三点 P_1、P_2、P 的单比表示为(P_1P_2P),我们定义

$$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P},$$

其中 P_1P、P_2P 是有向线段的数量,称 P_1、P_2 为基点,P 为分点.

定义 1.3.2　空间中的两个平面 π 与 π'(π 与 π' 平行或相交于直线 l).在平面 π 中任取一点 P,沿某给定方向 V 引平行线,交平面 π' 于点 P'.这样使平面 π 内的点与平面 π' 内的点建立一种一一对应关系.这种对应叫做 π 到 π' 的透视仿射对应(简称(平行)透视).方向 V 为透视方向.这时 π、π' 交线 l 上每一点,都是透视下的不变点.

显然,在透视下,有如下性质:

1. 如图 1-2,过平面 π 上每一点 P 作 $PP'\parallel V$,与平面 π' 必有唯一的交点 P' 存在.反之给定平面 π' 上任一点 P',也可在平面 π 上找到唯一一点 P 使$PP'\parallel V$.即透视在相交(或平行)平面 π、π' 之间建立了点与点的一一对应关系,我们称点 P' 为透视下点 P 的象点,称 P 为 P' 的原象.

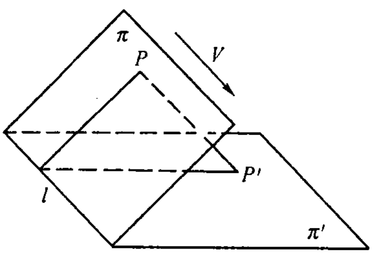

图 1-2

（平行）透视的逆还是（平行）透视.

2. 平面π内的直线m与透视方向V决定一个过直线m平行于V的平面，它交平面π'于直线m'，直线m'上的点可以看作由m上的点在平面π'上的象点构成. 即透视在平面π与π'之间也建立一个直线与直线的一一对应关系. 透视的这种使点对应点、直线对应直线的性质我们称为保持同素性.

3. 透视保持点和直线间的结合关系不变.

如图 1-3，点A、B、C在直线n上，经过透视对应后，其对应点A'、B'、C'在对应直线n'上，这就是说，透视仿射对应保持点和直线的结合性.

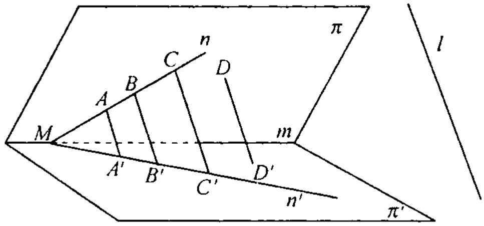

图 1-3

4. 透视仿射对应保持二直线的平行性.

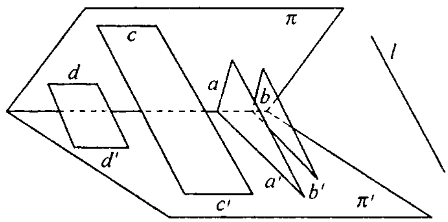

图 1-4

如图 1-4，在平面π内，直线$a // b$，$c // d$，经过平面π、π'间的透视仿射对应后，a对应a'，b对应b'，c对应c'，d对应d'，容易证明$a' // b'$，$c' // d'$.

5. 透视将共线三点仍变为共线三点，且保持其简单比（单比）不变. 即在平面π上，点P_1、P_2、P_3共线，则在透视下它们的象点P'_1、P'_2、P'_3在平面π'上仍共线，且有$\dfrac{P_1P_2}{P_2P_3}=\dfrac{P'_1P'_2}{P'_2P'_3}$.

综上所述：透视保持同素性（点变成点，直线变为直线）、结合性（共线的点变为共线的点，共点的线变为共点的线）和平行性（平行直线变为平行直线），且保持共线三点的单比不变.

注：平行直线是不相交的直线，从保持结合性可推得保持平行性.

定义 1.3.3 平面$\pi=\pi_1$在一透视下变为平面π_2，π_2又经一透视变为平

面 π_3，…，经过第 k(k 为有限数)次透视将平面 π_k 变为平面 $\pi_{k+1}=\pi'$，则称 π 到 π' 上的点对应为仿射映射，用小写字母 f、ϕ、ψ 表示. 如果平面 π 与 π' 重合，则称其为平面 π 上的仿射变换.

显然，仿射映射(变换)也保持同素性、结合性(包括平行性)和共线三点的单比不变.

定义 1.3.4 仿射映射(变换)下保持不变的几何性质和不变量称为仿射性质和仿射不变量.

定理 1.3.1 仿射映射 f 将平面 π 上的仿射标架 $\{\boldsymbol{O};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 变为平面 π' 的仿射标架 $\{\boldsymbol{O}';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$，且将 π 上点 P 变为 π' 上点 P'，则点 P 与点 P' 在对应仿射标架中的坐标相等[即若 P 在 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中坐标为 $(x,\ y)$，则 P' 在象标架 $\{\boldsymbol{O}';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$ 中的坐标也是 $(x,\ y)$]，反之，具有上述性质的平面 π 到 π' 上的点之间的映射也一定是仿射映射.

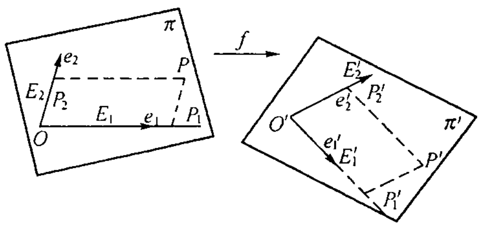

图 1-5

证明 如图 1-5，在仿射映射 f 下，不共线的三点 O、E_1、E_2 的象点 O'、E'_1、E'_2 也不共线，它们分别构成平面 π、π' 上的仿射标架 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 与 $\{\boldsymbol{O}';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$. 设 P 是平面 π 上任一点，作 $PP_1 \parallel \boldsymbol{e}_2$，$PP_2 \parallel \boldsymbol{e}_1$ 分别交 x 轴、y 轴于 P_1、P_2，设 P 点的坐标是 $(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{OP_1}=x\overrightarrow{OE_1}$，$\overrightarrow{OP_2}=y\overrightarrow{OE_2}$. 在平面 π' 上取 $O'E'_1$ 上点 P'_1、$O'E_2'$ 上点 P'_2，使 $\overrightarrow{O'P'_1}=x\overrightarrow{O'E'_1}$、$\overrightarrow{O'P'_2}=y\overrightarrow{O'E'_2}$. 过 P'_1 作平行于 $O'E'_2$ 的直线与过 P'_2 作平行于 $O'E'_1$ 的直线交于 P'.

因仿射映射 f 保持共线三点的单比不变，则 P_1 的象一定是 P'_1，P_2 的象是 P'_2. 又 f 保持平行性，则 P_1P 的象是 P'_1P'，P_2P 的象是 P'_2P'，推得点 P' 是点 P 的象. 这就证明了点 P 与其象在对应的坐标系中坐标相等.

反之，只要证明存在仿射映射 f，变仿射标架 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 为 $\{\boldsymbol{O}';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$，即证明在 f 下，$O\to O'$，$E_1\to E'_1$，$E_2\to E'_2$.

一般说来，可分如下三步进行：

1. 将平面 π 平移到 π_1，使 O 与 O' 重合，$\{O;\ E_1,\ E_2\}$ 成 $\{O';E_1^{(1)},E_2^{(1)}\}$，这是一个平行平面间的透视，不妨记为 f_1.(如图 1-6)

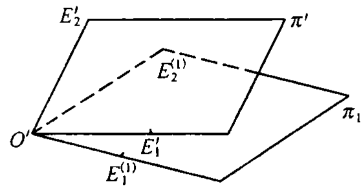

图 1-6

2. 过 $O'E'_1$ 任作一平面 π_2（不通过点 $E_1^{(1)}$）与 π_1、π' 都不重合，用 $\overrightarrow{E_1^{(1)}E'_1}$ 为平行射影方向作 π_1 到 π_2 的透视 f_2，这时 f_2 将 $E_1^{(1)}$ 变为 E'_1，设 $\{O';E_1^{(1)},E_2^{(1)}\}$ 变为 π_2 平面上的 $\{O';E'_1,E_2^{(2)}\}$.

3. 再用平行于 $\overrightarrow{E_2^{(2)}E'_2}$ 方向的平行射影——透视 f_3 将平面 π_2 变成 π'，这时 $E_2^{(2)}$ 变成 E'_2，而 O'、E'_1 是平面 π' 与 π_2 交线上的点，为透视 f_3 下的不变点，于是：

$$\pi \xrightarrow{f_1} \pi_1 \xrightarrow{f_2} \pi_2 \xrightarrow{f_3} \pi'.$$

$$\{O;E_1,E_2\} \xrightarrow{f_1} \{O';E_1^{(1)},E_2^{(1)}\} \xrightarrow{f_2} \{O';E'_1,E_2^{(2)}\} \xrightarrow{f_3} \{O';E'_1,E'_2\}.$$

令 $f = f_3 \cdot f_2 \cdot f_1 : \pi \to \pi'$，$\{O;E_1,E_2\} \to \{O';E'_1\ E'_2\}$，则 f 为仿射变换. 显然 f 将 π 上坐标系 $\{\boldsymbol{O};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中坐标为 (x,y) 的点 P 变为平面 π' 上坐标系 $\{\boldsymbol{O}';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$ 中与 P 坐标相等（即 (x,y)）的点 P'.

由此我们给出仿射映射（变换）的一个等价定义：

定义 1.3.5 平面 π、π'（也可以是平面 π 本身）上，点之间的一个一一对应，如果保持同素性、结合性（包含平行性）和共线三点间的单比不变，那么这个一一对应称之为仿射映射（变换）.

由定理 1.3.1 可知，在平面仿射坐标系中能用坐标表示的而不涉及长度、角度等度量关系的几何性质和几何量，在仿射映射下都不变，这些几何性质和几何量称之为仿射性质和仿射不变量.

例如，两点的中点，共线三点的单比，平行直线都在仿射映射下保持不变；关于二阶曲线的几何性质：如渐近方向、渐近线、中心、切线、共轭方向和共轭直径等都是仿射性质.

虽然平面三角形的面积在仿射映射（变换）下，不是仿射不变量，但是可以证明：

定理 1.3.2 两个三角形面积之比是仿射不变量.

证明 设两个三角形为 $\triangle P_1P_2P_3$ 和 $\triangle P'_1P'_2P'_3$，且 $P_1(x_1,y_1)$、$P'_1(x'_1,y'_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P'_2(x'_2,y'_2)$、$P_3(x_3,y_3)$、$P'_3(x'_3,y'_3)$. 由式(1.13) 得两个三角形的面积之比为

$$S_{\Delta P_1P_2P_3} : S_{\Delta P'_1P'_2P'_3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

再运用定理 1.3.1,点和象点在对应坐标系中有相等的坐标,而上述比值只出现坐标,因此该比值在仿射映射(变换)下不变,故而是仿射不变量.

更一般地有：

推论 两个多边形(或两个封闭图形)的面积之比是仿射不变量.

1.4 平面上的仿射变换公式

平面上给定仿射坐标系$\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$和一个仿射变换 f,设在 f 下坐标系$\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$的象坐标系为$\{\boldsymbol{O}';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$. 由定理1.3.1知,在仿射变换$f$下,平面上任一点 P 和其象点 P' 在对应的坐标系中有相等的坐标(x,y),设象点 P' 在 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中的坐标为(x',y'),则称$(x,\ y)$ 与(x',y') 之间的关系式为平面上的仿射变换公式.

设仿射变换 f 下O 的象点O' 在 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中的仿射坐标为(ξ,η), $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 的象 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$ 在 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中的坐标分别为$(\alpha_{11},\alpha_{12})$ 和$(\alpha_{21},\alpha_{22})$(如图 1-7).

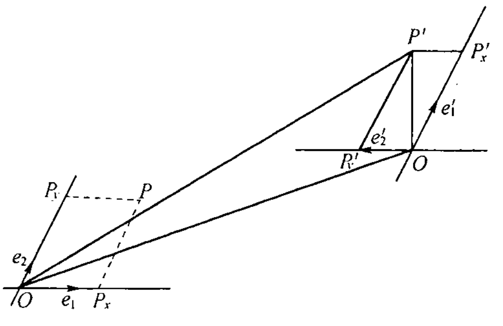

图 1-7

于是,给定平面上的仿射变换 f,在仿射坐标系$\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中点 $P(x,\ y)$ 和象点 $P'(x',y')$ 的变换公式可转化为同一点 P' 在$\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ 中的坐标(x',y') 与 P' 在 $\{\boldsymbol{O}';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$ 中坐标$(x,\ y)$ 间的坐标变换公式,由公式(1.2) 可得$(x,\ y)$ 与(x',y') 之间的关系式

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \xi, \\ y' = \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \eta \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

这就是我们要求的仿射变换公式,显然它是非退化的线性变换.

反之,给定非退化线性变换式(1.14),取点 $O'(\xi,\eta)$ 为原点,取 $e'_1(\alpha_{11}, \alpha_{12})$、$e'_2(\alpha_{21}, \alpha_{22})$,则平面上由坐标系$\{\boldsymbol{O};\ e_1,\ e_2\}$ 变为坐标系$\{\boldsymbol{O'};\ e'_1,\ e'_2\}$ 的仿射变换的公式就是式(1.14).

由此我们得到:

定理 1.4.1 平面上的仿射变换公式是非退化的线性变换,反之非退化的线性变换式可以看作一个平面上的仿射变换.

定义 1.4.1 平面上点之间的一个线性变换

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23} \end{cases} \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{1.15}$$

叫做仿射变换.

注意:平面上的仿射坐标变换公式(1.2) 与平面上的仿射变换公式(1.14) 都是平面上的非退化的线性变换. 反之,给定平面上一个非退化的线性变换,它表示仿射坐标变换还是仿射变换呢?都有可能. 即如果变量$(x,\ y)$和$(x',\ y')$ 表示平面上同一点在不同坐标系中的坐标时,则给定线性变换是仿射坐标变换公式;如果变量$(x,\ y)$ 和$(x',\ y')$ 分别表示同一坐标系中不同点的坐标时,它表示仿射变换公式.

例 1 求使三点 $O(0,0)$、$E(1,1)$、$P(1,-1)$ 顺次变到点 $O'(2,3)$、$E'(2,5)$、$P'(3,-7)$ 的仿射变换.

解 设所求仿射变换为$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}. \end{cases}$

于是有$\begin{cases} \alpha_{13} = 2, \\ \alpha_{23} = 3, \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 2, \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 5, \\ \alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} = 3, \\ \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{23} = -7. \end{cases}$

解此方程组,得

$$\alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 3, \alpha_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_{12} = -\frac{1}{2}, \alpha_{21} = -4, \alpha_{22} = 6.$$

故所求的仿射变换为$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 2, \\ y' = -4x + 6y + 3. \end{cases}$

例 2 试确定仿射变换，使 y 轴和 x 轴的象分别为直线 $x+y+1=0$ 和 $x-y-1=0$，且点(1,1)的象为原点.

解 由式(1.15)可解出 x、y，不妨设为 $\begin{cases} x = a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}, \\ y = a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23}. \end{cases}$ 于是有

$x=0$ 的象为 $a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13} = 0$.

$y=0$ 的象为 $a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} = 0$,

但由题设，$x=0$ 对应直线 $x'+y'+1=0$，$y=0$ 对应直线 $x'-y'-1=0$，所以

$$a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13} = 0 \text{ 与 } x'+y'+1=0$$

表示同一直线，即

$$\frac{a'_{11}}{1} = \frac{a'_{12}}{1} = \frac{a'_{13}}{1} = h.$$

因此，有

$$x = hx' + hy' + h. \qquad (1)$$

同理，由于 $a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} = 0$ 与 $x'-y'-1=0$ 表示同一直线，所以，有

$$y = kx' - ky' - k. \qquad (2)$$

又因为(1,1)的象为(0,0)，所以 $h=1$，$k=-1$. 代入式(1)、(2)得所求变换式的逆变换式为

$$\begin{cases} x = x' + y' + 1, \\ y = -x' + y' + 1. \end{cases}$$

解出 x'、y'，得所求变换式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y, \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 1. \end{cases}$$

例 3 求一仿射变换，将椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

变成一个圆.

解 设 $x' = \dfrac{x}{a}$，$y' = \dfrac{y}{b}$，则变换