

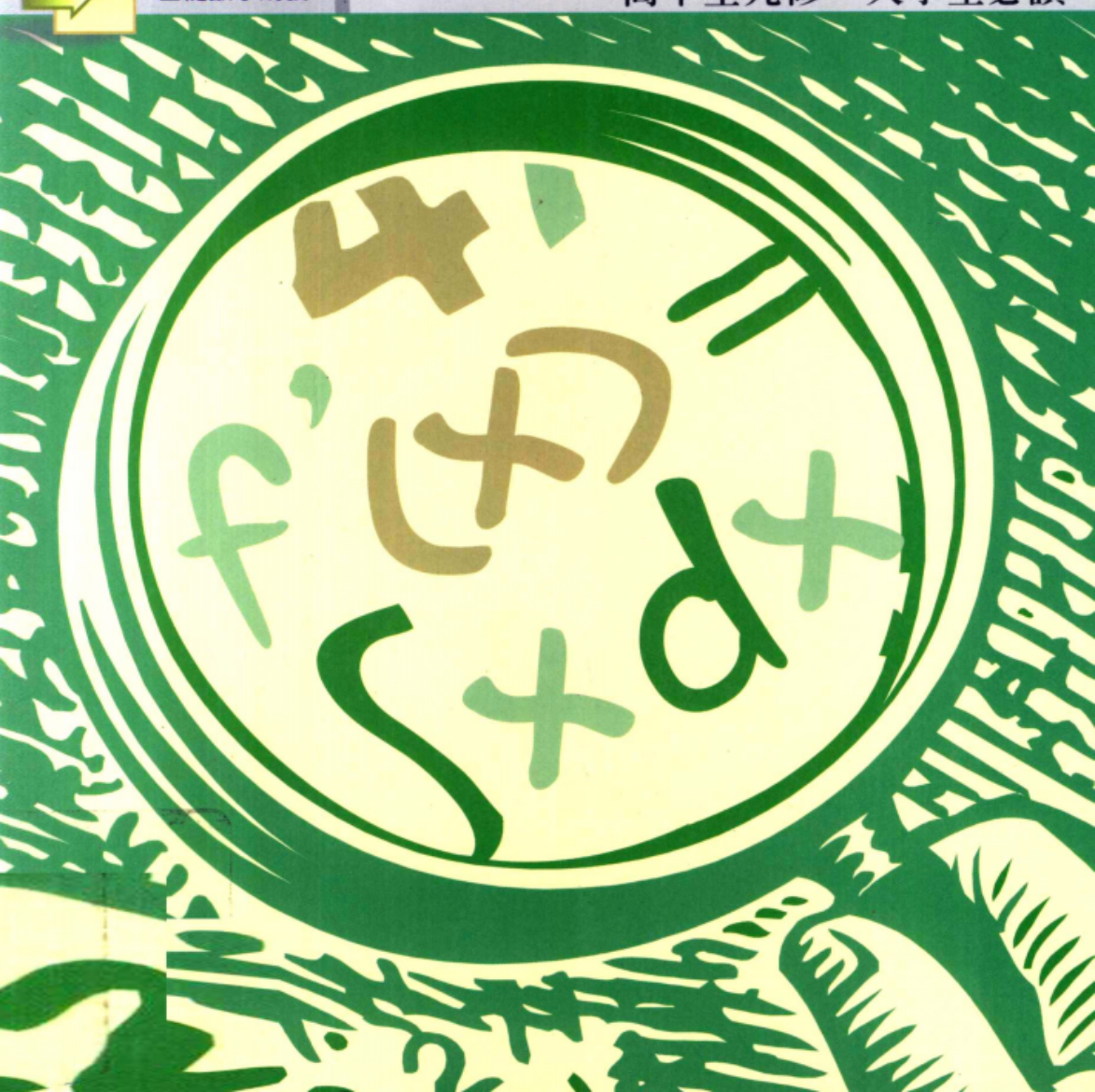
基礎分析學

項武義 著

返璞歸真 ◆ 源於自然，根於本質
平實近人 ◆ 精中求簡，以簡馭繁
引人入勝 ◆ 易學好懂，能懂會用

基礎數學講義

高中生先修・大學生必讀





基礎數學講義

- 基礎代數學
- 基礎幾何學
- 基礎分析學



ISBN 978-957-11-5527-2 (314)



9 789571 155272

00370

五南圖書出版公司

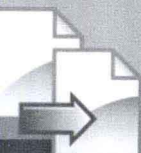
基礎分析學

返璞歸真 ◆ 源於自然，根於本質
平實近人 ◆ 精中求簡，以簡馭繁
引人入勝 ◆ 易學好懂，能懂會用

項武義 著

基礎數學講義

高中生先修 · 大學生必讀



五南圖書出版公司 印行

國家圖書館出版品預行編目資料

基礎分析學／項武義著。——初版。——臺北

市：五南，2009.03

面：公分

ISBN 978-957-11-5527-2 (平裝)

1. 數學分析

314

98000364



5621

基礎分析學

作 者 — 項武義

發行人 — 楊榮川

總編輯 — 龐君豪

主 編 — 黃秋萍

責任編輯 — 蔡曉雯

封面設計 — 簡愷立

出 版 者 — 五南圖書出版股份有限公司

地 址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電 話：(02)2705-5066 傳 真：(02)2706-6100

網 址：<http://www.wunan.com.tw>

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

劃撥帳號：01068953

戶 名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室/台中市區中山路6號

電 話：(04)2223-0891 傳 真：(04)2223-3549

高雄市駐區辦公室/高雄市新興區中山一路290號

電 話：(07)2358-702 傳 真：(07)2350-236

法律顧問 元貞聯合法律事務所 張澤平律師

出版日期 2009年3月初版一刷

定 價 新臺幣370元

出版聲明

本書為人民教育出版社獨家授權的中文繁體字版本，僅限於臺灣地區出版發行。本書專有出版權屬人民教育出版社所有，該專有出版權受法律保護。

本數學講義共分三冊，分別對於基礎數學中的：基礎代數學；定性與定量平面幾何和立體幾何基礎論；向量幾何、解析幾何與球面幾何；單元微積分和多元微積分，做了一遍反璞歸真探本究源的研討與建構。希望它能有助於青年學子們學好基礎數學，並從中獲得啓發與奠基；也希望它能有助於正在教學育人、辛勤耕耘的老師們，把基礎數學教得更加精簡實用、平實近人、引人入勝。這也就是我試著寫這樣一組講義的本意和心願。

縱觀古今中外，整個人類理性文明的發展史中，基礎數學一直扮演著核心的角色。它不但是人類世代相承，對於大自然由表及裡精益求精的認知、研究的基本工具，也是整個自然科學在思想上、在方法論上的先行者和奠基者。由此可見，學習基礎數學乃是一個有智而且有志的青年，作為一個人類理性文明的繼承者的啓蒙與奠基，也是把自己培訓、茁壯成一個善於認識問題、善於解決問題、富有理性的人的不二法門。例如幾何學是當之無愧的第一科學，它對於我們和宇宙萬物共存於其間的空間，其精簡美妙的本質精益求精的認知，乃是理性文明發展中貫串古今的重大篇章。在《基礎幾何學》、《基礎分析學》的研討中，讀者應該讓自己身歷其境地去體會先賢們如中國古代善用面積的測量術；Hippasus 不可公度性的發現，Eudoxus 以逼近法對於定量幾何基礎論的重建與拓展，Archimedes 繼承 Eudoxus 窮盡原理的妙用；圓錐截線的故事，解析幾何的發明，非歐幾何的發現，高維勾股定理與 Grassmann 代數等等；它們乃是理性

文明史中，引人入勝、發人深思的詩篇。

代數學的基本思想就是善用運算律去探討各種各樣代數問題的系統解法。在運算律中，最具威力者首推分配律；而在各種各樣代數問題之中，線性問題乃是最為簡單者。在中國古算中的韓信點兵法（亦即孫子算法，因為它可考的最早出處是東漢的孫子算經），業已把如何善用分配律去解決線性問題的基本思想，直截了當地展現無遺。從本書各冊的研討中，可以看到線性問題既簡單又基本而且廣泛有用，例如《基礎幾何學》中所討論的向量幾何：將空間的平移（亦即位移向量）妥加組織，引入自然的代數結構（亦即加法、倍積、內積和 $\times$ 積），則空間的基本定理（如相似三角形定理、勾股定理、面積公式、高維勾股定理）都可以轉換成分配律。由此可見，歐氏空間的幾何結構可以全面代數化，而其所得的向量代數則是一種線性代數（Linear Algebra）。再者，微分學的基本思想乃是有系統地運用局部線性逼近去分析各種各樣變量問題；而微分和積分運算本身又都是線性運算。讀者不但應該認識到線性代數的基本重要性和廣泛可用性，而且也應該體會到解決各種各樣的線性問題的基本方法，實乃中國古算中的韓信點兵法一以貫之者也。

概括地來說，基礎代數學的基礎理論有二，其一是對於一元多項式的基礎理論，例如插值公式、泰勒公式和輾轉相除求最高公因式等；其二則是行列式和線性方程組的基礎理論。而這些基礎理論的發現與論證的基本方法都是歸納法，亦即由低次到高次，由少

元到多元，逐步歸納地去探索、研討和論證。總之，歸納法乃是代數學治學的基本方法，而善用分配律則是代數學的基本想法。

宇宙中各種各樣事物和現象，動態乃是其常態，而靜態則僅僅是其中極為少見的特例。由此可見，若要從這樣無窮無盡、不斷變化的萬物萬象中，由表及裡探索其中所蘊含的規律性，當然就需要有一種善於分析變量問題的數學。數理分析（Mathematical Analysis）乃是我們由表及裡，定量地深入探索大自然的本質的基本方法；而分析學（Analysis）也就是如此發展起來的一門數學。《基礎分析學》所研討的單元、多元微積分則是分析學的基礎理論。

當我們要對於某一種變量問題運用數理分析去探索其本質與規律時，分別以變元表達其中所含的各種變量，以函數關係去描述其各個變量之間的相互關聯（interlocking relationship）；而對於這樣一個變量問題的數理分析也就是要對於描述它的那些函數關係（functional relations）作系統的定量分析。其中最簡單的情形就是那種只含兩個變元，而且其一可以表達成其另一之函數（例如 $y=f(x)$ ）。對於這種最簡的情形的基礎理論就是單元微積分，它是進而研討一般的多元、多關係的數理體系的雛形和奠基。在《基礎分析學》所研討的多元微積分乃是以單元微積分所得者為基礎，進而推廣拓展而成者，它才是能夠對於一般多元、多關係的變量問題作系統數理分析的基礎理論。其中全微分和隱函數定理、外微分和 Stoke's 定理尤為基本重要。

在數理分析中，通常把所要研討的數理體系所含的諸多變元看做一個點的坐標，則它們總體的變域就是坐標空間中的某種子集。隱函數定理的幾何意義是：由一組可微的函數關係所描述的子集，在其描述函數的全微分是線性無關之點（稱之為規則點）的鄰近乃是一片 $(n-m)$ 維曲面，而且可以選取適當的 $(n-m)$ 個變元作為其局部坐標系。再者，定義在這種子集上（或某種包含它的坐標空間的子集之上）的函數、外微分形式或向量場，則是各種各樣植根於空間的解析事物（analytic objects）。在《基礎分析學》第九章所討論的積分則是空間中的幾何事物和上述解析事物之間自然的相互作用所得之值，其關係有如《基礎代數學》的附錄中所討論的向量空間和其偶空間之間的相互作用。由此可見，多元積分所描述者，乃是空間中的幾何事物（即 k 維子集）和外微分形式這種解析事物之間的自然對偶關係，而微積分基本定理則可以推廣為廣義 Stoke's 定理！它證明了解析的外微分和幾何的「求邊界」兩者之間的對偶性。這的確是一種應用廣闊、意義深遠的推廣，讀者宜多讀多想它幾遍，然後再在它的各種各樣的應用之中（例如電磁學、微分幾何學、微分拓樸學等等）逐步、逐樣地去體會其用場和意義。

項武義



人類生存的地球，比之於無限的宇宙實乃無比的渺小；而自古至今人類的理性文明只不過數千年，比之於地球上幾十億年的生命歷史又是無比的短暫。但是人類得天獨厚，具有幾十億年逐步進化而得——奇妙超群的腦力；再者，人類還能善用天賦的腦力，創造語言與文字，使得全人類的聰明才智不但能夠群策群力、集思廣益，而且還能世代相承、精益求精，創造了博大精深的理性文明。作為一個現代人，我們不但具有天賦的腦力，而且還承繼了數千年來全人類的聰明才智，世代相承探討研究的成果，總稱之謂理性文明（Civilization of Rational Mind）。它使得每一位肯學、肯想的人生，大大地拓展了其能夠理解的時空。

綜觀自古至今的理性文明，歷代的先智先賢用來探索宇宙的基本思想和方法其實是既自然又樸實的，大體上可以簡述如下：

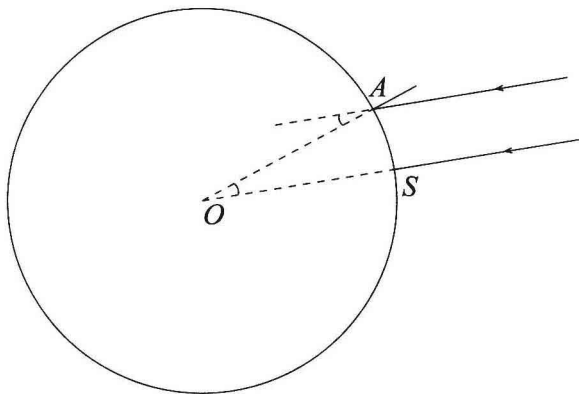
先用歸納法，師法自然，實事求是。例如觀測天象，記錄晝夜之長短、四季的變化等等。然後再用解析思維把實驗探索所得的各種各樣認知加以綜合、演繹，逐步由定性到定量，由表象到內在結構，精益求精地研討大自然中萬象萬物的基本結構和基本原理。

總之，實驗歸納和綜合演繹乃是兩種相輔相成交互進展的

科學方法，而數理分析（Mathematical Analysis）則是後者的基本方法和有力工具，分析學的基礎理論也就是如此產生的。我們將在往後章節中簡明扼要地討論數理分析在人類理性文明中產生的過程和其所扮演的角色。

在我們開始逐章逐節作系統研討之前，且以一個既清晰簡樸又具有歷史意義的範例，來對於數理分析的本質和要點作一初步解說。那就是遠在紀元前三世紀 Eratosthenes（約 276～194 B.C.）所達成者：人類對於地球大小的首次定量估算。

話說當年，Eratosthenes 乃是古希臘文明後期中心所在地 Alexandria 的圖書館館長，他是一位精通當時的天文地理的博學之士。首先，當年業已由月蝕、航海的觀察得知我們所居住的大地乃是一個大球；而且太陽和地球之間的距離要比地球和月亮之間的距離還要大許多倍。總之，同時照射到地球上各地的太陽光基本上就是平行光線。再者，他還知得人們在 Alexandria 正南方尼羅河出山口的 Syene（現今的 Aswan）的一口深井，觀察到夏至正午的太陽光可以直射井底，不留任何井壁的陰影。換言之，在 Syene 夏至正午的太陽光乃是垂直於該井的水平面者也。但是在 Alexandria 的夏至正午的陽光，則和井壁大約有 $\frac{1}{50}$ 周角（亦即 7.2 度）的夾角。當年 Eratosthenes 大概就用如下圖所示的圖解，把上述幾個天文地理的知識加以綜合分析。



他以一個圓表示過 Alexandria 和 Syene 的經圓（longitudual circle），以兩條平行線表達分別照射在 Alexandria 和 Syene 的夏至正午的陽光。從上述簡明扼要的抽象表述，就可以用熟知的幾何知識推論以下幾點：其一是過 Syene 的光線垂直於球面，所以其延長線乃是過球心 O 者也。其二是由平行線和 Alexandria-球心聯線的內錯角相等得知 $\angle AOS$ 也等於 $\frac{1}{50}$ 周角。由此可得整個經圓的周長大約是 Alexandria 和 Syene 之間的距離的 50 倍！

Eratosthenes 這位老先生並沒有去實地測量上述兩地之間的距離。他只是去市集向往來於 Alexandria 和 Syene 之間的駱駝商隊，詢問他們一共要走幾天才能由 Syene 走到 Alexandria，而且每天大約能走多少希臘里（Stadia）。他就將詢問所得的天數（50天）和每天的里程（100 Stadia）得出下列經圓圓周長度的估計，亦即

$$50 \times 50 \times 100 = 250,000 \quad (\text{Stadia})$$

這就是人類對於其所生存的地球大小的第一次定量估計。

假如要把它和現代測算的地球大小作個比較，當然就要把希臘里（Stadia）和公里（kilometer）的長度作一換算。在這裡有一個小小的疑案：Stadia 者，乃是當年運動場（Stadium）的跑道的長度是也。但是目下餘留的古希臘運動場的跑道卻有兩種長短不一的長度。總之，以較長者來換算則其估計比實測要大些，而以較短者來換算則其估計比實測要小些，而相去都在 10% 之內。

如今回顧 Eratosthenes 在兩千多年前，能夠把當時所知道的天文、地理和幾何知識，用簡樸的圖解加以綜合分析，一舉而得數量上相當準確的地球大小的估計，它實在是人類以數理分析去理解大自然的一個傑出的典範。世世代代理性文明的繼承者，不但應該以懷古之情瞻仰它，而且更要從中學習其用法，獲得數理分析的啓蒙啓發。

PART 1 單元微積分學

第0章	導論——數系和數系的擴張	1
	0.1 自然數系.....	3
	0.2 整數數系.....	9
	0.3 有理數系.....	12
	0.4 實數系.....	14
	0.5 複數系.....	16
第1章	實數系和函數的連續性	19
	1.1 實數系的連續性.....	20
	1.2 連續函數的基本概念.....	24
	1.3 多項式函數.....	34
	1.3.1 多項式的唯一性定理與插值公式.....	34
	1.3.2 單元多項式的除法與輾轉相除求公因式.....	39
	1.3.3 Sturm 定理.....	42
	1.3.4 代數基本定理.....	45
	1.4 例題與習題.....	54
第2章	微積分	59
	2.1 變率與微分.....	60
	2.2 總和與積分.....	72
	2.3 微積分基本定理與均值定理.....	79
	2.4 例題與習題.....	87
第3章	指數函數及對數函數	101
	3.1 指數、對數函數的定義與基本性質.....	102
	3.2 指數函數與對數函數的微分.....	109

3.3	自然對數表的計算法	114
3.4	複變數指數函數和三角函數	116
3.5	複利與指數函數	119

第4章 初等函數及其應用舉例 125

4.1	多項式函數	126
4.1.1	n 階密切多項曲線	127
4.1.2	高階局部逼近與不定式之極限	130
4.1.3	插值問題的推廣	132
4.2	三角函數與反三角函數	134
4.2.1	圓的對稱性與正弦、餘弦函數的基本性質	135
4.2.2	三角定律與極坐標	137
4.2.3	等速圓周運動與正弦、餘弦的微分	138
4.2.4	等周問題 (Isoperimetric Problem)	140
4.2.5	Kepler 行星運行三定律及其數理分析	147
4.2.6	三角函數的積分計算	153
4.2.7	反三角函數及 π 的近似值計算	154
4.3	常係數常微分方程	159
4.3.1	算子符號	159
4.3.2	$p(D)=(D-\lambda)^k$ 的情形, $\lambda \in \mathbb{C}$	161
4.3.3	$p(D)$ 是一般的情形	163
4.3.4	$p(D)y=g(x)$ 的解法	166

第5章 歐氏幾何、球面幾何和非歐幾何的統一理論 169

5.1	非歐幾何的發現過程及其歷史意義	171
5.2	發現非歐幾何學的思路與突破點	173

5.3	歐氏、球面與非歐三角定律的統一理論	177
5.4	旋轉面的解析幾何	186
5.5	旋轉面的 Gauss 曲率和 Gauss-Bonnet 公式	202
5.6	結語	214
5.7	思考題與習題	216

PART 2 多元微積分學

第6章	多元函數的連續性與微分	223
6.1	多元函數的連續性	224
6.2	多元函數的微分	230
第7章	多元多關係的微分	249
7.1	隱函數定理	250
7.2	坐標變換	257
7.3	極大、極小的微分條件式	260
第8章	高維勾股定理與Grassmann代數	267
8.1	向量代數與平行體的有向體積	268
8.1.1	平面的定向與平行四邊形的有向面積	268
8.1.2	三維空間的定向和平行六面體的有向體積	270
8.2	向量內積與勾股定理的高維推廣	275
8.3	格氏代數 (Grassmann Algebra)	286
第9章	外微分與多元積分	293
9.1	多元函數的多重積分	294
9.1.1	多重積分的定義	294

9.1.2 多重積分與坐標變換	300
9.2 線積分、面積分及其高維推廣	307
9.2.1 線積分 (Line Integral)	308
9.2.2 曲面積分	310
9.2.3 例題與習題	313
9.3 外微分和微積分基本定理的高維推廣	329
9.3.1 外微分和廣義 Stoke's 定理	340
9.3.2 例題與習題	345

導論

——數系和數系的擴張

自然數系 整數數系 有理數系 實數系 複數系

0.1 自然數系

0.2 整數數系

0.3 有理數系

0.4 實數系

0.5 複數系