

第一模块教材

高中新课标



数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：刘云章 赵东金

微积分初步

——无限和变化的乐园

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

微积分初步

——无限和变化的乐园

《新课标数

学

总 主 编:毛文凤 博士

执行主编:李君华 教授

执行副主编:肖柏荣(江苏教育学院数学系教授,江苏省中学数学教学专业委员会副理事长)

袁 桐(扬州新东方中学数学特级教师,江苏省名教师)

周敏泽(常州高级中学数学特级教师,全国模范教师)

徐沥泉(无锡市教学研究中心数学特级教师,全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长)

丛 书 编 委:李君华 肖柏荣 袁 桐 周敏泽 徐沥泉
刘云章 马永培 朱平天 杨润生 葛福生
周冠廷 孙志人 刘国祥 何继刚 卫 岗
蔡伟元 周公贤 刘威伯 顾曼生 管义桂
顾继玲 方彩云 张新华 陈小紅 徐德同

本 册 编 著:刘云章(南京师范大学数科院教授)

赵东金(南京晓庄学院数警系讲师)

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚 社 长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

微积分初步:无限和变化的乐园/毛文凤主编.-北京:

中国大百科全书出版社,2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7216-3

I.微... II.毛... III.数学课—高中—教学参考资料

IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142247 号

策划设计:可一图书 (<http://www.keyibook.com>)

责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材

微积分初步:无限和变化的乐园

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

<http://www.ecph.com.cn>

北京阜成门北大街 17 号 邮编:100037 电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 9.75 印张 167 千字

ISBN 7-5000-7216-3/G·814

定 价:14.00 元

序

李君华

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵,已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中,编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书,从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学,应注重概念清晰、计算正确、论证有据;数学作为一种文化,应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的,是符合新课标理念的。当然,归根结底,针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的,在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合:适度的形式化与启发兴趣形式相结合,发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合,掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前 言

“现代,任何一个人如果对微积分一无所知,就不能看成是真正受过教育的人。”
——H·伊乌斯

本书的特色之一是,追本逆源。微积分是人类生产实践、科学活动的必然产物。本书着力揭示微积分的思想源头,让读者既能看到已完成的微积分又能看到创造过程中的微积分,从而学活微积分。

本书的特色之二是,突出思想方法。微积分“本质上不外是辩证法在数学方面的应用”,其间包含着丰富的辩证法思想。本书致力于阐明微积分的思想方法,引导读者提高哲学素养,提升思维品位,受益终身。

本书的特色之三是,关注应用。微积分对于现今的科学工作者来说,就像天文学家的望远镜、生物学家的显微镜一样重要。本书力求显示微积分的应用价值,引导学生学以致用,会用微积分处理实际问题并能用微积分的语言、方法来认识中学数理化生等学科中的很多问题,优化认知结构。

本书的特色之四是,富有趣味性。微积分是人类数千年智力奋斗的结晶。早在古希腊时代,阿基米德已经解决现代微积分教程中的许多重要问题,但是,直到十七世纪后半叶微积分才宣告问世。本书通过介绍微积分发展过程中的历史故事,微积分名词、符号的演变史话以及数学家创建微积分的趣话,引导读者愉快学习。

微积分是无限和变化的乐园,以思为乐,弄懂则乐,会用更乐。

本书可供中学生、大学生、中学数学教师以及数学爱好者阅读参考。不妥之处,敬请指正。

编者

目 录

第一章 乐园导游

- § 1 微积分研究的对象与方法 (2)
- § 2 微积分是怎样产生的? (6)
- § 3 牛顿和莱布尼茨的治学精神 (10)
- § 4 微积分的大致内容和学习方法 (14)

第二章 极限——从有限认识无限

- § 1 极限的思想源头 (16)
- § 2 极限运算原理解读 (34)
- § 3 有关极限的综合运算 (59)

第三章 导数与微分——动中取静静驭变

- § 1 导数的思想源头(I) (70)
- § 2 导数的思想源头(II) (81)
- § 3 求导运算原理解读 (87)
- § 4 微分的思想源头、运算原理解读 (110)

第四章 导数和微分的应用——解困惑初显神功

- § 1 导数应用的原理解读 (124)
- § 2 导数在实际问题中的应用 (140)
- § 3 导数在初等数学中的应用 (164)

§ 4 微分在近似计算中的应用	(177)
第五章 积分——化整为零零积整	
§ 1 积分的思想源头	(184)
§ 2 积分运算原理解读	(205)
第六章 积分的应用——释疑难再现威武	
§ 1 积分在几何中的应用	(242)
§ 2 积分在实际问题中的应用	(258)
第七章 乐园插曲——尾声	
§ 1 乐园里的“鬼魂”	(267)
§ 2 乐园里的一场争斗	(272)
综合练习	(277)
参考答案	(279)

第一章 乐园导游

微积分,本质上不外是辩证法在数学方面的应用。

——恩格斯

§ 1 微积分研究的对象与方法

我们从与“神舟”飞船有关的问题谈起：

问题：见图 1-1-1，从地面垂直发射质量为 m 的物体，试计算物体从 A 点飞到 B 点（ A, B 点离地球球心的距离分别为 R_1, R_2 ），克服地球引力所做的功，如果要使物体飞离地球引力范围，物体的初速 v_0 应是多少？

大家知道，如果物体受恒力 F 的作用，并沿 F 的方向移动了距离 s ，这时要求力 F 所做的功，很简单，只要用乘法，即

$$W = F \cdot s$$

现在，地球与物体之间的引力 F 的大小，随两者之间的距离而变化，也就是说 F 是个变力，功 W 该怎么计算呢？这个问题，我们暂且不谈，详见第六章。

“有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。”（恩格斯语）微积分就是基于研究事物运动、变化现象的需要而产生的一门数学。微积分的研究对象是变量与函数。

我们已经学过一些函数知识，如一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等。在研究这些函数时，坐标法起了

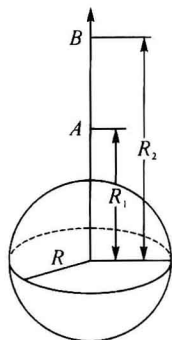


图 1-1-1

很大作用;对每个函数,总是先画出它的图象,再借助图象研究其性质.

然而,单凭坐标法,还不足以深刻掌握函数的变化状态.微积分就是在坐标法的基础上,引进了一种新的计算工具——极限,利用极限来进一步研究函数的.什么叫“极限”?简单地讲,“极限”就是指变量的变化趋势.例如,公元 263 年,我国数学家刘徽研究圆周率 π 时,用“割圆术”推求圆的面积.其大致步骤是:作圆的内接正 $3 \cdot 2^n$ 边形,设其面积分别为

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

可以想象,当 n 无限增大时,正多边形就无限接近于圆.因此,要求圆的面积,只要观察变数 S_n 的变化趋势.如果,当 n 无限增加时,变数 S_n 无限地接近于一个常数 A ,这个常数 A 就叫做变数 S_n 的极限,而极限 A 就可作为所求的圆面积.

这种方法叫“极限法”,在微积分中常见,即要研究一个未知量,先设法选择一个与它有关的变量,考察这个变量的变化趋势,从而获得所求未知量.

极限概念是微积分中最重要的基本概念之一,微积分中的“导数”、“定积分”都是一些特殊的极限.如果要问:“微积分是一门什么学科?”那么也可以概括地说:“微积分是以极限为工具来研究函数的一门学科.”

微积分属于高等数学的范围.从以上的例子可以看出,微积分研究问题的方法,不是孤立地看某一个数、一个图象,而是看一系列数、

一系列图象的总体;不是静止地看某一个数、一个图象,而要看这些数,这些图象的发展、变化.这一点与初等数学是完全不同的.在初等数学中,加、减、乘、除等运算都是由两个数确定出一个数,而在极限法中则是由无限个数来确定一个数的.

很多有关无限与运动的问题,用初等数学的方法无法解决,却可用极限法解决.这里单说历史上一场有趣的“人龟赛跑”.从希腊时代起,数学家与哲学家们就思考过无限,研究过运动,但长期不能理解.古希腊哲学家芝诺构思了一场“人龟赛跑”,他提出了有名的“追龟说”.芝诺说,阿基里斯(希腊神话中的神行太保)追乌龟,永远追不上.比方说,阿基里斯的速度是龟的 10 倍,龟在前面 100 米,当阿基里斯跑了 100 米到达龟的出发点时,龟已向前走了 10 米;阿基里斯再追 10 米,龟又前进了 1 米;阿基里斯再追 1 米,龟又前进了 $\frac{1}{10}$ 米,这样永远相隔一小段距离,所以总也追不上.(见图 1-1-2)



图 1-1-2

当时,古希腊的人们存在一种观点“时间和空间都是可以无限分割的”,芝诺反对这种观点.他提出“追龟说”是用来说明:如果时间和空间可以无限分割,那么阿基里斯就追不上乌龟.他认为,将路程分为无穷多份,走完这无穷多份就需要无限的时间.

芝诺并不是真的认为阿氏追不上龟,问题在于他和当时很多学者都不知道何时何地阿氏才可以追及. 因为,古希腊时代的人是无法处理无限运算的,对于无限个数目相加感到困惑不解.

在希腊时代,“追龟说”违背人们的常识. 希腊人明知阿基里斯一定能追上乌龟,但却无法证明“追龟说”错在何处,这就成为希腊数学史上有名的难题,给学术界以极大的骚动,刺激数学家们要认真研究“无限”、研究运动. 直到微积分时代,这个问题才得以初步解决. 详见第二章.

§ 2 微积分是怎样产生的?

微积分的出现,是“人类精神的最高胜利”,不仅是数学史而且是整个人类历史上的一件大事,它是人类社会生产实践、科学活动的必然产物.

一方面,微积分的产生是人类认识事物运动、变化过程的需要.

起初,人们主要是掌握了一些初等数学的知识.当时人们对客观世界的认识能力有限,只能认识一些简单的数量关系与图象性质,因此主要研究的是不变的量与不变的图形.

到了 16 世纪,欧洲处于资本主义萌芽时期,生产力得到很大的发展,生产和技术中的大量问题,迫切需要与之相适应的力学、天文学等基础学科的发展,然而这些学科都离不开数学,也就促进了数学的发展.航海事业需要确定船只在大海中的位置,这就要求精确地测定地球的经纬度和制造准确的时钟,于是推动了对天体运行的深入研究;船舶的改进,必须探讨流体及物体在流体中运行的规律;运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,是轨迹的切线方向.另外,光学中透镜的设计要研究光线通过透镜的通道,必须知道光线同曲线的法线间的夹角,而法线是垂直于切线的,这些问题都刺激了对曲线切线问题的进一步研究;战争促进了对抛物运动的研究,要探讨其最大值和最小值问题.研究行星的运动也涉及最值问题.例如,求行星离开太阳的最远和最近的距离.

上述种种问题有个共同的特点,要求人们能掌握物体在运动状态中的一些数量关系.而这些数量关系的研究,初等数学已无能为力了.

就落体和行星运动的研究来说,有两个最基本的问题:一个是已知路程求速度;另一个是已知速度求路程.在匀速运动的情况下,这两个问题用初等数学就可以解决.即:

$$\text{速度} = \text{路程} \div \text{时间}; \text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}$$

但是,对于非匀速运动,也就是在速度随时间变化的情况下,单用初等数学的方法就无法解决了.这时速度成了变量,初等的常量数学无法描述时间、位置、速度间的复杂关系了.这些矛盾都要求数学突破只研究常量的传统范围,而提供能够用以描述和研究物体运动及变化过程的新工具——变量数学.正是适应当时这些实际问题的需要,微积分作为变量数学的主要部分,就逐渐产生了.

另一方面,微积分是人类数千年智力奋斗的结晶.

人们常说“牛顿和莱布尼茨发明了微积分”,如此概括伟大的发明过程,其实太简单了.

微积分的发明,经过了相当长时间的酝酿,其思想萌芽可以追溯到古代.例如,在我国早就有“割圆术”,即把圆近似地割成边数很多、边很短的正多边形,用来计算圆面积.古希腊的阿基米德已能解决现代微积分教程中的许多重要问题,特别是,他的解法常常可以解释为形如

$$\int_c^d (ax + bx^2) dx$$

的定积分的计算. 因此, 有许多学者就把微积分的最初发明归功于阿基米德.

与现代的微积分相比, 阿基米德的做法缺少明确的极限概念; 缺少计算面积、体积的一般法则, 对每个具体问题都要构思特殊的解法; 不了解求面积和求切线这两个问题之间的互逆关系.

到了 16 世纪, 面积计算的问题又从力学获得新的动力和启发, 德国的开普勒和意大利的卡瓦列利等人做了不少工作, 产生新的成果, 求出了许多由曲线围成的图形的面积公式, 而且在原子论的启示下, 普遍地把一块任意形状的面积近似地看成很多细窄的矩形面积的总和, 这就是微积分中积分概念的雏形.

17 世纪, 笛卡儿在他的《几何学》中研究透镜的聚光性能时, 讨论了求曲线的切线问题. 费马在研究一个量的极大(极小)值问题时, 借助运动的观点, 提出了较好地确定切线的方法. 这些也都是微积分中微分计算的先导.

另外, 笛卡儿和费马在解析几何方面的贡献, 是数学发展的重要转折点. 他们开创了变量概念. 从初等数学到高等数学, 就它们所研究和处理的“量”的发展看, 正是从常量扩展到了变量. “有了变数, 运动进入了数学”而用变量刻画运动必然要引进“无限”, 这是个飞跃. “有了变数, 微分学和积分学也就成为必要的了.”他们把描述运动的函数关系和几何曲线问题的研究统一起来. 从此, 力学中求速度与求路程的两大问题, 就分别化为求切线与求面积的问题.

“微积分问题至少被 17 世纪十几个大数学家和几十个小数学家