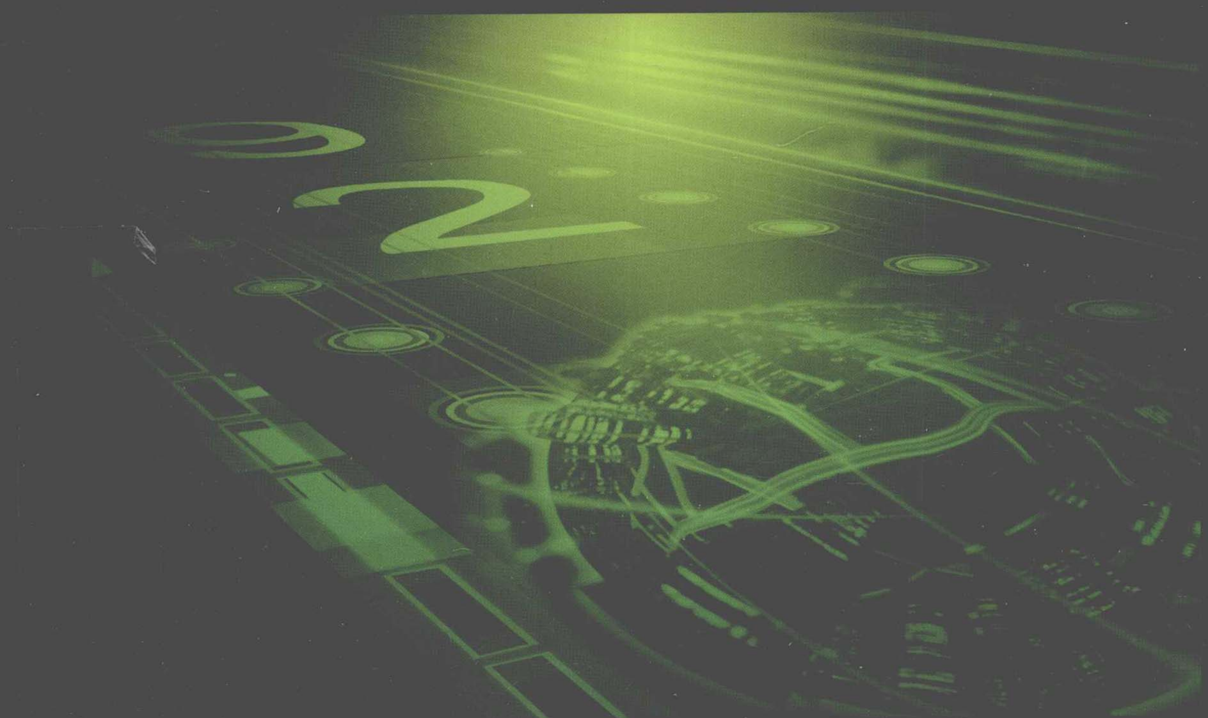
21世纪

普通高等教育
应用型规划教材

线性代数

张振良　主编



化学工业出版社

21世纪普通高等教育应用型规划教材

线性代数

张振良 主 编

化学工业出版社

·北京·

本书是根据本科线性代数课程教学基本要求，结合工程技术和经济管理中对线性代数的要求而编写的高等学校教材．全书共分6章，内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型．每节均配有习题，每章又配有复习题，书末附有习题答案．

本书可作为普通高等院校理工类、经管类各专业线性代数课程的教材，也可作为从事科技工作、经济工作和管理人员的自学用书和参考书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张振良主编．—北京：化学工业出版社，2011.1
21世纪普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-122-10282-9

Ⅰ．线… Ⅱ．张… Ⅲ．线性代数 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第262852号

责任编辑：宋湘玲　　文字编辑：唐晶晶
责任校对：陶燕华　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：大厂聚鑫印刷有限责任公司
710mm×1000mm　1/16　印张10¾　字数188千字　2011年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.80元

前言

本书是根据理工类、经管类本科数学基础课程教学基本要求编写的，可作为高等学校理工类、经管类各专业线性代数课程的教材.

在编写过程中，编者力求教材的内容和体系安排能符合当前高等教育教学内容和课程体系改革的总体目标. 针对一般的高等院校（一般本科和独立学院），本着“以应用为目的、以必需和够用为尺度”的原则，在教材的体系、内容的编排和例题、习题的选配上尽量做出合理安排，使学生通过学习，既能掌握线性代数的基本理论和基本方法，又能培养学生应用数学的能力和逻辑推理能力. 为此，我们在本书编写过程中进行了如下几个方面的改进.

（1）按照理工类、经管类线性代数课程教学内容的基本要求分 6 个知识块编排教材：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型. 为了保证知识结构在逻辑上的严密性，某些知识点的处理和定理的证明有独到之处. 例如把线性方程组求解的消元法放在矩阵的初等变换一节中，以此引入矩阵初等变换的概念. 把向量的内积、向量组的正交化、向量空间的标准正交基放在第 3 章向量空间一节. 保证了知识块的集中教学.

（2）采用学生易于理解的归纳方法给出了 n 阶行列式按第一行展开的定义. 为了保证行列式的性质与行列式按任意行（列）展开的定理顺序编排的教学体系的完整性和严密性，除少数重要性质和定理在正文中证明外，其余比较关键和难证的性质和定理采用附录的方式，对该体系的全部定理和性质给出了完整的证明，保证了该体系的完整性. 而且诸性质和定理的证明的简捷性，说明该体系是比较理想的用归纳法定义的教学体系.

（3）教材把线性方程组的求解作为主线贯穿于教材中，突出了行列式与线性方程组求解的关系、突出了矩阵和线性方程组的对应关系、突出了矩阵的初等变换与线性方程组求解的消元法的关系、突出了向量组的线性相关性与齐次线性方程组非零解的存在性的关系、突出了向量组的线性表示与非齐次线性方程组解的存在性的关系. 这样为行列式、矩阵、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性和

线性表示等概念刻画了一个易于接受的直观背景，便于学生接受和理解.

（4）面对高等教育大众化的新形势，按照由浅入深、从具体到抽象的原则，编排教学内容. 例如第 1 章行列式中，首先通过二元、三元线性方程组的求解，引入二阶、三阶行列式的定义，进而用归纳法引入 n 阶行列式的定义；又如前面所说的，利用求解线性方程组的三种同解变换引入矩阵的三种初等行变换；利用线性方程组解的存在性说明向量组的线性关系和线性表示；利用解析几何中的坐标旋转变换化一般的二次曲线为标准形说明二次型的标准化等.

（5）注重基本概念、基本理论、基本方法的三基的介绍. 对重点概念、重点理论加强分析和举例；对重要的运算技巧和应用方法配有较多的例题；对容易混淆、容易产生疑问的地方以“注意”的形式给出了必要的说明和解释. 在每章后面都配有复习题，包括选择题、填空题、计算题和证明题四部分，用以帮助学生对该章的基本概念、基本理论的理解和分析，对基本运算方法的练习和掌握.

在本书的编写过程中，任献花、郝冰、陈付彬参与了稿件的编写、校对等工作. 任献花还对行列式一章的编排体系作了一些有益的工作. 该书的编写一直得到昆明理工大学津桥学院领导和教务处的大力支持，在此对他们表示衷心感谢！

由于编者的水平和时间所限，书中难免有疏漏之处，恳请读者和专家批评指正.

编者

2011 年 1 月

目录

第1章 行列式

行列式是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 它在数学的许多分支中都有广泛的应用，特别是在本课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 另外还介绍用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二、三阶行列式

在中学代数中，我们用消元法求解二元线性方程组和三元线性方程组. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases} \tag{1-1}$$

用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘上列方程（1），（2）的两端，然后两个方程相减，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1-1) 有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，我们引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

D称为二阶行列式. 它含有两行、两列，横写的称为行，竖写的称为列. 行列式中的数称为元素，例如 a_{21} 称为第 2 行、第 1 列的元素. 二阶行列式的计算方法可以利用对角线法来记忆. 参看图 1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为副对角线，于是二阶行列式就是主对角线上两个元素之积减去副对角线上两个元素之积所得的差.

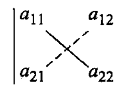


图 1-1

如果记二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{21}b_2 \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

则以上关于二元线性方程组(1-1) 的解可以表示为：

当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1) 有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-2}$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7\neq 0$$

又
$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-7,D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-14$$

所以方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2$$

类似于二元线性方程的讨论，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

利用消元法可知，当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，方程组(1-3) 有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3) \\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}) \\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}) \end{cases} \tag{1-4}$$

为方便记忆，我们引入三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}$$

它是由九个数排成三行、三列的一个方块，它的值等于 6 项的代数和，可以利用图 1-2 记忆，图中各实线相连的三个数的积取正号，各虚线相连的三个数的积取负号，它们的代数和就是三阶行列式的值. 这一计算方法称为三阶行列式的对角线法则.

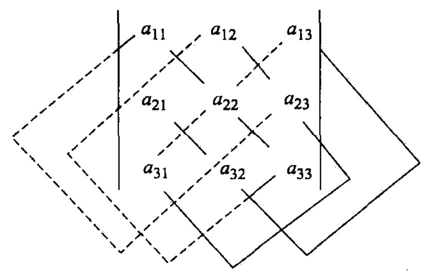


图 1-2

利用三阶行列式的记号，关于三元线性方程组(1-3) 的解，式(1-4) 可以写为如下形式：

当
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组(1-3) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

以上求解线性方程组的方法称为克拉默（Cramer）法则.

例 2 解三元线性方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1+2x_2-x_3=-4 \\ -2x_1-3x_2+x_3=6 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\-2&-3&1\end{vmatrix}=1\times2\times1+1\times(-1)\times(-2)+1\times1\times(-3)-$$

$$1\times2\times(-2)-1\times(-1)\times(-3)-1\times1\times1=1\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&1&1\\-4&2&-1\\6&-3&1\end{vmatrix}=-1,\ D_2=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-4&-1\\-2&6&1\end{vmatrix}=-1,\ D_3=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-4\\-2&-3&6\end{vmatrix}=1$$

所以方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

1.1.2 n阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先分析三阶行列式的特点.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

可以看出，三阶行列式 D 等于它的第一行的各个元素 a_{11}、a_{12}、a_{13} 分别乘以二阶行列式的代数和，其中与 a_{1j}（$j=1,2,3$）相乘的二阶行列式恰是在 D 中划去第一行、第 j 列的元素后，剩余的元素按照在 D 中的原排列顺序所构成的二阶行列式，并赋予符号$(-1)^{1+j}$（$j=1,2,3$）.

这一规律对于二阶行列式仍然成立，事实上，若记一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11}，即$|a_{11}|=a_{11}$，那么，二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}|+a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}|$$

按照以上规律，利用递归法可以定义 n 阶行列式.

定义 1 一阶行列式定义为

$$|a_{11}|=a_{11}$$

当 $n\geqslant2$ 时，设 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \tag{1-6}$$

其中 M_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）表示划去行列式 D 中的第 i 行与第 j 列的元素后，剩余的元素按照在 D 中原排列的顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式. 称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

利用代数余子式的概念，n 阶行列式可以写为

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{1-7}$$

即 n 阶行列式 D 等于它的第一行各元素与其代数余子式的乘积的代数和. 通常称为行列式按第一行的展开式.

例 3 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的余子式、代数余子式，且求行列式 D 的值.

解

$$M_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-4,\quad M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}=3,\quad M_{14}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

由此，$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-4$，$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=0$，

$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=3$，$A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=2$

所以行列式 D 的值

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=1\times(-4)+2\times0+0\times3+1\times2=-2$$

下面给出行列式按第一列展开的定理.

定理 1 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

注： 定理 1 和 1.2 节中的行列式的主要性质的证明见附录Ⅰ.

例 4 计算下列的下三角形行列式 D_1 和上三角形行列式 D_2.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D_1 按第一行展开（D_2 按第一列展开），得

$$D_1=a_{11}A_{11}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再按第一行展开，依次类推，得

$$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

特别地，对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1，依次按第一行展开，逐步降阶，可得

$$D=(-1)^{1+n}a_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}(-1)^{n}a_1a_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\cdots$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n}\cdots(-1)^{2}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

解 按第一列展开，得

$$D=aA_{11}+bA_{51}=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+b(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$=a^5+b^5$$

如果 D 按第一行展开，得

$$D=aA_{11}+bA_{12}=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=a^5-b^2(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=a^5+b^5$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

2. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 4x_1+5x_2=0 \\ 3x_1-7x_2=0 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 4x_1-5x_2=2 \\ 3x_1+4x_2=10 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2 \\ x_1+4x_2+5x_3=3 \end{cases}$

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

1.2 行列式的性质

利用行列式的递归定义和定理 1 计算较高阶的行列式时，计算量大. 为了简化行列式的计算，我们介绍下面行列式的性质.

把行列式 D 的行与列互换，不改变它们前后的顺序得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 利用数学归纳法证明.

当 D 为一阶行列式时，$D=D^{\mathrm{T}}=a_{11}$，即结论成立. 假设对于 $n-1$ 阶行列式结论成立，则对于 n 阶行列式 D，由行列式定义 $D=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$，其中代数余子式 A_{1j} $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，由假设 $A_{1j}=A_{1j}^{\mathrm{T}}$，所以

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}^{\mathrm{T}}=D^{\mathrm{T}}$$

性质 1 表明，行列式中行和列具有同等的地位，行列式的行具有的性质，它的列也同样具有，反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式变号.

注： 交换行列式的第 i 行（列）和第 j 行（列）记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1 若行列式有两行（列）的对应元素相等，则此行列式等于零.

性质 3　若行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

注：第 i 行（列）乘以数 k，记为 $r_i \times k(c_i \times k)$.

推论 2　行列式中某一行（列）的所有元素的公因数可以提到行列式的记号外与之相乘.

推论 3　若行列式中有一行（列）的元素全为零，则此行列式等于零.

推论 4　行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 4　若行列式中某一行（列）的所有元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 4 和推论 4 即可得下列性质.

性质 5　把行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一个数，然后加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变.

注：以数 k 乘第 i 行（列）加到第 j 行（列），记为 $r_j + kr_i$ （$c_j + kc_i$）.

定理 2　行列式等于它的任一行（列）的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1-8}$$

上式称为行列式按第 i 行展开. 对称地，行列式也可以按第 j 列展开，即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1-9}$$

证明　只证行列式按第 i 行的展开式(1-8).

把行列式 D 的第 i 行（$i>1$）与它的前一行逐个交换，可使它成为第一行，其余行的顺序保持不变，共作了 $i-1$ 次相邻行的交换. 根据性质 2 所得行列式 D_1 是 D 的 $(-1)^{i-1}$倍，按行列式定义展开这个行列式得

$$(-1)^{i-1}D = D_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{1+j}M_{ij}$$

则

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{j+i}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

推论 5　行列式的某一行（列）的所有元素与另一行（列）的对应元素的代

数余子式的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j) \tag{1-10}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j) \tag{1-11}$$

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 因为 D 的第二行仅有一个元素不为零，按第二行展开.

$$D=(-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=20$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 方法 1 （降阶法）

$$D\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-c_1}-4\begin{vmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$=(-4)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}=40$$