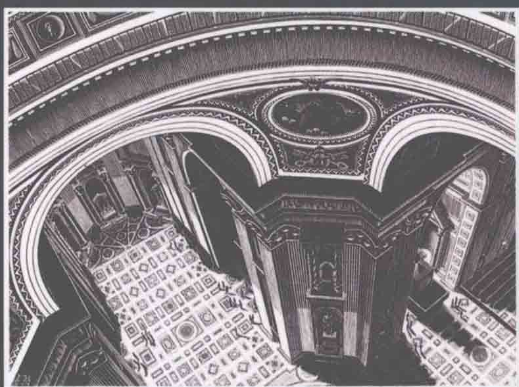
俄罗斯数学精品译丛

Function Problems Collection in Russia

俄罗斯函数问题集



- 刘培杰数学工作室 组织编译
- 谢彦麟 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

FUNCTION PROBLEMS COLLECTION IN RUSSIA

俄罗斯

函数问题集

● 刘培杰数学工作室 组织编译
● 谢彦麟 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书由两部分组成，第一部分为函数基本问题及其解法；第二部分为入学试题的变形（2003 年至 2006 年）.

本书适合大学生、中学生及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯函数问题集/谢彦麟编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.12

ISBN 978－7－5603－3156－0

Ⅰ.①俄…　Ⅱ.①柯…②茨…③谢…　Ⅲ.①函数-研究　Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 265297 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 18.5　字数 352 千字
版　　次　2011 年 3 月第 1 版　2011 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－3156－0
定　　价　38.00 元

◎目录

1 基本问题及其解法

1.1 带参数的最简单方程及不等式

例1 （国家统一考试,2003,No. B4）[①] 对哪个最大的负数 a 使函数

$$y=\sin\left(24x+\frac{a\pi}{100}\right)$$

在点 $x_0=\pi$ 有最大值?

解 函数 $\sin t$ 在形如 $\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in\mathbf{Z}$ 的点达到最大值,因此,为了原来的函数 y 在点 $x_0=\pi$ 达到最大值,只要存在数 $n\in\mathbf{Z}$,使

$$24\pi+\frac{a\pi}{100}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{100}=\frac{1}{2}+2m,m\in\mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow a=50+200m,m\in\mathbf{Z}$$

只要再在形如

$$a=50+200m,m\in\mathbf{Z}$$

的数中选最大的负数即可.这个数是当 $m=-1$ 时得出的 -150,因为如果 $m\geqslant 0$,则

$$50+200m\geqslant 150$$

答:$a=-150$.

例2 对所有 a 解不等式

$$\frac{x-a}{x-a-1}\leqslant 0$$

解 对任何固定值 a,这是一般有理不等式,因此可用区间法.为此在数轴上安置数 a 与 $a+1$,在其上分子与分母分别为0,显然对所有 a,$a+1$ 大于 a.因

① 由原书序言知,其中各系(及第1部分中的例题、习题所标示者)均属莫斯科大学.

此得到如图 1.1 所示的点的位置.

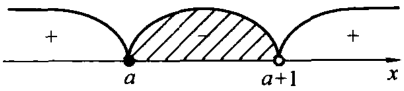


图 1.1　对任何 a,x 的取值范围

答:$x \in [a,a+1)$ 对任何 a.

再考察一个例子.

例 3　对所有 a 解不等式

$$\frac{x-1}{x-a} > 0$$

解　同上用区间法. 但这时遇到一点的困难. 我们不知道数 1 与 a 的位置. a 可以小于 1,也可以大于或等于 1. 这意味着我们应考察这三种情况.

(1) 设 $a < 1$,这时得到图 1.2 所示的点的位置.

用区间法得出部分答案:如果 $a < 1$,则 $x \in (-\infty,a) \cup (1,+\infty)$.

图 1.2　$a < 1$ 时 x 的取值范围

(2) 设 $a=1$. 这时得到不等式 $\frac{x-1}{x-1} > 0$,当 $x \neq 1$,它等价于正确的不等式 $1 > 0$. 它的解是原不等式的整个定义域,即 $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

(3) 设 $a > 1$,这时点的位置如图 1.3 所示.

图 1.3　$a > 1$ 的 x 的取值范围

用区间法得到部分答案.

如果 $a > 1$,则 $x \in (-\infty,1) \cup (a,+\infty)$.

综合上述部分答案得到最终结果.

答:如果 $a < 1$,则 $x \in (-\infty,a) \cup (1,+\infty)$;如果 $a=1$,则 $x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$;如果 $a > 1$,则 $x \in (-\infty,1) \cup (a,+\infty)$.

例 4　对所有 a 解不等式

$$\frac{x}{x+a} > 1$$

解　变换不等式为

$$\frac{x}{x+a} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-x-a}{x+a} > 0 \Leftrightarrow \frac{-a}{x+a} > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x+a} < 0$$

当 $a>0$ 时,这不等式等价于不等式 $x+a<0$,则 $x<-a$,其解为 $x\in(-\infty,-a)$.

当 $a=0$ 时,得出不成立的不等式 $\frac{0}{x}<0,0<0$,由此可知无解.

当 $a<0$ 这不等式等价于 $x+a>0$,即 $x>-a$,有解 $x\in(-a,+\infty)$.

答:如果 $a<0$,则 $x\in(-a,+\infty)$;如果 $a=\infty$,则 $x\in\varnothing$;如果 $a>0$,则 $x\in(-\infty,-a)$.

再考察一道简单例题.

例 5 对所有 a 解不等式

$$\frac{a}{x+a}>1$$

解 变换这个不等式为

$$\frac{a}{x+a}-1>0\Leftrightarrow\frac{a-x-a}{x+a}>0\Leftrightarrow\frac{-x}{x+a}>0\Leftrightarrow\frac{x}{x+a}<0$$

完全类似于解例 3,即在数轴上数 $-a$ 与 0 的位置可能有三种情况.

(1) 设 $a>0$,这时 $-a<0$,如图 1.4 所示安置各点,我们得到解 $x\in(-a,0)$.

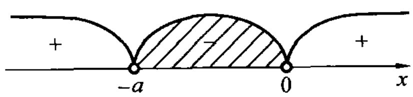


图 1.4 $a>0$ 时 x 的取值范围

(2) 设 $a=0$,这时得 $\frac{x}{x}<0(x\neq0)$,即 $1<0$,这个不等式无解.

(3) 如果 $a<0$,则数 $-a>0$,如图 1.5 所示安置各数,由此得 $x\in(0,-a)$.

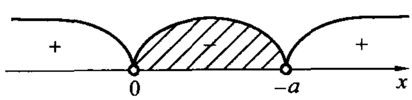


图 1.5 $a<0$ 时 x 的取值范围

综合上述部分答案,得到最后结果.

答:如果 $a<0$,则 $x\in(0,-a)$;如果 $a=0$,则 $x\in\varnothing$;如果 $a>0$,则 $x\in(-a,0)$.

例 6 对所有 a 解不等式

$$\frac{(x-1)(x-a)}{x-\frac{a+1}{2}}>0$$

解 注意,对任何固定的 a 值,这是一般有理不等式,用区间法解之.但是

试图按常规使用这种方法时我们遇到困难，问题在于，不知道怎样在数轴上安置点 $1, a, \frac{a+1}{2}$. 怎样解决这一困难？考察各种可能情况. 为此逐次比较数 1 与 a, 1 与 $\frac{a+1}{2}$, a 与 $\frac{a+1}{2}$，得到①

$$a \vee 1, \quad \frac{a+1}{2} \vee 1, \quad a \vee \frac{a+1}{2}$$

$$a \vee 1, \quad a+1 \vee 2, \quad 2a \vee a+1$$

$$a \vee 1, \quad a \vee 1, \quad a \vee 1$$

由此得，当 $a < 1$，成立两重不等式

$$a < \frac{a+1}{2} < 1$$

当 $a = 1$ 时，$1, a, a+1$ 相等；当 $a > 1$ 时，成立两重不等式

$$1 < \frac{a+1}{2} < a$$

故有三种情形.

(1) 设 $a < 1$，这时 $1 > \frac{a+1}{2} > a$. 采用区间法（图 1.6），得出部分答案：如果 $a < 1$，则 $x \in (a, \frac{a+1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

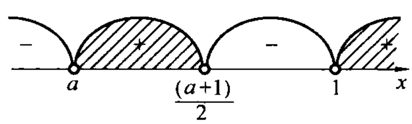


图 1.6　$a < 1$ 时 x 的取值范围

(2) 设 $a = 1$，这时 $a = \frac{a+1}{2} = 1$，用区间法（图 1.7）得出部分答案：如果 $a = 1$，则 $x \in (1, +\infty)$.

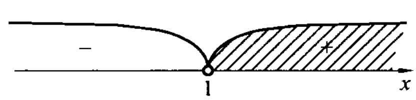


图 1.7　$a = 1$ 时 x 的取值范围

(3) 设 $a > 1$，这时 $a > \frac{a+1}{2} > 1$. 采用区间法（图 1.8）得出部分答案，即

① “$\vee$”表示比较两边大小，从 $\frac{a+1}{2} \vee 1$ 到下行 $a+1 \vee 2$ 表示二者等价. —— 译者注

如果 $a>1$,则 $x\in\left(1,\frac{a+1}{2}\right)\cup(a,+\infty)$.

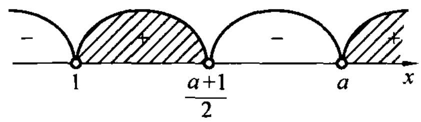


图 1.8　$a>1$ 时 x 的取值范围

答:如果 $a<1$,则 $x\in\left(a,\frac{a+1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$;如果 $a=1$,则 $x\in(1,+\infty)$;如果 $a>1$,则 $x\in\left(1,\frac{a+1}{2}\right)\cup(a,+\infty)$.

例 7　(物理系(七月),1997,No.7)　对任何值 a 解不等式

$$(a+4)\sqrt{5-x}>a+3$$

解　求出容许值域:$5-x\geqslant 0$. 然后变换不等式. 为了方便,按数 $a+4$ 分为两部分. 这时可能的情形为 $a+4<0$,$a+4>0$ 与 $a+4=0$.

(1) 设 $a+4=0$,这时

$$0\cdot\sqrt{5-x}>-1\Leftrightarrow 0>-1$$

最后的不等式在整个容许值域成立. 得到部分答案:如果 $a=-4$,则 $x\leqslant 5$.

(2) 设 $a+4<0$,这时原不等式等价于

$$\sqrt{5-x}<\frac{a+3}{a+4}$$

据 $\frac{a+3}{a+4}>0$,当 $a<-4$(图 1.9),得

图 1.9　x 的取值范围

$$\sqrt{5-x}<\frac{a+3}{a+4}\Leftrightarrow 5-x<\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2\Leftrightarrow 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2<x$$

再考虑到容许值域得部分答案:如果 $a<-4$,则

$$x\in\left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2,5\right]$$

(3) 设 $a+4>0$,这时原不等式等价于

$$\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4}$$

据表示式 $\frac{a+3}{a+4}$ 为负数,$a\in(-4,-3)$;为 0,$a=-3$;为正数,$a>-3$(图 1.9),考察两种情形.

① 设 $a \geqslant -3$，这时$\dfrac{a+3}{a+4} \geqslant 0$（图 1.9），因此原不等式可变换为

$$\sqrt{5-x} > \frac{a+3}{a+4} \Leftrightarrow 5-x > \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 \Leftrightarrow 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 > x$$

得出的所有值在容许值域. 因此得到部分答案：如果 $a \geqslant -3$，则 $x < 5 - \left(\dfrac{a+3}{a+4}\right)^2$.

② 设$a \in (-4, -3)$，这时$\dfrac{a+3}{a+4} < 0$（图1.9），因此不等式$\sqrt{5-x} > \dfrac{a+3}{a+4}$被整个容许值域满足. 因此得到部分答案：如果 $a \in (-4, -3)$，则 $x \leqslant 5$.

收集全部所得结果得答案.

答：如果 $a < -4$，则 $x \in \left[5 - \left(\dfrac{a+3}{a+4}\right)^2, 5\right]$；如果 $a \in (-4, -3)$，则 $x \leqslant 5$；如果 $a \geqslant -3$，则 $x < 5 - \left(\dfrac{a+3}{a+4}\right)^2$.

习题 1.1

习题 1（化学系（七月），2003，No.1）　求出参数 a 的所有值，使得不等式

$$\frac{a}{x-a} > 0$$

的解集包含点 $x = 1$.

习题 2（国家统一考试，2003，No. B4）　对哪个最小正数 b，使函数

$$y = \sin\left(20x + \frac{b\pi}{150}\right)$$

在点 $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 有最小值？

习题 3（语言学系（七月），2002，No.1）　对参数 b 有哪些值，方程

$$b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$$

有无穷多个根？

习题 4（物理系（三月），1977，No.7）　求出所有的 a 值，使得不等式

$$\log_a(x^2+2) > 1$$

被所有 x 值满足.

习题 5（心理学系，1994，No.2）　已知 $x = 1, y = -1$ 为方程组

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\tan\dfrac{1\,111\pi}{6} \\ ax^2 + by^2 = 2 \end{cases}$$

的一解,求出这个方程组的所有解.

习题 6(化学系(三月),2003,No.1)　求出参数 a 的所有值,使得方程

$$ax^2+(a+1)x+1=0$$

有唯一解.

习题 7(化学系(食品分部)(七月),2003,No.4(7))　对参数 C 的所有值解方程

$$4^x+C\cdot 25^x=3\cdot 10^x$$

习题 8(土壤学系(七月),1999,No.7)　对参数 $b\geqslant 0$ 的每个值,解(对 x)不等式

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\geqslant b$$

习题 9(物理系(七月),1999,No.7)　对 a 的任何容许值解不等式

$$\log_{2a}(\log_3 x^2)>1$$

又求出哪些 a 值,使得表示不属于不等式解的点 x 的集区间的长等于 6.

习题 10(土壤学系(七月),1997,No.6)　对参数 c 的每个值解不等式

$$\sqrt{c^2-x^2}\geqslant 2-c$$

习题 11(物理系(七月),1997,No.7)　对任何值 a 解不等式

$$a-2<(a-1)\sqrt{x-1}$$

习题 12(土壤学系(七月),2005,No.5(6))　对参数 p 的哪些值,多项式 $(px^2-7)^{18}$ 的系数和与其自由项的比最少①?

习题 13(物理系(三月),2003,No.7)　对 b 的每个容许值解不等式

$$\sqrt{7+\log_b x^2}+(\log_b|x|)(1+2\log_x b)>0$$

习题 14(语言学系(四月),2002,No.6)　对参数 a 的每个值解方程

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$$

习题 15(物理系(七月),2002,No.6)　对 a 的每个值解不等式

$$\log_{1/9}(x^2-6x-a^2-5a+12)<-1$$

又求出哪些 a 值,可使数轴上表示不属于这个不等式的解的 x 的集合所成的闭区间的长小于 $2\sqrt{3}$.

习题 16(化学系(四月)②,2006,No.6(6))　对参数 a 的所有值解方程

$$2^{\frac{ax+3}{x^2+3}}+2^{\frac{4x^2-ax+9}{x^2+3}}=10$$

---

① 自由项即常数项.——译者注

② 这个刊载于下列系:化学系,生物系,地理系,物质科学系与心理学系.——译者注

习题 17(地理系(三月),2002,No. 2)　求出参数 a 的所有值,使得对其每个值,方程

$$\log_{a-6.5}(x^2+1)=\log_{a-6.5}((a-5)x)$$

有两个不同的解.

习题 18(土壤学系(七月),2002,No. 7)　求出每个值 a,使对其每个值,方程

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0$$

有唯一解.

习题 19(物理系(七月),2000,No. 7)　对 p 的哪些值,方程

$$4(x-\sqrt{p\cdot 7^p})x+p+7(7^p-1)=0$$

有根? 又对不同的 p 值,根有怎样的符号?

习题 20(物理系(三月),2000,No. 7)　对 b 的哪些值,方程

$$25^x-(2b+5)5^{x-1/x}+10b\cdot 5^{-2/x}=0$$

正好有两个解?

习题 21(国家统一考试(公务),2004,No. C4)　求出参数 a 的所有值,使不等式

$$x(x-2)\leqslant(a+1)(|x-1|-1)$$

包含某个无穷递缩几何数列的所有项,这个数列的首项等于 1.7,且公比为正数.

习题 22(地质系(三月),2000,No. 7)　求出所有 a 值,使得不等式

$$x^2+a\leqslant 0$$

的每个解适合不等式

$$(x+2a)\sqrt{3-x}\leqslant 0$$

习题 23(化学系,1987,No. 5)　求出参数 p 的所有值,使得对其每个值不等式

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

的解集不包含不等式 $x^2\leqslant 1$ 的每个解.

习题 24(地质系(三月),1995,No. 7)　设

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-3,g(x)=\sqrt{x}-a$$

其中 a 为参数,对 x 解不等式

$$f(g(x))\leqslant 0$$

习题 25(亚非国家研究部(七月),2001,No.6)　求参数 a 的所有值,使得对其每个值方程组

$$\begin{cases}x+a(y+1)=2a\\x^3+a(2y^3+1)=ay^3+2a\end{cases}$$

有不多于两个解.

习题 26(力学 - 数学系(五月),2002,No.4)　求参数 a 的所有值,使得对其每个值方程

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

至少有两个根,且这时其所有根之积不小于 0.01.

习题27(心理学系,1992,No.4)　求参数a与b的所有值,使得可找出方程

$$x^3-5x^2+7x=a$$

两个不同的根也是方程 $x^3-8x+b=0$ 的根.

习题 28(力学 - 数学系,1985,No.4)　从 a 的三个值 -1.2, -0.67, -0.66 中求所有值,使得对每个值方程

$$(2^{a+4}+15(x+a))(1+2\cos(\pi(a+\frac{x}{2})))=0$$

正好有一个解适合条件 $0\leqslant x\leqslant 1$.

习题 29(语言学系,2000,No.5(6))　求所有 a,使得对每个 a 方程

$$(2a-1)x^2+6ax+1=0 \text{ 与 } ax^2-x+1=0$$

有公共根.

习题 30(心理学系,1990,No.5) 已知对任何 $a>0$,方程

$$2x^3+x^2-x-a-1=0$$

有唯一正根 x_0(依赖 a),求所有 $a>0$,使

$$12{x_0}^3-7x_0>6a+1$$

答案 1.1

1. $a\in(0,1)$.
2. $b=125$.
3. $b=-\sqrt{2}$.
4. $a\in(1,2)$.
5. $(1,-1),(-\frac{1}{5},\frac{7}{5})$.

6. $a=0,1$.

7. $c\in[1,\frac{5}{2})\cup[4,+\infty)$.

8. 如果 $b\leqslant 1$,则 $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$;如果 $-1<b\leqslant 0$,则 $x\in(-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}},-1]\cup[1,+\infty)$.

9. (1) 如果 $a\in(0,\frac{1}{2})$,则 $x\in(-3^a,-1)\cup(1,3^a)$;如果 $a>\frac{1}{2}$,则 $x\in(-\infty,-3^a)\cup(3^a,+\infty)$;$a=1$. (2)

10. 当 $c\in(-\infty,1)$ 无解;当 $c\in[1,2)$,则 $x\in[-2\sqrt{c-1},2\sqrt{c-1}]$;当 $c\in[2,+\infty)$,则 $x\in[-c,c]$.

11. 如果 $a<1$,则 $x\in\left[-1,\left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2-1\right)$;如果 $a\in[1,2)$,则 $x\geqslant 1$;如果 $a\geqslant 2$,则 $x>\left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2-1$.

12. $p=7$. 提示:任一多项式的系数和等于它在点 $x=1$ 的值.

13. 如果 $b\in(0,1)$,则 $x\in(0,1)\cup(1,b^{-3})$;如果 $b\in(1,+\infty)$,则 $x\in(b^{-3},1)\cup(1,+\infty)$.

14. 如果 $a\in(0,1]$,则 $x=\pm\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2$;对其他 x 无解.

15. (1) 如果 $a\in(-3,-2)$,则 $x\in\mathbf{R}$;如果 $a\in(-\infty,-2]\cup[-3,+\infty)$,则 $x\in(-\infty,3-\sqrt{a^2+5a+6})\cup(3+\sqrt{a^2+5a+6},+\infty)$;(2) $a\in(\frac{-5-\sqrt{13}}{2},-3)\cup[-2,\frac{-5+\sqrt{13}}{2})$.

16. $x=0,a$ 对任何 a;$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-72}}{6}$ 对 $|a|\geqslant 6\sqrt{2}$.

17. $a\in(7,7.5)\cup(7.5,+\infty)$.

18. $a\in(\frac{1}{15},\frac{1}{8})\cup(\frac{1}{8},\frac{4}{15})\cup\{\frac{1}{2}\}\cup[1,4)$.

19. 当 $p=0$,有一个根,$x=0$;当 $p=7$,有一个根,$x=\frac{7^4}{2}$;当 $p>7$,两个正根.

20. $b\in(0,\frac{1}{50})\cup(\frac{25}{2},+\infty)$.

21. $(-\infty,0.7]$.

22. $a=0,a\in[-9,-\frac{1}{4}]$.

23. $p\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.

24. 如果 $a \in (-\infty, -5)$，则无解；如果 $a=-5$，则 $x=0$；如果 $a \in (-5,1)$，则 $x \in [0,(a+5)^2]$；如果 $a \in [1,+\infty)$，则 $x \in [(a-1)^2,(a+5)^2]$.

25. $a \in \{-1\} \cup [-\frac{1}{2},0) \cup (0,\frac{1}{2}] \cup \{1\}$.

26. $a \in [-\frac{9}{10},0) \cup (2,\frac{9}{4}) \cup (\frac{9}{4},\frac{19}{8})$.

27. $a=2,b=3$.

28. $a=-\frac{1}{2},a=-0.67$.

29. $a=-\frac{3}{4},a=0,a=\frac{2}{9}$.

30. $a \in (0,\frac{1}{54})$.

1.2 带绝对值的最简单问题

在带绝对值的问题中常用不等式.

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, |x|-|y| \leqslant |x-y|, x,y \in \mathbf{R}$$

例 8 对所有 a 解不等式

$$|x+a|>a$$

解 注意，正如 1.1 节一样，在完全标准的问题中要进行参数 a 在任何数中的改变，因此可以对绝对值采用区间法.

首先注意，当 $a<0$，这不等式显然对任何 a 成立（因为绝对值数，故为非负），因此得到部分答案：如果 $a<0$，则

$$x \in (-\infty,+\infty)$$

如果 $a=0$，则

$$x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

如果 $a>0$，则应考察两个情形：$x<-a$ 与 $x \geqslant -a$.

对于前者，原不等式等价于下列不等式

$$-x-a>a \Leftrightarrow -x>2a \Leftrightarrow x<-2a$$

因 $a>0$，$-2a<-a$，故

$$x \in (-\infty,-2a) \subset (-\infty,-a)$$

这些域的交是 $(-\infty,-2a)$.

对于后者，即对 $x+a \geqslant 0$，得

$$x+a>a, x>0, x\in(0,+\infty)$$

因 $-a<0$,集$[-a,+\infty)$包含集$(0,+\infty)$,它们的交等于$(0,+\infty)$. 因此当 $a>0$,不等式的解是$(-\infty,-2a)\cup(0,+\infty)$.

统述部分答案:如果 $a<0$,则

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

如果 $a=0$,则

$$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

如果 $a>0$,则

$$x\in(-\infty,-2a)\cup(0,+\infty)$$

注意,如果 $a=0$,则 $-2a=0$,因此后两情形答案可以统述为:如果 $a\geqslant 0$,则

$$x\in(-\infty,-2a)\cup(0,+\infty)$$

答:如果 $a<0$,则 $x\in(-\infty,+\infty)$;如果 $a\geqslant 0$,则

$$x\in(-\infty,-2a)\cup(0,+\infty)$$

例9 对所有 a 解不等式

$$|x+a|<x$$

解 考察两个情况.

(1) 设 $x+a<0$,这时得到

$$-x-a<x\Leftrightarrow 2x>-a\Leftrightarrow x>-\frac{a}{2}$$

所考察的域给出条件 $x<-a$. 部分答案可作为不等式组

$$\begin{cases}x>-\dfrac{a}{2}\\ x<-a\end{cases}$$

的解而得. 如果 $a>0$,则 $-a<-\dfrac{a}{2}$,这个不等式组无解.

如果 $a=0$,则得到不等式组

$$\begin{cases}x>0\\ x<0\end{cases}$$

显然无解.

如果 $a<0$,则 $-a>-\dfrac{a}{2}$,得 $x\in\left(-\dfrac{a}{2},-a\right)$.

故如果 $a<0$,则 $x\in\left(-\dfrac{a}{2},-a\right)$;如果 $a\geqslant 0$,则 $x\in\varnothing$.

(2) 设 $x+a\geqslant 0$,这时得到不等式 $x+a<x$,$a<0$. 当 $a<0$,它在所考察的域(即 $x\geqslant -a$,$x\in[-a,+\infty)$)内成立;当 $a\geqslant 0$,这不等式不成立,无解.