



普通高等教育“十二五”规划教材
电子信息科学与工程类专业规划教材

信号与系统 (第3版)

徐亚宁 苏启常 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十二五”规划教材
电子信息科学与工程类专业规划教材

信号与系统

(第3版)

徐亚宁 苏启常 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本教材以“易教易学和强化培养学生的工程能力和创新能力”为出发点,详细介绍了信号与系统分析的基本理论、基本方法,以及 MATLAB 在本课程中的典型应用。全书内容包括:绪论、连续时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析、离散时间信号与系统的 z 域分析、系统的状态变量分析及附录。各章配备了关键概念的小结、MATLAB 的应用、丰富的习题和上机练习。

本书力求精选内容、加强基础、例题典型、重点突出;在文字论述上力求简洁明了、易教易学;在结构安排上,理论与 MATLAB 应用并进。本书可作为高等学校电气信息类各专业的学生教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/徐亚宁,苏启常编著. —3版. —北京:电子工业出版社,2011.7

电子信息科学与工程类专业规划教材

ISBN 978-7-121-13539-2

I. ①信… II. ①徐… ②苏… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 085053 号

责任编辑:韩同平 特约编辑:李佩乾

印 刷:涿州市京南印刷厂

装 订:涿州市桃园装订有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:450 千字

印 次:2011 年 7 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:35.00 元

凡所购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

本书第1版和第2版分别于2003年和2007年出版,教学使用效果良好,并获广西优秀教材一等奖。

这次的第3版,是在2010年6月教育部启动实施“卓越工程师教育培养计划”的背景下,以及进一步收集整理广大师生的反馈意见的基础上完成的。

本书力求精选内容、加强基础、例题典型、重点突出;在文字论述上力求简洁明了、易教易学;在结构安排上,理论与MATLAB应用并行,力求学生在学习信号与系统分析的基本理论和方法的同时,深入掌握MATLAB的应用,将大量繁杂数学运算用计算机实现,从而加深对信号与系统基本原理、方法及应用的深入理解,强化培养学生工程能力和创新能力。

第3版在保持第2版基本内容和结构不变的基础上,主要做了以下2个方面的修订:

首先对第2版在信号与系统的基本理论和方法的叙述方面进行了文字优化,将教师和学生反映不太好懂的地方进行了重新表述。

然后把主要精力放在MATLAB部分。对MATLAB基本知识一节进行了重新编写和组织,内容的选取和叙述方法使得学生更加简明易懂,更好地快速入门,为后面章节的应用打好基础。在MATLAB的应用方面,重新设计了大量的MATLAB例题,使得信号与系统理论的连续部分和离散部分的每个基本分析方法都与MATLAB应用更加相得益彰。书中所有MATLAB程序都重新经过运行,所有结果都与上机分析结果一致,以帮助学生在课后进一步理解相应理论知识,掌握计算机仿真的基本方法,了解相关理论在工程中的应用。同时,书中MATLAB例题的选取十分注意与课后上机练习相关,留给学生培养创新能力的机会。

对全书各章的习题做了精减,其中标“*”的习题,难度较大,有精力的学生,可以选做。

本书由桂林电子科技大学徐亚宁、苏启常编著。第1、2、3、7章由徐亚宁编写;第4~6章,以及有关MATLAB的所有内容和上机练习由苏启常编写。

限于水平,书中难免仍有不妥或错误之处,恳请读者指正。

Email: xuyanin@guet.edu.cn suqch@guet.edu.cn

编著者

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 信号与系统	(1)
1.2 信号的描述与分类	(2)
1.3 系统的描述与分类	(4)
1.3.1 连续时间系统及其描述	(4)
1.3.2 离散时间系统及其描述	(6)
1.4 LTI 系统的特性	(8)
1.5 信号与系统分析方法概述	(10)
1.6 MATLAB 基本知识	(11)
1.6.1 MATLAB 简介	(11)
1.6.2 MATLAB 快速入门	(12)
本章关键概念小结	(16)
习题	(16)
上机练习	(17)
第 2 章 连续时间信号与系统的时域分析	(18)
2.1 常用信号及信号的基本运算	(18)
2.1.1 常用信号	(18)
2.1.2 信号的基本运算	(20)
2.2 单位阶跃信号和单位冲激信号	(23)
2.2.1 单位阶跃信号	(23)
2.2.2 单位冲激信号	(24)
2.2.3 冲激信号与阶跃信号的关系	(25)
2.2.4 冲激信号的性质	(26)
2.3 连续系统的零输入响应	(28)
2.4 冲激响应和阶跃响应	(29)
2.5 连续系统的零状态响应——卷积积分	(31)
2.5.1 卷积积分	(31)
2.5.2 卷积积分的图解法	(33)
2.5.3 卷积积分的性质	(35)
2.6 连续系统的时域分析	(40)
2.7 MATLAB 应用举例	(42)
2.7.1 连续信号的 MATLAB 表示	(42)
2.7.2 信号基本运算的 MATLAB 实现	(43)
2.7.3 利用 MATLAB 进行系统的时域分析	(43)
本章关键概念小结	(46)

习题	(47)
上机练习	(52)
第3章 连续时间信号与系统的频域分析	(53)
3.1 周期信号的傅里叶级数分析	(53)
3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数	(53)
3.1.2 指数形式的傅里叶级数	(55)
3.1.3 周期信号频谱的特点	(59)
3.2 非周期信号的傅里叶变换分析	(59)
3.2.1 从傅里叶级数到傅里叶变换	(59)
3.2.2 频谱函数 $F(j\omega)$ 的特性	(61)
3.2.3 典型非周期信号的傅里叶变换	(62)
3.3 傅里叶变换的性质	(65)
3.3.1 线性特性	(65)
3.3.2 对称特性	(66)
3.3.3 时移特性	(67)
3.3.4 频移特性	(68)
3.3.5 时频展缩特性	(69)
3.3.6 时域微分特性	(70)
3.3.7 频域微分特性	(71)
3.3.8 时域积分特性	(71)
3.3.9 卷积特性(卷积定理)	(72)
3.3.10 能量定理(帕斯瓦尔定理)	(74)
3.4 周期信号的傅里叶变换	(76)
3.4.1 一般周期信号的傅里叶变换	(76)
3.4.2 周期信号的傅里叶级数与单脉冲信号的傅里叶变换	(78)
3.5 连续时间系统的频域分析	(79)
3.5.1 系统频域分析法	(79)
3.5.2 系统频域分析法举例	(80)
3.6 连续系统频域分析应用举例	(83)
3.6.1 无失真传输系统	(84)
3.6.2 理想低通滤波器	(84)
3.6.3 调制与解调	(85)
3.7 抽样及抽样定理	(87)
3.7.1 信号的抽样	(87)
3.7.2 时域抽样定理	(89)
3.8 MATLAB 应用举例	(91)
3.8.1 周期信号的分解与合成	(91)
3.8.2 非周期信号频谱的 MATLAB 求解	(93)
3.8.3 用 MATLAB 计算连续系统的频率响应	(94)
本章关键概念小结	(95)

习题	(96)
上机练习	(101)
第4章 连续时间信号与系统的复频域分析	(102)
4.1 拉普拉斯变换	(102)
4.1.1 双边拉普拉斯变换	(102)
4.1.2 双边拉普拉斯变换的收敛域	(103)
4.1.3 单边拉普拉斯变换	(106)
4.1.4 常用信号的拉普拉斯变换	(106)
4.2 单边拉普拉斯变换的性质	(107)
4.2.1 线性特性	(107)
4.2.2 时移特性	(108)
4.2.3 复频移(s 域平移)特性	(109)
4.2.4 尺度变换(时-复频展缩)特性	(109)
4.2.5 卷积定理	(109)
4.2.6 微分定理	(111)
4.2.7 积分定理	(112)
4.2.8 初值定理和终值定理	(114)
4.3 拉普拉斯逆变换	(116)
4.3.1 极点为实数且无重根	(117)
4.3.2 极点为复数且无重根	(118)
4.3.3 极点为多重极点	(119)
4.4 连续时间系统的复频域分析	(121)
4.4.1 微分方程的拉普拉斯变换求解	(121)
4.4.2 电路网络的复频域模型分析法	(124)
4.4.3 系统函数(转移函数)	(128)
4.5 系统特性与系统函数的关系	(130)
4.5.1 系统的因果性	(130)
4.5.2 系统的稳定性	(130)
4.5.3 由系统函数 $H(s)$ 确定频率响应	(132)
4.6 双边拉普拉斯变换	(134)
4.6.1 双边拉普拉斯变换的特性	(134)
4.6.2 系统函数与系统的稳定性	(135)
4.6.3 双边拉普拉斯逆变换	(135)
4.7 MATLAB 应用举例	(137)
4.7.1 用 MATLAB 计算拉普拉斯正反变换	(137)
4.7.2 利用 MATLAB 实现部分分式展开	(138)
4.7.3 系统的零极点图	(138)
本章关键概念小结	(140)
习题	(140)
上机练习	(146)

第 5 章 离散时间信号与系统的时域分析	(147)
5.1 离散时间信号与离散系统	(147)
5.1.1 离散时间信号概述	(147)
5.1.2 典型的离散信号	(148)
5.1.3 离散信号的基本运算	(149)
5.1.4 离散系统响应的求解方法	(151)
5.2 离散系统的零输入响应	(152)
5.3 离散系统的单位样值响应	(154)
5.4 离散系统的零状态响应——卷积和	(156)
5.4.1 卷积和	(156)
5.4.2 卷积和的性质	(157)
5.4.3 卷积和的计算	(158)
5.5 离散系统响应的时域分析	(161)
5.6 MATLAB 应用举例	(164)
5.6.1 用 MATLAB 表示离散序列	(164)
5.6.2 离散信号运算的 MATLAB 实现	(165)
5.6.3 离散系统单位样值响应的求解	(166)
5.6.4 离散系统零状态响应的求解	(167)
本章关键概念小结	(167)
习题	(168)
上机练习	(171)
第 6 章 离散时间信号与系统的 z 域分析	(172)
6.1 离散信号的 z 变换	(172)
6.1.1 z 变换的定义	(172)
6.1.2 z 变换的收敛域	(173)
6.1.3 常用离散信号的单边 z 变换	(176)
6.1.4 z 平面与 s 平面的映射关系	(177)
6.2 z 变换的基本性质	(178)
6.2.1 线性特性	(179)
6.2.2 移位特性	(179)
6.2.3 尺度变换特性	(180)
6.2.4 时间翻转特性	(181)
6.2.5 z 域微分(时域线性加权)	(181)
6.2.6 卷积定理	(181)
6.2.7 初值定理和终值定理	(182)
6.3 逆 z 变换	(184)
6.4 离散系统的 z 域分析	(186)
6.4.1 差分方程的变换解	(186)
6.4.2 系统函数	(187)
6.4.3 离散系统因果性、稳定性与 $H(z)$ 的关系	(189)

6.4.4	应用双边 z 变换分析离散系统举例	(189)
6.5	离散系统的频率响应	(190)
6.5.1	序列的傅里叶变换	(191)
6.5.2	离散系统的频率响应	(191)
6.5.3	离散系统的稳态响应	(192)
6.6	MATLAB 应用举例	(194)
6.6.1	利用 MATLAB 计算 z 变换和逆 z 变换	(194)
6.6.2	部分分式展开的 MATLAB 实现	(195)
6.6.3	利用 MATLAB 求解离散系统的频率响应	(195)
6.6.4	系统函数的零极点	(196)
	本章关键概念小结	(198)
	习题	(198)
	上机练习	(202)
第7章	系统的状态变量分析	(203)
7.1	系统的信号流程图	(203)
7.1.1	信号流程图	(203)
7.1.2	系统的信号流程图模拟	(207)
7.2	系统的状态变量分析	(209)
7.2.1	状态和状态变量	(209)
7.2.2	连续系统的状态方程和输出方程	(210)
7.2.3	连续系统状态方程和输出方程的建立	(211)
7.2.4	连续系统状态方程和输出方程的求解	(216)
7.2.5	离散系统的状态方程和输出方程的建立	(218)
7.2.6	离散系统的状态方程和输出方程的求解	(219)
7.3	MATLAB 应用举例	(220)
7.3.1	系统状态方程和输出方程的建立	(220)
7.3.2	系统状态方程的求解	(222)
	本章关键概念小结	(224)
	习题	(224)
	上机练习	(229)
部分习题答案		(230)
附录 A	部分分式展开	(244)
A.1	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中都是单实根	(244)
A.2	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中有重根	(244)
A.3	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中有共轭复根	(245)
附录 B	卷积积分表	(246)
附录 C	常用周期信号的傅里叶系数表	(247)
附录 D	常用序列单、双边 z 变换对	(248)
附录 E	常用信号的傅里叶变换及其频谱图	(249)
参考文献		(252)

第 1 章 绪 论

内 容 提 要

本章介绍信号与系统的基本概念。内容包括:信号与系统的概念;信号的描述和分类;系统的描述和分类;LTI 系统的特性;信号与系统的分析方法概述等。

1.1 信号与系统

在人类认识和改造自然的过程中都离不开获取自然界的**信息**。所谓**信息**,是指存在于客观世界的一种事物形象。千万年来,人类用自己的感觉器官从客观世界获取各种信息,如语言、文字、图像、声音、自然景物等。可以说,我们是生活在信息的海洋之中,因此获取信息的活动是人类最基本的活动之一。

信息和消息密切相关,所谓**消息**,是指用来表达信息的某种客观对象,如电报中的电文、电话中的声音,电视中的图像等都是消息。通常我们把欲传输的语言、图像、文字、数码等统称为**信息**。

很久以来,人类曾寻求各种方法来传递信息(消息)。从利用手势、声音、光这类非语言传播发展到语言传播,是人类信息传播史上的第一次革命;文字的出现,印刷术、纸张的发明和推广使用,是人类信息传播史上的第二次革命;第三次信息传播革命是与电磁波传播媒介联系在一起的,如电报、电话、无线电广播、电视乃至通信卫星等一系列现代电磁波传播媒介的发现,这是人类信息传播史上具有划时代意义的革命。可见,消息的传送一般不是直接的,而必须借助于一定形式的信号才便于传输和处理。所以,信号是指消息的表现形式,如电信号、光信号和声音信号等。本课程着重研究电信号的分析、传输和处理。由于信号是带有信息的某种物理量,这些物理量的变化包含着信息,因此更具体地将信号定义为带有信息的随时间变化的物理量。

为了实现某些特定的功能(如能量转换或处理信息),人们把若干个部件有机地组合成一个整体,这样的整体就是一个**系统**。所以,我们将系统定义为由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。如通信系统、控制系统、电力系统、机械系统等。系统的概念不仅适用于自然科学领域,还适用于社会科学领域。图 1-1 就是一个典型的通信系统示意图。

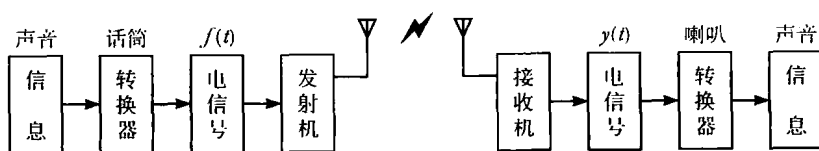


图 1-1 典型的通信系统

信号、电路与系统之间有着十分密切的联系。信号作为运载信息的工具,而电路或系统则作为传送信号或对信号进行加工处理的组合。所以,离开了信号,电路与系统将失去意义。再看电路与系统之间的区别。研究系统主要看它具有怎样的功能和特性,能否满足所给定的信号形式的传输和处理的要求;而研究电路问题主要研究电路结构和元件参数。系统问题注重全局,而电路问题则关心局部。所以,电路与系统之间的主要差异是处理问题的角度不同。近年来,由于大规模集成技术的发展,使电路与系统的区分很难明确。所以,在本书中,电路与系统二者通用。

1.2 信号的描述与分类

描述信号的基本方法是建立信号的数学模型,即写出信号的数学表达式。一般地,描述信号的数学表达式都以时间为变量,即数学表达式都是时间的函数,绘出函数的图像称为信号的波形。本书中信号的描述采用两种方法:函数表达式和波形。所以,在下面的叙述中,信号与函数两词不加区分。

按照信号的不同性质和数学特征,可以有多种不同的分类方法。下面的五种分类方法,是目前常用的方法。

1. 确定信号与随机信号

若信号被表示为一个确定的时间函数,对于指定的某一时刻,可确定一个相应的函数值,这种信号称为确定信号或规则信号。例如我们所熟知的正弦信号。

但是,实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性,如果信号不是自变量(时间)的确定函数,即对某时刻 t ,信号值并不确定,而只知道取某一数值的概率,此类具有统计规律的信号称为无规则信号或随机信号。无线信道中的干扰和噪声就是这类随机信号。

本书仅讨论确定信号。但应该指出,随机信号及其通过系统的研究,是以确定信号通过系统的理论为基础的。

2. 连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。

如果在所考虑的时间区间内,除有限个间断点外,对于任意时间值都有确定的函数值与之对应,这样的信号称为连续信号,通常用 $f(t)$ 表示。例如

$$f_1(t) = 10\cos\pi t; \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

或可用波形表示连续信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,如图1-2所示。

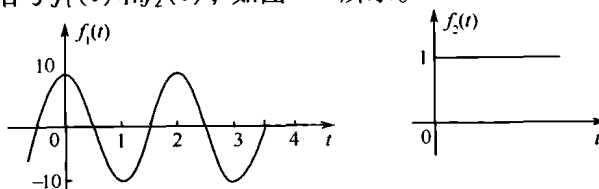


图 1-2 连续时间信号

实际上,连续信号就是函数的定义域是连续的。至于值域,可以是连续的,也可以不是。如果函数的定义域和值域都是连续的,则该信号称为模拟信号。但在实际应用中,模拟信号和连续信号两词往往不做区分。

如果只在某些不连续的时间瞬时才有确定的函数值对应,而在其他时间没有定义,这样的信号称为离散信号,通常用 $f(n)$ 表示。有定义的离散时间间隔可以是均匀的,也可以不均匀。一般都采用均匀间隔,将自变量用整数序号 n 表示,即仅当 n 为整数时 $f(n)$ 才有定义。例如

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ 1, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}; \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

或者可用波形表示离散信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$, 如图 1-3 所示。

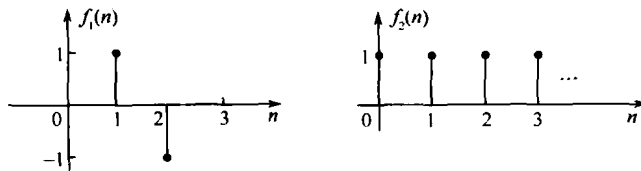


图 1-3 离散时间信号

同样,离散信号就是函数的定义域是离散的,只取规定的整数。若函数的值域也是离散的,则该信号称为数字信号。在理论分析中离散信号和数字信号往往也不予区分。

3. 周期信号与非周期信号

所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始,而且是无始无终的信号,以连续时间信号为例,它们的数学表达式满足

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中, T 为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程,便可确知它在任一时刻的数值。

非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 T 趋于无限大,则成为非周期信号。

4. 能量信号与功率信号

为了知道信号能量或功率的特性,常常研究信号 $f(t)$ (电流或电压) 在 1Ω 电阻上所消耗的能量或功率。信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$ 。在时间间隔 $-T < t < T$ 内(这里 T 不是周期)消耗的能量为

$$W = \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时,信号 $f(t)$ 的总能量为

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-2)$$

信号的平均功率为
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

由于被积函数是 $f(t)$ 的绝对值的平方,所以信号能量 W 和功率 P 都是非负实数,即使 $f(t)$ 是复函数也一样。

应用式(1-2)、式(1-3)计算信号在 1Ω 电阻上的总能量及平均功率时,可能有三种情况:一种是总能量为有限值而平均功率为零,即 $0 < W < \infty$ 和 $P \rightarrow 0$; 另一种是总能量为无限大而平均功率为有限值,即 $W \rightarrow \infty$ 和 $0 < P < \infty$; 第三种是总能量和平均功率均为无限大,即 $W \rightarrow \infty$ 和 $P \rightarrow \infty$ 。通常把总能量有限的信号称为能量信号,平均功率有限的信号称为功率信号。一般而言,周期信号都是功率信号,而非周期信号有的是能量信号,有的是功率信号,有的既不是能量信号也不是功率信号。任何信号不可能既是能量信号又是功率信号。

5. 一维信号与多维信号

从数学表达式来看,信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数,这是一维信号,而一张黑白图像每个点(像素)具有不同的光强度,任一点又是二维平面坐标中的两个变量的函数,这是二维信号。实际上还可能出现更多维数变量的信号,例如电磁波在三维空间中传播,若同时考虑时间变量就构成四维信号。在以后的讨论中,一般情况下只研究一维信号,且自变量为时间。

1.3 系统的描述与分类

从 1.1 节中我们知道,系统与信号密切相关,用图 1-4 说明二者之间的关系。

从外部引入系统的量称为输入信号或激励信号;在输入信号作用下,系统的响应称为输出信号。系统分析,就是要找出输入信号和输出信号之间的关系。为此,首先要对系统进行描述,即要建立系统的数学模型,然后用数学方法进行求解,对所得结果进行物理解释,并赋予物理含义。



图 1-4 信号与系统的关系

本书中对系统采用两种描述方法:数学模型和模拟框图。由于连续时间系统和离散时间系统的两种描述方式有所不同,在此不对系统的这两种描述方法进行详细叙述,而放在 1.3.1 节和 1.3.2 节中详细介绍,并作为本节的重点内容。

关于系统的分类,也有许多划分方法。通常将系统分为:连续时间系统与离散时间系统,即时系统与动态系统,集总参数系统与分布参数系统,线性系统与非线性系统,时变系统与时不变系统等。本书主要讨论线性时不变(Linear Time-Invariant, LTI)系统,包括连续时间 LTI 系统和离散时间 LTI 系统。

1.3.1 连续时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是连续信号,则称该系统为连续时间系统,简称为连续系统,如图 1-5 所示,图中 $f(t)$ 是输入, $y(t)$ 是输出。

描述连续系统的方法有数学模型和模拟框图两种。下面举例说明这两种方法。

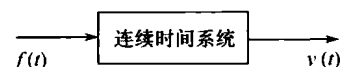


图 1-5 连续时间系统

【例 1-1】 图 1-6 所示 RC 电路,求电容 C 两端的电压 $y(t)$ 与输入电压源的关系。

解:根据 KVL 及元件的伏安关系写出方程

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

整理为
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}f(t)$$

这是一个一阶线性微分方程。

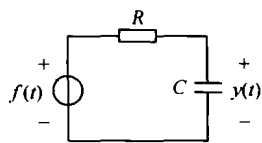


图 1-6 例 1-1 的图

【例 1-2】 图 1-7 所示电路, $f(t)$ 为激励电流源,试写出响应电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 与激励的关系。

解:由 KCL 可得

$$i_1(t) + i_2(t) = f(t) \quad \text{①}$$

由 KVL 及元件伏安关系得

$$Ri_1(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau \quad \text{②}$$

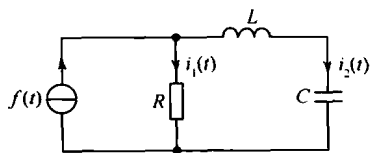


图 1-7 例 1-2 的图

将式②微分,再将式①代入并整理得

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_1(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} f(t)$$

和
$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_2(t) = \frac{R}{L} \frac{df(t)}{dt}$$

可见,这是二阶线性微分方程。

一般而言,描述一个 n 阶线性连续系统,总可以用 n 阶线性微分方程描述,即

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中, $y(t)$ 是所求的响应变量, $f(t)$ 是已知的激励变量, $a_0 \sim a_{n-1}$, $b_0 \sim b_m$ 为常数。微分方程即为描述连续系统的数学模型。

除了利用微分方程描述连续系统之外,还可借助模拟框图 (block diagram) 描述,即用一些基本运算单元,如标量乘法器 (倍乘器)、加法器、乘法器、微分器、积分器、延时器等,构成描述系统的模拟框图。表 1-1 给出了这些常用基本运算单元的符号及其各自的输入输出关系。

表 1-1 常用的基本运算单元

运算单元	框图	输入输出关系
标量乘法器		$y(t) = af(t)$
微分器		$y(t) = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t)$
积分器		$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$
延时器		$y(t) = f(t - \tau)$
加法器		$y(t) = f_1(t) + f_2(t)$
乘法器		$y(t) = f_1(t)f_2(t)$

【例 1-3】 某连续系统的模拟框图如图 1-8 所示,写出该系统的微分方程。

解:系统的模拟框图中有两个积分器,所以描述该系统的是二阶微分方程。由积分器的输入输出关系可知,若输出设为 $y(t)$,则两个积分器的输入分别为 $y'(t)$ 和 $y''(t)$,如图 1-8 中所示。从加法器的输出可得

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t)$$

整理得

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

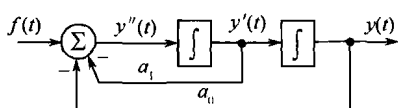


图 1-8 例 1-3 的图

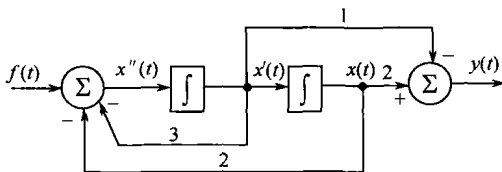


图 1-9 例 1-4 的图

【例 1-4】描述某连续系统的模拟框图如图 1-9 所示,写出该系统的微分方程。

解:图 1-9 中含有两个积分器,仍然是二阶系统。因为响应 $y(t)$ 不是积分器的输出,故设中间变量 $x(t)$,如图 1-9 所示。从加法器的输出可得

$$x''(t) = -3x'(t) - 2x(t) + f(t)$$

即

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t) \quad \text{①}$$

和

$$y(t) = -x'(t) + 2x(t) \quad \text{②}$$

为求出响应 $y(t)$ 与激励 $f(t)$ 之间关系的微分方程,要消去中间变量 $x(t)$ 。由式②得

$$2y(t) = -2x'(t) + 4x(t)$$

$$3y'(t) = -3x''(t) + 6x'(t)$$

$$y''(t) = -x'''(t) + 2x''(t)$$

将以上三式相加得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]' + 2[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]$$

考虑式①有

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$$

1.3.2 离散时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是离散信号,则称该系统为离散时间系统,简称离散系统,如图 1-10 所示,图中 $f(n)$ 是输入(激励), $y(n)$ 是输出(响应)。

描述离散系统的方法也有两种:数学模型和模拟框图。下面就来讨论这两种描述方法。

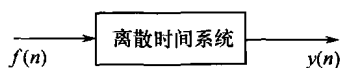


图 1-10 离散时间系统

【例 1-5】某人从当月起每月初到银行存款 $f(n)$ (元),月息 $r=1\%$ 。设第 n 月初的总存款数为 $y(n)$ (元),试写出描述总存款数与月存款数关系的方程式。

解:第 n 月初的总存款数应由三项组成,即第 n 月初之前的总存款数 $y(n-1)$ 、第 n 月初存入的存款数 $f(n)$ 和第 n 月初之前的利息 $ry(n-1)$ 。所以有

$$y(n) = (1+r)y(n-1) + f(n)$$

即

$$y(n) - (1.01)y(n-1) = f(n)$$

这是一个一阶常系数的差分方程。

事实上,一个 N 阶线性离散系统可以用 N 阶线性差分方程来描述。差分方程有前向差分方程和后向差分方程两种。 N 阶前向差分方程的一般形式为

$$\begin{aligned} & y(n+N) + a_{N-1}y(n+N-1) + \cdots + a_0y(n) \\ & = b_M f(n+M) + b_{M-1}f(n+M-1) + \cdots + b_0f(n) \end{aligned} \quad (1-5)$$

N 阶后向差分方程的一般形式为

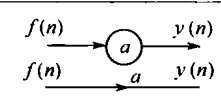
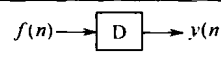
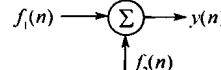
$$\begin{aligned} & y(n) + a_1y(n-1) + \cdots + a_Ny(n-N) \\ & = b_0f(n) + b_1f(n-1) + \cdots + b_Mf(n-M) \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中, $a_0 \sim a_N, b_0 \sim b_M$ 都是常数。

后向差分方程和前向差分方程并无本质差异,用哪种方程描述离散系统都可以,但考虑到通常研究的 LTI 离散系统的输入、输出信号多为因果信号($f(n)=0, y(n)=0, n < 0$),故在系统分析中一般采用后向差分方程。差分方程即为描述离散系统的数学模型。

除了利用差分方程描述离散系统之外,还可以借助模拟框图描述。与描述连续系统相类似,也是用一些基本运算单元构成描述系统的模拟框图。表 1-2 给出了描述离散系统的基本运算单元及其输入、输出关系。

表 1-2 描述离散系统常用的基本运算单元

运算单元	框图	输入输出关系
标量乘法器		$y(n) = af(n)$
延迟单元		$y(n) = f(n-1)$
加法器		$y(n) = f_1(n) + f_2(n)$

【例 1-6】 某离散系统的模拟框图如图 1-11 所示,写出该系统的差分方程。

解: 系统模拟框图中有两个延迟单元,所以该系统是二阶系统。由各运算单元的输入输出关系可知,若输出设为 $y(n)$,则图中两个延迟单元的输出分别为 $\frac{1}{6}y(n-1)$ 和 $\frac{1}{6}y(n-2)$ 。从加法器的输出可得

$$\frac{1}{6}y(n) = -5 \times \frac{1}{6}y(n-1) - 4 \times \frac{1}{6}y(n-2) + f(n)$$

整理得

$$y(n) + 5y(n-1) + 4y(n-2) = 6f(n)$$

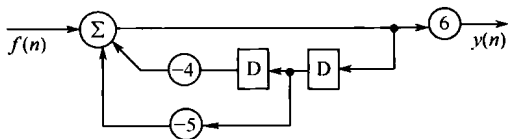


图 1-11 例 1-6 的图

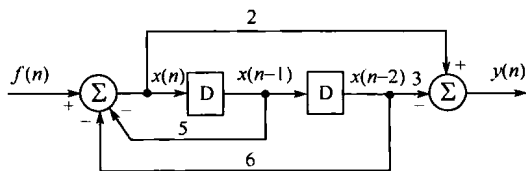


图 1-12 例 1-7 的图

【例 1-7】 某离散系统如图 1-12 所示,写出该系统的差分方程。

解: 图 1-12 中含有两个延迟单元,所以该系统为二阶系统。设第一个加法器的输出为 $x(n)$, 根据各单元的输入输出关系有

$$x(n) = -5x(n-1) - 6x(n-2) + f(n)$$

即 $x(n) + 5x(n-1) + 6x(n-2) = f(n)$ ①

和 $y(n) = 2x(n) - 3x(n-2)$ ②

为消去中间变量 $x(n)$ 及 $x(n-1)$, $x(n-2)$, 由式②可得

$$5y(n-1) = 10x(n-1) - 15x(n-3) \quad ③$$

$$6y(n-2) = 12x(n-2) - 18x(n-4) \quad ④$$

将②, ③, ④三式相加得

$$y(n) + 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2[x(n) + 5x(n-1) + 6x(n-2)] - 3[x(n-2) + 5x(n-3) + 6x(n-4)]$$

考虑到式①及其延迟, 可得

$$y(n) + 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2f(n) - 3f(n-2)$$

1.4 LTI 系统的特性

本书着重研究确定信号激励下集总参数线性时不变系统(LTI 系统)。为便于全书讨论, 下面将 LTI 系统的一些基本特性进行说明。这些 LTI 系统的特性, 既适用于连续 LTI 系统, 也适用于离散 LTI 系统。

1. 线性

线性性质包含两个内容: 齐次性和可加性。对于图 1-13 所示的一个 LTI 系统, 激励为 $f(t)$ 或 $f(n)$, 用 $f(\cdot)$ 表示。响应为 $y(t)$ 或 $y(n)$, 用 $y(\cdot)$ 表示, 则有

$$f(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) \quad (1-7)$$

设 a 为任意常数, 若 $f(\cdot)$ 增大 a 倍时, 其响应 $y(\cdot)$ 也增大 a 倍, 即

$$a f(\cdot) \longrightarrow a y(\cdot) \quad (1-8)$$



图 1-13 LTI 系统

则称该系统是齐次的或均匀的, 具有齐次性。

若系统对于激励 $f_1(\cdot)$ 与 $f_2(\cdot)$ 之和的响应等于各个激励单独作用所引起的响应之和, 即

$$f_1(\cdot) \longrightarrow y_1(\cdot), \quad f_2(\cdot) \longrightarrow y_2(\cdot) \\ \text{有} \quad f_1(\cdot) + f_2(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot) \quad (1-9)$$

则称该系统是可加的, 具有可加性。

若系统既是齐次的, 又是可加的, 则称该系统是线性的, 具有线性特性, 即

$$a_1 f_1(\cdot) + a_2 f_2(\cdot) \longrightarrow a_1 y_1(\cdot) + a_2 y_2(\cdot) \quad (1-10)$$

【例 1-8】 某连续系统的输入、输出关系为

$$y(t) = \frac{1}{12} f(t) - \frac{5}{6}$$

判断该系统是否是线性系统。

解: 设 $f_1(t) \longrightarrow y_1(t)$, $f_2(t) \longrightarrow y_2(t)$, 则有

$$y_1(t) = \frac{1}{12} f_1(t) - \frac{5}{6} \quad ①$$

$$y_2(t) = \frac{1}{12} f_2(t) - \frac{5}{6} \quad ②$$