高等师范学校教材

高观点下的中学数学

分析学

Analytics

高 夯 编著

- 数集
- 函数
- 极值问题
- 三角函数
- 集合与映射
- 指数函数与对数函数

高等教育出版社

高观点下的中学数学

分　析　学

高　夯　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

分析学/高夯主编.—北京:高等教育出版社,2001.2
ISBN 7-04-008898-3

Ⅰ.分… Ⅱ.高… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 02782 号

责任编辑 郭立伟 **责任印制** 蔡敏燕
封面设计 乐嘉敏 **版式设计** 杨歆颖

书 名	高观点下的中学数学——分析学			
主 编	高 夯			
出版发行	高等教育出版社			
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009	
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048	
	021-62587650		021-62551530	
网 址	http://www.hep.edu.cn			
排 版	南京理工排版校对公司			
印 刷	商务印书馆上海印刷股份有限公司			
开 本	850×1168 1/32	版 次	2001 年 3 月第 1 版	
印 张	8.75	印 次	2002 年 9 月第 2 次	
字 数	220 000	定 价	11.80 元	

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

《高观点下的中学数学》丛书
编 委 会

前 言

分析、代数、几何是数学的核心内容. 无论是远古时期，还是近现代，数学这棵根深叶茂的大树就是以分析、代数、几何为其主干. 一方面，随着时间的推移，现代数学的内容在不断地发展，另一方面，现代数学的思想又在不断地渗透到经典数学的研究中. 如何用现代数学的知识来充实自己，用高等数学的观点去理解初等数学的内容，从而提高自己的数学素养，并进一步指导中学数学的教学工作，这是每一位高等师范院校数学系学生与中学数学教师面临的课题. 只有很好地解决了这个问题，才能在现在或将来的中学数学教学中，真正做到居高临下，游刃有余.

1997 年，东北师范大学数学系承担了教育部的“高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”项目. 与此同时，东北师范大学推出了“优师工程”. 在此项目与工程的推动下，我们重新修订了我系的课程设置方案. 在新的培养方案中，确定了“两个阶段，1 + 3 个模块”的课程结构体系，即将学生四年的学习过程分为必修课学习阶段与选修课学习阶段；课程设置方案分为一个必修课的大模块，三个选修课的小模块. 三个选修课的小模块之一是中学数学教育系列课程模块. 这套丛书中的“分析学”、“代数学”、“几何学”就是为这个模块准备的系列教材.

2000 年，教育部又推出了“园丁工程”.这一工程旨在对本科毕业后的中学教师进行继续教育.东北师大数学系先后举办过中学数学教师继续教育培训班.在这些班上，我们开设了“分析专题研究”、“代数专题研究”、“几何专题研究”等课程.

这本分析学，是在几年来相应课程的讲稿基础上整理而成.史宁中教授撰文《论数以及数字符号的产生》做为本书的附录，使本书增色不少；首都师范大学王尚志教授、大连理工大学卢玉峰教授、东北师范大学许凤教授都提出过许多宝贵意见，使本书渐趋完善；在本书的编写过程中，东北师大数学系给予了大力的支持，特别是系党总支书记许秉东副教授给予了不断的鼓励，使得此书与读者尽快见面；高等教育出版社的郭立伟编审为本书的出版付出了辛勤的劳动.在这里，对于给予本书支持与帮助的各位同志一并表示感谢.

我们不能说这是一套完美的教材，但我们相信大多数读者对这套丛书会有新鲜的感觉.阅读这套丛书，不需要高深的现代数学知识，但需要有一定的数学修养.

应该说，这套丛书是在没有成型的教材可模仿，在摸索的过程中编写而成的.由于编者水平所限，不妥之处一定不少，希望读者批评指正.

编 者

目　录

第一章　集合与映射

集合论是德国数学家康托于19世纪末创立的，它在数学中占有独特的地位. 由于集合论的语言简洁，具有很强的概括性，它的基本概念已渗透到数学的所有领域. 因此集合论已成为全部数学的基础. 本章主要叙述集合论的初步知识，并把它作为初等数学理论研究的基础.

§1　集合及其运算

一、集合的概念

集合的概念是数学的一个基本的原始概念，不能用另外的概念定义它，只能给予一种描述.

集合是指具有某种共同特性的事物的全体. 例如，“正在这里听课的全体学生”就是一个集合；“全体中国人”也是一个集合.

集合是由它的成员构成的. 通常称集合的成员为元素或点. 我们常用符号$\{x|$关于x的命题$\}$表示满足大括号中的命题的所有成员x的集合.

一般用大写字母A，B，C，…来表示集合；用小写字母a，b，c，…表示集合的元素.

设A是一集合，a是一成员. 如果a是A的成员，记作$a \in A$，读作a属于A；如果a不是A的成员，则记作$a \overline{\in} A$，读作a不属于A.

显然，对于任一集合A和任一成员a，$a \in A$和$a \overline{\in} A$这两者必有且仅有一个成立.

如果集合A与集合B的成员完全相同，则称集合A与集合B

相等，记作 $A=B$，读作 A 等于 B；反之，若集合 A 与集合 B 的成员不完全相同，则称 A 与 B 不相等，记作 $A\neq B$，读作 A 不等于 B.

显然，$A=B$ 当且仅当 $\forall\, x\in A$，则 $x\in B$，且 $\forall\, x\in B$，则 $x\in A$；$A\neq B$ 当且仅当 $\exists\, x\in A$ 但 $x\overline{\in} B$，或 $\exists\, x\in B$，但 $x\overline{\in} A$. ①

如果集合 A 的每一成员都是集合 B 的成员，即若 $\forall\, x\in A$，则 $x\in B$，我们记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读作 A 含于 B 或 B 包含 A.

显然，$A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

集合也可以没有成员，这种没有成员的集合我们称之为空集，记作 $\varnothing$.

按照集合的包含定义，可以证明空集包含于任一集合中，且空集是唯一的.

设 A,B 为两集合，若 $A\subset B$，我们则称 A 为 B 的子集；若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，我们称 A 为 B 的真子集.

如果 A 是一个集合，我们常用 2^A 表示所有 A 的子集构成的集簇. 例如，$A=\{a, b, c\}$，则 $2^A=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

二、集合的运算

在这里，我们定义集合的并、交、补.

定义 1.1 对于任意两个集合 A 与 B：

集合 $\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$，读作 A 并 B.

集合 $\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B.

若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交；反之，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B 相交.

---

① 符号"$\forall$"表示"对于任意的"，符号"$\exists$"表示"存在".

集合 $\{x|x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\}$ 称为 A 与 B 的差集，或称为 B 相对 A 而言的补集，记作 $A-B$，读为 A 差 B 或 A 减去 B.

关于集合的并、交、补三种运算，如下的基本规律成立：

定理 1.1 若 A、B、C 为集合，则

(1) 等幂律成立，即

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A;$$

(2) 交换律成立，即

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$$

(3) 结合律成立，即

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(4) 分配律成立，即

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$

(5) De Morgan 律成立，即

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

证明 这里我们只证明两个等式. 先来证明(3)中的第二式.

设 $x\in(A\cap B)\cap C$，按定义，$x\in A\cap B$ 且 $x\in C$，也就是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$，由此得 $x\in A$ 且 $x\in B\cap C$，由交集的定义，$x\in A\cap(B\cap C)$，这就证明了 $(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$. 同理可证 $(A\cap B)\cap C\supset A\cap(B\cap C)$. 两者合起来即得 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

再来证明(5)中的前一个等式.

设 $x\in A-(B\cup C)$，即 $x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\cup C$，也就是 $x\in A$

但 $x \overline{\in} B$, $x \overline{\in} C$, 由此得 $x \in A - B$ 且 $x \in A - C$, 由交集定义, $x \in (A - B) \cap (A - C)$. 按照包含的定义, $A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C)$. 同样方法可以证明 $A - (B \cup C) \supset (A - B) \cap (A - C)$. 两者合起来便有 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

其余各款的证明都是类似的,留给读者自行完成.

§2 关系与映射

一、二元关系

我们在数学的学习中,已经熟悉了一些关系,如直线的平行关系、垂直关系,实数的相等关系、大小关系,集合的包含关系,…,这些表面看起来似乎无关的内容,本质上却有其共性,可以用统一的数学语言来刻划.

定义 2.1 设 A, B 为任意两个集合, 集合 $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的笛卡尔积, 记作 $A \times B$, 读为 A 乘 B. 其中 (a, b) 为有次序的元素偶, a 称为 (a, b) 的第一个坐标, b 称为 (a, b) 的第二个坐标.

特别地,集合 A 与自身的笛卡尔积 $A \times A$ 常记作 A^2. 显然,两个集合的笛卡尔积与两个集合的次序有关. 一般说来,只要 $A \neq B$, 则有 $A \times B \neq B \times A$ (除非 A 与 B 中至少有一个是空集). 这就是说,交换律不成立.

定义 2.2 设 A, B 是非空集合, $A \times B$ 中的每一子集 R 均称为从 A 到 B 中的关系. 若 $(a, b) \in R$, 则称 a 与 b 是 R-相关的,记作 aRb.

集合 $\{a |$ 存在 $b \in B$, 使 $aRb\}$ $(\subset A)$ 称为关系 R 的定义域,记作 $\mathrm{Dom}(R)$.

集合 $\{b |$ 存在 $a \in A$, 使 $aRb\}$ $(\subset B)$ 称为关系 R 的值域,记作

Ran(R).

若 $\widetilde{A}\subset A$，集合 $\{b\mid$ 存在 $a\in\widetilde{A}$，使得 $aRb\}(\subset B)$ 称为集合 $\widetilde{A}$ 对于关系 R 而言的象集，记作 $R(\widetilde{A})$.

现举两个最特殊也最简单的关系的例子.

例 1 设 A, B 是两个非空的集合，由于 $A\times B\subset A\times B$，故 $A\times B$ 为从 A 到 B 的一个关系. 易见，$\mathrm{Dom}(A\times B)=A$, $\mathrm{Ran}(A\times B)=B$.

例 2 设 A, B 是两个集合，由于 $\varnothing\subset A\times B$，所以 $\varnothing$ 为从 A 到 B 中的一个关系. 因为对于任意的 $a\in A$, $b\in B$, $(a,b)\overline{\in}\varnothing$，故 a 与 b 不是 $\varnothing$-相关的. 此即表明 $\mathrm{Dom}(\varnothing)=\mathrm{Ran}(\varnothing)=\varnothing$.

后面，我们将专门研究一些特殊的关系.

定义 2.3 设 $R\subset A\times B$，则集合 $\{(b,a)\mid aRb\}$ 为 $B\times A$ 的子集，即为从 B 到 A 中的关系，称为 R 的逆，记作 R^{-1}. 此时，对于 $\widetilde{B}\subset B$, $R^{-1}(\widetilde{B})\subset A$ 为集合 $\widetilde{B}$ 的 R^{-1}-象，也常称之为 $\widetilde{B}$（对于关系 R 而言）的原象.

定义 2.4 设 R 为从 A 到 B 中的关系（即 $R\subset A\times B$），S 为从 B 到 C 中的关系（即 $S\subset B\times C$）. 集合 $\{(a,c)\mid$ 存在 $b\in B$，使得 aRb, $bSc\}$ 为 $A\times C$ 的子集，即为从 A 到 C 中的关系，称为关系 R 与关系 S 的复合或积，记作 $S\circ R$.

定理 2.1 设 A, B, C, D 为集合；$R\subset A\times B$, $S\subset B\times C$, $T\subset C\times D$，则有：

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$;

(3) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

证明 (1) $\forall\ (a,b)\in(R^{-1})^{-1}\Leftrightarrow b(R^{-1})a\Leftrightarrow aRb\Leftrightarrow(a,b)\in R$. 这就表明 $(R^{-1})^{-1}=R$. ①

---

① 符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”.

(2) $\forall\ (c, a) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow c(S \circ R)^{-1}a \Leftrightarrow a(S \circ R)c \Leftrightarrow \exists\ b \in B$，使 aRb，bSc，即 $cS^{-1}b$，$bR^{-1}a \Leftrightarrow cR^{-1} \circ S^{-1}a \Leftrightarrow (c, a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$，即 $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(3) 证明相似于(1)与(2)的证明，留给读者.

二、映射

定义 2.5 设 F 为从集合 X 到集合 Y 中的关系，如果 $\forall\ x \in X$，有唯一 $y \in Y$，使得 xFy，则称 F 为(从 X 到 Y 中的)映射，记作 $F: X \to Y$.

这时，对于每一 $x \in X$，使得 xFy 的那个 y，记作 $y = F(x)$，并称为点 x(对于映射 F 而言)的象(或值). 对于 $y \in Y$，如果 $x \in X$ 使得 xFy，则称 x 是 y(对于映射 F 而言)的原象，并且 y 的原象集记作 $F^{-1}(y)$.

若还有映射 $G: Y \to Z$，做为关系，则复合 $G \circ F$ 为从 X 到 Z 中的关系. 进一步有：

定理 2.2 若 $F: X \to Y$，$G: Y \to Z$，则 $G \circ F: X \to Z$. 且对任意的 $x \in X$，$(G \circ F)(x) = G(F(x))$.

证明 首先证明 $G \circ F$ 满足映射定义的要求. 事实上，$\forall\ x \in X$，令 $y = F(x)$，则 xFy；令 $z = G(F(x))$，则 yGz. 从而根据关系复合的定义，有 $xG \circ Fz$. 设 $z_1, z_2 \in Z$，使得 $xG \circ Fz_1$，$xG \circ Fz_2$，根据关系复合的定义，$\exists\ y_1 \in Y$，使得 xFy_1，y_1Gz_1；$\exists\ y_2 \in Y$，使得 xFy_2，y_2Gz_2. 由于 F 是映射，从 xFy_1，xFy_2 得 $y_1 = y_2$. 由于 G 是映射，从 y_1Gz_1，y_2Gz_2 且 $y_1 = y_2$ 得 $z_1 = z_2$.

其次，在上述证明中，我们已有

$$G(F(x)) = z = (G \circ F)(x).$$

□[①]

① 符号"□"表示定理已证毕.

今后，我们常用小写字母 $f, g, \varphi, \cdots$ 等表示映射.

设 $f: X \to Y,\ A \subset X,\ B \subset Y$，我们记

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) = y \in B\}.$$

定理 2.3 设 $f: X \to Y,\ A, B \subset Y$，则有

(1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$；

(2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$；

(3) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

证明 (1) 易证，留给读者.

(2) $\forall\, x \in f^{-1}(A \cap B)$，则 $\exists\, y \in A \cap B$，使得 $y = f(x)$，即 $x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \in f^{-1}(B)$，故 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. 从而有 $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$；另一方面，设 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$，由于 $x \in f^{-1}(A)$，故 $f(x) \in A$；由于 $x \in f^{-1}(B)$，故 $f(x) \in B$，从而 $f(x) \in A \cap B$，即 $x \in f^{-1}(A \cap B)$. 这表明 $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$. 从而结论(2)得证.

(3) 证明与(2)的证明相似，留给读者. □

设 $f: X \to Y,\ A \subset X,\ B \subset Y$，则我们有

$$f^{-1}(f(A)) \supset A,\ f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

我们感兴趣的问题是：在什么条件下，有

$$f^{-1}(f(A)) = A,\ f(f^{-1}(B)) = B.$$

定义 2.6 设 $f: X \to Y$. 若 $f(X) = Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的**映射**，或**满射**. 若任意的 $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是**单射**. 若 f 既是单射又是满射，则称 f 是**双射**.

定理 2.4 设 $f: X \to Y$，

(1) 若 f 是单射，则对于 X 的任意子集 A，有 $f^{-1}(f(A)) = A$；

(2) 若 f 是满射，则对于 Y 的任意子集 B，有 $f(f^{-1}(B)) = B$.

证明 (1) 因 f 是单射，若 $f(a) = b$，则 $f^{-1}(b) = a$. 若 $f(A) =$

B,则 $f^{-1}(B)=A$,即 $f^{-1}(f(A))=A$.

(2) 我们先来证明下面的关系式

$$f(f^{-1}(B))=B\cap f(X) \tag{*}$$

事实上,设 $b\in f(f^{-1}(B))\Leftrightarrow$ 有 $a\in f^{-1}(B)$,使 $f(a)=b$,而 $a\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow$ 有 $b'\in B$,使 $f(a)=b'$. 因 f 是从 X 到 Y 的映射,故 $b=b'$. 从而有 $b\in f(f^{-1}(B))\Leftrightarrow$ 有 $a\in X$, $b\in B\subset Y$ 使 $f(a)=b\Leftrightarrow b\in B$ 且 $b\in f(X)\Leftrightarrow b\in B\cap f(X)$, 即($*$)式得证.

因 f 是满射,故 $f(X)=Y$, 从而由($*$)式得

$$f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)=B\cap Y=B. \qquad \square$$

定义 2.7 若 $f:X\to Y$ 是双射,由 $y=f(x)$ 确定的从 Y 到 X 的映射 $:y\to x$, 称为 f 的逆映射,记作 f^{-1}.

注 2.1 当 f 不是双射时,f^{-1}不是映射.

三、运算

运算是数学中一个最基本的概念,如数的四则运算,多项式的运算,向量的运算等等.这里,我们用映射的观点来研究运算.

定义 2.8 设 A, B, C 是三个非空集合,称映射 $f:A\times B\to C$ 是一个从 $A\times B$ 到 C 中的运算.特别地,称映射 $f:A\times A\to A$ 是 A 上的一个运算,并且称运算 f 在 A 上封闭.

例 3 设 B 是一集合, $A=2^B$, $\forall A_1\in A$, $\forall A_2\in A$, 定义

$$f(A_1,A_2)=A_1\cap A_2,$$

则 f 是 A 上的一个运算.

例 4 设 $A=\{$奇,偶$\}$,规定

$$偶\oplus偶=偶,偶\oplus奇=奇,$$

$$奇\oplus偶=奇,奇\oplus奇=偶,$$

则$\oplus$是 A 上的一个运算.

例 5 设 $B=$ {立正,向左转,向右转,向后转},规定

立正$\oplus$向左(右,后)转 $=$ 向左(右,后)转,

向左(右,后)转$\oplus$立正 $=$ 向左(右,后)转,

向左转$\oplus$向左转 $=$ 向后转,

向左转$\oplus$向右转 $=$ 立正,

向左转$\oplus$向后转 $=$ 向右转,

…….

则$\oplus$是集合 B 上的一个运算,且 B 关于运算$\oplus$封闭.

定义 2.9 设 f 是集合 A 上的一个运算. $\forall\, a, b, c \in A$,

(1) 若 $f(a, b)=f(b, a)$,则称 f 满足交换律;

(2) 若 $f(f(a, b), c)=f(a, f(b, c))$,则称 f 满足结合律;

显然,例 4 给出的运算$\oplus$与例 5 给出的运算$\oplus$都满足交换律与结合律.而在第 1 节中给出的集合差集的运算既不满足交换律,又不满足结合律.

定义 2.10 设 f 是集合 A 上的一个运算.若 A 中存在元素 e, $\forall\, a \in A$,若 $f(a, e)=a$ 成立,则称 e 是运算 f 的**右零元**;若 $f(e, a)=a$ 成立,则称 e 是运算 f 的**左零元**;若 e 既是 f 的左零元,又是 f 的右零元,则称 e 是运算 f 的**零元**.

注 2.2 若 f 满足交换律,则 f 的左零元,就是 f 的右零元,也就是 f 的零元.

例 6 设 B 是非空集, $A=2^B$,则 A 上并集运算的零元是空集 $\varnothing$, A 上交集运算的零元是 B.

例 7 例 4 中的零元是“偶”,例 5 中的零元是“立正”.

下面给出逆元的概念.

定义 2.11 设 e 为 A 上运算 f 的零元,对于 $a \in A$,若 $\exists\, a' \in$