高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 同济大学数学系编

九章丛书

工程数学
线性代数
（第五版）

同步辅导及习题全解

主 编 郭志梅 王曙东

- 知识点窍
- 逻辑推理
- 习题全解
- 全真考题
- 名师执笔
- 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

线性代数（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　郭志梅　王曙东

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合同济大学应用数学系编写的《工程数学·线性代数》(第五版) 教材而编写的配套辅导书。

本书由学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧、课后习题全解四部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法与技巧，提高学习能力及应试能力。

本书可作为高等院校数学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（第五版）同步辅导及习题全解 / 郭志梅，王曙东主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2011.2
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-8353-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郭… ②王… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012689号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **线性代数（第五版）同步辅导及习题全解**
作　者	主　编　郭志梅　王曙东
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　15印张　306千字
版　次	2011年2月第1版　2011年2月第1次印刷
印　数	0001—8000册
定　价	16.80元

前 言

“线性代数”是大学数学课程中的一门重要的必修课程，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于该课程自身的抽象性以及特有的语言符号系统，引入了许多新的概念和思维方式，且解题方法灵活多变，使得该课程成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好线性代数，我们根据原国家教委审定的普通高等学校《线性代数》课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试大纲编写了《线性代数（第五版）同步辅导及习题全解》。本书按照《工程数学·线性代数》（第五版）（同济大学编，高等教育出版社出版）的章节顺序，分为六章，各章具体体系及特点如下：

学习导引：说明该章包括的主要内容、学习的侧重点、需要掌握的知识点。

知识点归纳：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，并对一些难以理解但又是大纲所要求的、考研经常涉及的内容进行了详细归纳和解释，目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

典型例题与解题技巧：该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题，对其先进行分析，再给出详细解答，并在最后做出点评，意在抛砖引玉。

课后习题全解：该部分对教材中的习题做了详细分析，希望读者能够掌握解题的思路、方法和技巧，从而能举一反三，以不变应万变。

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免有疏漏甚至错误之处，敬请各位同行和读者批评指正。

编者

2010 年 12 月

目 录

第一章 行列式 …… 1
学习导引 …… 1
知识点归纳 …… 1
典型例题与解题技巧 …… 6
课后习题全解 …… 26
第二章 矩阵及其运算 …… 43
学习导引 …… 43
知识点归纳 …… 43
典型例题与解题技巧 …… 49
课后习题全解 …… 58
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组 …… 79
学习导引 …… 79
知识点归纳 …… 79
典型例题与解题技巧 …… 86
课后习题全解 …… 97
第四章 向量组的线性相关性 …… 120
学习导引 …… 120
知识点归纳 …… 120
典型例题与解题技巧 …… 126
课后习题全解 …… 136
第五章 相似矩阵及二次型 …… 163
学习导引 …… 163
知识点归纳 …… 163
典型例题与解题技巧 …… 170

课后习题全解 …… 183
第六章　线性空间与线性变换 …… 215
学习导引 …… 215
知识点归纳 …… 215
典型例题与解题技巧 …… 220
课后习题全解 …… 226

第一章
行列式

学习导引

本章内容包括全排列及其逆序数，n 阶行列式的定义、基本性质，以及常见 n 阶行列式的计算方法，最后讲解行列式的一个应用——克拉默法则. 其中对行列式的定义及其性质的掌握是重点，它是线性代数的一个基础部分.

知识点归纳

重要概念

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列），或称一个 n 级排列. 所有全排列的个数记作 P_n，则 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

2. 排列的逆序数

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如从小到大），于是在这几个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序，一个排列中所有逆序的总和叫做这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

3. 对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的变换叫做对换. 将相邻两个元素对换叫做相邻对换.

4. n 阶行列式

由 n^2 个数 a_{ij}，$1 \leqslant i, j \leqslant n$，排成的 n 行 n 列的方形阵列决定的一个数，这里的脚标

i,j 表示这个数的位置,定义如下:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;t 为这个排列的逆序数; $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列(共有 $n!$ 个)取和. n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (ij) 元.

5. 代数余子式

(1)行列式按一行(列)展开.

在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则 A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2)行列式按某 k 行(列)展开.

在 n 阶行列式 D 中,任选 k 行、k 列,位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原来相对位置组成的 k 阶行列式 M,称为 D 的一个 k 阶子式,在 D 中划去 M 所在的行与列后得到的 $n-k$ 阶行列式 N,称为 M 的余子式,如果 M 所在的行的序数是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,所在列的序数是 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$ 为 M 的代数余子式.

基本性质

1. 排列的性质

(1)对换改变排列的奇偶性.

(2)在全部 $n(n\geqslant 2)$ 阶排列中奇偶排列各占一半.

(3)任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列,并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

2. 行列式的性质

(1)(对称性)行列式与其转置行列式相等,即若

$$D=|\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots\alpha_n|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^{\mathrm{T}}=|\alpha_1^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_k^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_n^{\mathrm{T}}|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则
$$D=D^{\mathrm{T}}$$

注　行列式的这一性质表明,凡对行成立的性质,对列也成立.

(2)(交错性)互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3)以数乘行列式,等于以这个数乘该行列式的任一行或任一列. 行列式中某一行(列)的所有元素有公因子,则这个公因子可以提到行列式符号的外面.

即
$$|\alpha_1,\cdots,a\alpha_k,\cdots,\alpha_n|=a\cdot|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n|$$

(4)$D=0\begin{cases}\text{当 } D \text{ 中某一行(列)元素全为零.}\\ \text{当 } D \text{ 中某两行(列)元素对应成比例.}\end{cases}$

(5)行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数之和,则这个行列式等于两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即　$|\alpha_1,\cdots,\alpha_k+\beta_k,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\alpha_n|$

(6)将行列式某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

即
$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots ka_k+a_l,\cdots,a_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots\alpha_l,\cdots,\alpha_n|$$

常用方法

1. 排列逆序数的计算

(1)$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+\,i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+$ i_{n-1}后面比 i_{n-1}小的数的个数.

(2)$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+\,i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+\cdots+i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

2. 行列式按行(列)展开的计算

(1)行列式按一行(列)展开.

设 D 为 n 阶行列式,则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中,A_{ij}是 D 中元素 a_{ij}的代数余子式.

(2)行列式按某 k 行(列)展开:设 D 为 n 阶行列式,在 D 中任取 $k(k\leqslant n)$行,这时行中所有 k 阶子式(共有 C_n^k 个)为 $M_1,M_2,\cdots,M_s$,相应的代数余子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,则 $D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$.

注 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除(i,j)元 a_{ij}外都为零,那么这个行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

3. 几种由定义可直接计算的特殊行列式

(1)二阶行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

(2)三阶行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{12}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$

(3)上三角形行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$

(4)下三角形行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$

(5)反上三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

(6)反下三角行列式：$\begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdot\cdots(x_n - x_n - 1)$$

5. 克拉默(Cramer)法则

(1)非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (b_i \text{ 不全为零})$$

的系数行列式 $D\neq0$ 时，该方程组有唯一解，即 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$.

其中 $D_i=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

反之,如果非齐次线性方程无解或有两个不同解,则它的系数行列式必为零.

(2)齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组有唯一零解,即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

反之,如果齐次线性方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$.

注 ①克拉默法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

②n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一解,当系数行列式 $D=0$ 时克拉默法则失效,方程组可能有解,也可能无解.

③n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一零解,当系数行列式 $D=0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

典型例题与解题技巧

题型 1 排列逆序数的计算

题型分析 在求排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数时,可以从第 2 个数开始. 依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数)t_i,则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $t_2+t_3+\cdots+t_n$.

例 1 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性.

(1)21736854 (2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解 **(1)解法 1** 2 的后面有 1 小于 2,故 2 的逆序数为 1,1 的后面没有小于 1 的数,1 的逆序数为 0,7 的后面有 3,6,5,4 小于 7,故 7 的逆序数为 4,依此方法逐个计算,知排列逆序数为:

$t(21736854)=1+0+4+0+2+2+1+0=10$,偶排列

解法2　1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数为 1，2 排在首位没有逆序，3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1，依此计算可得

$$t(21736854)=1+0+1+4+3+1+0+0=10$$

(2) $t(n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

由于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性由 n 而定，故讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$，为偶数.

当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$，为偶数.

当 $n=4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$，为奇数.

当 $n=4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$，为奇数.

综上，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，k 为任意非负整数.

题型 2　n 阶行列式的概念

题型分析　对于 n 阶行列式的概念要注意以下几点：

(1)每一项的构成是不同行、不同列的几个元素相乘，n 阶排列总数是 $n!$，所有排列求和，共有 $n!$ 项.

(2)每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定符号.

(3)行列式的值最终是一个具体的数.

例 2　填空题

(1)如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n\geqslant$______.

(2)如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么行列式的值为______.

(3)在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ x & 1 & 0 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是______.

分析 (1)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n\geqslant 4$.

(2)n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数小于 n；又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必定为零，从而此行列式值为零.

(3)按行列式定义，对于 x^3，有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$，$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三次出现 x_3，此时各项的系数分别是 $a_{24}=-1$，$a_{21}=1$，$a_{14}=2$，即 $-x^3$，x^3，$2x^3$；又各项逆序数分别为 $t(2431)=4$，$t(2134)=1$，$t(4231)=5$，故所带符号分别为正、负、负，因此系数是 -4.

答案 (1)4 (2)0 (3) -4

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2007 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2008 \end{vmatrix}$$

分析 对于含零元素较多的行列式，可直接用定义计算. 因行列式的项中有一元素为零时，该项值为零，故只需求出所有非零项即可，为求出非零项 $a_{1_{j1}}a_{2_{j2}}\cdots a_{n_{jn}}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 2,3,…,n 行的非零元素及其位置分别写出 j_2，j_3，…，j_n 可能取的数码，进而求出 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，非零项 $a_{1_{j1}}a_{2_{j2}}\cdots a_{n_{jn}}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的 n 级排列有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式的值为零.

解 D 中第一行的非零元素只有 $a_{1\,2007}$，因而 j_1 只能取 2007. 同理由第 2,3,…,2008 行知，$j_2=2006$，$j_3=2005$，…，$j_{2007}=1$，$j_{2008}=2008$，于是 j_1，j_2，…，j_{2008} 在可能取的数码中只能组成一个 2008 级排列 (2007)(2006)…2 1(2008)，即 D 中非零项只有一项，故

$$\begin{aligned}&(-1)^{t(2007\cdots 2\ 1\ 2008)}a_{1\,2007}\cdots a_{2007\,1}a_{2008\,2008}\\ =&(-1)^{2008+\cdots+2+1}1\times 2\times\cdots\times 2007\times 2008\\ =&2008!\end{aligned}$$

题型 3 低阶(3~5 阶)行列式的计算

题型分析 可采用两种方法：

(1)根据行(列)元素的特点,利用行列式性质化为上(下)三角形行列式.

(2)根据行列式按一行(列)展开公式降阶求解.

例 4 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$$

解 观察行列式中元素的特点,第 4 行提出公因子 b_4 后再把第 4 行的 $-b_1$, $-b_2$, $-b_2$ 倍分别加到第 1,2,3 行可得

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix} = b_4 \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-b_3r_4]{r_1-b_1r_4,\, r_2-b_2r_4} b_4 \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ 0 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4 \begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4\sum_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

题型 4 行列式按行(列)展开定理应用

题型分析 根据行列式按行(列)展开定理,n 阶行列式可通过 $n-1$ 阶行列式计算. $n-1$ 阶行列式可通过 $n-2$ 阶行列式计算,…,直到可通过 2 阶行列式计算. 主要对零元素较多的行列式用此方法比较简便,所以往往先利用行列式性质将行列式的第一行(列)出现较多的零元素,再利用此定理.

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

分析　由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_2)}a_{1_{p1}}a_{2_{p2}}\cdots a_{n_{pn}}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零，由于本行列式中零元素较多，因而为零的项就较多，故只需找出那些不为零的项就可以求得该行列式的值.

解　所给行列式中，第一行元素除了 a_{12}（即 $p_1=2$）以外其余都为零，而第二行元素除了 a_{23}（即 $p_2=3$）以外其余都为零. 继续分析第三行、第四行…第 n 行，可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零，且它的列标排列 2 3…n 1 的逆序数为 $n-1$，于是

$$D_n=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$$

例 6　已知 $\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=1$，求 x,y,z.

分析　虽然是一个解方程的题，但归根到行列式的计算，行列式最后一行只有两个非零数，故可按该行展开计算此行列式.

解　$$左边=-z\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x&y\\x&1&0\\y&0&1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}x&z\\1&0\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}x&y\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x\\x&1\end{vmatrix}$$

$$=-z^2-y^2-x^2+1$$

则 $x^2+y^2+z^2=0$，故 $x=y=z=0$.

题型 5　关于余子式的计算

题型分析　根据行列式展开定理知，对 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$，有结论 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\begin{cases}D_n,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$，有时也可将定理反过来使用，可将某些低阶行列式（代数余子式或余子式）