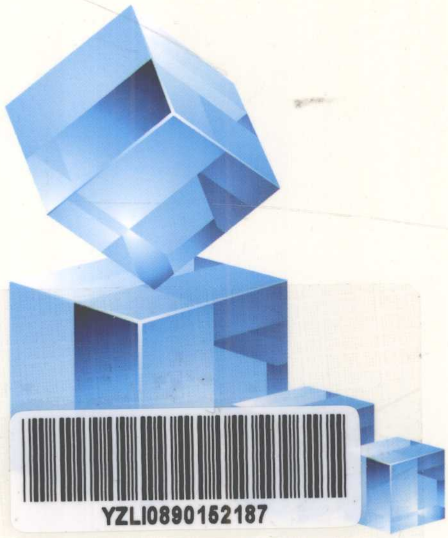
万向思维™
培养学子 全球视野
我的助理

高中课程标准实验教科书 配套助学用书
GaoZhong KeCheng BiaoZhun ShiYan JiaoKeShu PeiTao ZhuXue YongShu

教材知识详解

一直在寻找这样的老师

总主编 | 刘增利®



高中数学 必修1

配人教A版

开明出版社

教材知识详解

高中数学 必修①

配人教A版

总 主 编 刘增利

本册主编 高晓明

本册编者 高晓明 侯丽梅

参与学科审订教师：

［黄冈中学］王宪生 张 智

［郑州一中］孙士放

［郑州101中学］薛银周

［南阳一中］罗 东 杨要理 陈朝印

［南阳五中］闫德龙 崔建欣 张海燕 陆大勇 史山玲 袁泽馨

［南阳八中］李志国

［南召现代高中］张风英

［合肥工大附中］余树宝

［芜湖一中］徐月兵 武 湛

［铜陵一中］胡 俊

［芜湖县一中］章 立

［阜阳城郊中学］吴桃李 陈 峰

［阜阳红旗中学］刘 明

［寿光现代中学］王金兴 魏振恩 隋守春

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材知识详解：人教A版．高中数学：必修／刘增利主编．--北京：开明出版社，2011.5

ISBN 978-7-5131-0207-0

Ⅰ．①教… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第068274号

策划设计	万向思维研发部	**版式设计**	李诚真
总 主 编	刘增利	**出　　版**	开明出版社
本册主编	高晓明	**印　　刷**	陕西思维印务有限公司
责任编辑	范　英	**印刷质检**	高　峰
责任审读	张金英	**经　　销**	各地书店
研发统筹	河　海	**开　　本**	890×1240　1/16
创意统筹	刘书娟	**印　　张**	9.5
校订统筹	陈宏民	**字　　数**	247千字
责任录排	孙海波	**版　　次**	2011年6月第1版
封面设计	柏拉图工作室	**印　　次**	2011年6月第1次印刷
		定　　价	22.80元

主编邮箱:zbwxsw@126.com　投稿邮箱:tgwxsw@126.com

最给力的学习网——啃书网:www.kbook.com.cn

图书质量监督电话:010-88817647　售后服务电话:010-82553636

图书内容咨询电话:010-82378880转221

通信地址:北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座16层(邮编100083)

教师QQ交流群:8426522(欢迎一线老师加入,交流教学经验,共享教学资源)

ACADEMIC TEAM

万向思维 学术专家团


辽宁/林淑芬
中学化学 高级教师


辽宁/张福建
中学数学 高级教师


辽宁/敖兰其其格
中学英语 高级教师


广东/吴敏全
中学英语 特级教师


贵州/龙纪文
副研究员


安徽/章潼生
中学语文 高级教师


山东/韩际清
中学数学 高级教师


重庆/李开珂
中学数学 高级教师


新疆/卢萍
中学英语 高级教师


湖北/胡明道
中学语文 特级教师


湖南/周华辅
中学数学 高级教师


河南/骆传枢
中学数学 特级教师


四川/田间
中学化学 特级教师


北京/王大绩
中学语文 特级教师


北京/王乐君
中学英语 特级教师


福建/江敬润
中学语文 高级教师


陕西/张载锡
中学物理 特级教师


北京/周誉蔼
中学物理 特级教师


山西/田秀忠
中学语文 高级教师


浙江/施储
中学数学 正教授级


河北/潘鸿章
教授


江苏/齐迅
中学英语 特级教师


广西/邓维学
中学语文 特级教师


甘肃/郑作慧
中学数学 特级教师


北京/张立言
中学化学 高级教师


黑龙江/武钢
中学物理 副研究员


云南/李成
中学英语 特级教师


内蒙古/陈弘法
中学英语 特级教师


江西/黄翠兰
中学英语 高级教师


吉林/王鹏伟
中学语文 高级教师

一直在寻找这样的老师

当你面对教材茫然无绪，当你面对试卷百般无措，你可能需要这样一位老师：他满腹经纶，旁征博引，点石成金；他主张分享，强调深挖，激活潜能；他记忆超强，真才实学，出口成章；他久经沙场，经验丰富，秘技超群；他机敏过人，见解独到，妙语如珠，帮你拉近教材与考试之间的距离。

1 细品教材

目标导航 深入透彻地解析教材知识学习目标和方法能力要求，让你对将要进行的学习成竹在胸。

教材知识详解 梳理教材，重点突出、详略得当；解读教材，释疑解难深入浅出；探究教材，合理拓展、点点通透。

2 精析案例

典型例题解读 紧扣考点，从基础题型到综合题型，剖析典例，点拨思路，轻松提升知识应用能力。

思维误区点击 不仅告诉你正确的解题方法，还将容易做错的原因一一呈现，明确思维误区，为你指点迷津。

高考能力提升 甄选最新高考试题，明晰对应考点要求，讲解细致入微，实时了解高考目标。

3 及时训练

知识巩固训练 基础水平训练：紧扣双基，针对选题，全面验收过关。
高考水平训练：针对考点要求，选编高考能力习题，与高考零距离。

4 阶段总结

知识网络回顾 全章知识方法网络化、系统化，纷杂知识一目了然。

专题完全解读 及时总结，查漏补缺，突破重点，专题突破。

方法应用解读 总结解题方法，整理解题技巧，提供最优解题方法，轻松实现高分梦想。

全章自我检测 精选涵盖学段知识和能力要求的检测题，梯度合理，难易适中，随时检测学习成果。

你想要教材原文？**我给你**！你想要教材课后答案详解？**我给你**！
你想轻松**突破**高考考点，我也给你！
课内重难点精透剖析，课外知识巧妙迁移……你还想要什么？我**通通**都给你！
我还用结构图、清单图来帮你记忆！我这么**给力**，我就要你**好成绩**！

你的学习方法适合你吗

请你根据我们的学习方法测试表来检验一下吧！本套测试主要是对中学生的学习方法适应性的初步检测，请你根据自己学习的实际情况，做出你的选择。如所列的内容符合自己的情况，则选择“是”，不符合的选择“否”，无法确定的可选择“不确定”。

学习方法测试表

序号	测试问题	你的选择		
		是	否	不确定
1	你是否觉得学习很有趣味？			
2	你是否经常感到睡眠不足？			
3	你是否很容易就进入学习状态？			
4	你是否喜欢参加学校的集体活动？			
5	你是否觉得自己在学习上有些压抑？时常被打扰？			
6	你学习上有了困难是否能得到家长的帮助？			
7	你是否觉得自己在学习上比较轻松？			
8	你是否对不喜欢的学科就不愿意学？			
9	你是否经常与成绩好的同学进行比较？			
10	你是否学习上经常受到鼓励和表扬？			
11	你是否每天学习都有固定的时间？			
12	你是否上课时经常有些内容听不懂？			
13	你是否觉得学习主要就是上课和写作业？			
14	你是否觉得听课时总不能抓住主要的内容？			
15	你是否觉得学的知识不扎实，甚至前面学后面忘？			
16	你的作业是否都是独立完成的？			
17	你是否觉得补课没有太大的作用？			
18	你是否觉得平时学的还不错，但就是考不好？			
19	你是否只要有时间就经常看各种书？			
20	你是否会认真分析做过的试卷？			
21	你是否知道自己什么时间的记忆效果最好？			
22	你是否做过的题过段时间又不会做了？			
23	你是否觉得记单词、背课文很容易？			
24	你是否遇到学习上不懂的问题就会设法弄明白？			
25	你是否觉得有些公式定理很难记住？			
26	你是否常与同学讨论学习上的问题？			
27	你是否觉得许多不懂的问题只要多读几遍就明白了？			
28	你是否在学习上常有些应付或得过且过？			
29	你是否考虑过改进自己的学习方法？			
30	你是否经常独立思考一些问题？			

记分标准

2、5、8、12、13、14、15、18、22、25、28题选择“否”记2分，选择“是”记0分，选择“不确定”记1分；其他的题选择“是”记2分，选择“否”记0分，选择“不确定”记1分。

将各测试题分数相加，算出总分。

测试分析

60—50分：学习方法很好，学习效率比较高。多关注书中的高考专题，会使你的学习目标更明确，成绩提高更迅速。

49—30分：学习方法较好，学习效率一般。需要对书中的例题和方法点拨部分多加揣摩，理解例题所对应的知识应用策略。

29—10分：学习方法一般，学习成绩时好时坏。除了对书中的例题进行研读外，还应有针对性地选择例题对应的习题进行适时演练，达到不断巩固的目的。

10分以下：学习方法很原始，学习效率很低。有必要对书中教材详解部分逐字逐句地进行研读，尤其要对重点问题的注意事项多加关注，理解课本知识的本质。

目录

CONTENTS

金牌全解

金牌全解

目录 CONTENTS

第一章　集合与函数概念

1.1　集　合

1.1.1　集合的含义与表示

目标导航

1. 了解集合、元素的概念，初步了解元素与集合间的“属于”关系的意义，能选择自然语言、图形语言、符号语言描述不同的集合问题.
2. 理解集合中元素的三个特征，会判断一些对象的全体能否构成一个集合.
3. 理解集合的表示方法，并能用列举法、描述法正确地表示不同的集合.
4. 熟记常见数集的表示方法，掌握集合的有关术语和符号，能正确地选用恰当的方法表示集合，并能解决简单的实际问题.

旧知回顾

1. 数的集合，如：偶数的集合，通常用 $2n$ 表示，n 取整数；奇数的集合，通常用 $2n+1$ 表示，n 取整数；一元一次不等式的解的集合等.
2. 点的集合，如：圆是平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合；线段的垂直平分线是到线段的两个端点距离相等的点的集合等.

Ⅰ　教材知识详解

教材全析

1. 集合中的有关概念及相互关系

(1)元素与集合的概念：

元素：一般地，我们把研究对象统称为元素，元素通常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

集合：由一些元素组成的总体叫做集合，集合通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

(2)元素与集合的关系：元素与集合有属于和不属于两种关系.

若 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若元素 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$.

在表示集合与元素的关系时，通常用{　}表示集合，如 $A=\{a,b,c\}$.

剖析说明

(1)数学符号“$\in$”及“$\notin$”，它是表示元素与集合间的关系的专用符号，只能用在元素与集合之间，表示元素与集合的从属关系，而不能用来表示集合与集合之间的关系.

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别和联系：a 表示一个元素，$\{a\}$ 表示一个集合，该集合只有一个元素 a；它们之间的联系是 $a\in\{a\}$. 如 $\{0\}$ 与 0 是不同的，0 是一个元素，$\{0\}$ 表示由一个元素 0 构成的集合，虽然 0 表示没有，但它还是一个元素，$\{0\}$ 的元素个数不是 0 个，而是 1 个.

2. 集合中元素的特征

集合中元素具有如下三个特征：

(1) 确定性：设 A 是给定的集合，x 是某一具体的对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情形有且仅有一种成立，即 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 二者必居其一.

(2) 互异性：集合中的元素必须是互异的，即对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的.

(3) 无序性：构成集合中元素的排列是无顺序的，如 $\{1,2,3\}$ 和 $\{1,3,2\}$ 是同一集合.

剖析说明

(1)任何一个元素在不在集合中是确定的，标准不能含混不清、模棱两可. 如“高一(三)班的高个子男同学”其中的“高个子”便是一个含混不清的概念，具有相对性，因为多高才算高这个标准不好确定.

(2)在判断两个集合是否为同一集合时，需确定集合的元素是什么，如 $\{1,2\}$ 的元素是数，而 $\{(1,2)\}$ 表示的元素是点，$\{1,2\}$ 和 $\{2,1\}$ 是同一集合，而 $\{(1,2)\}$ 和 $\{(2,1)\}$ 则不是同一集合.

(3)集合中元素具有“三性”，即“确定性、互异性、无序性”，解题时要注意运用，即分析问题时，要思考能否利用“三性”找到解题的切入口，解完后要检验元素是否满足“三性”，特别是“互异性”容易被忽视，应注意.

3. 集合相等

只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合是相等的.

两个集合相等需满足两个条件：①元素个数相等；②对于

其中一个集合的任一个元素,在另一个集合中也可以找到这个元素. 如 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,c,d,b\}$,则称集合 A 与集合 B 相等.

剖析说明

判断两个集合是否相等,不能从集合的形式上看,而应判断出两个集合的所有元素,再根据集合相等的定义进行判断. 如集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$,$B=\{-1,2\}$,$A=B$.

4. 集合的表示方法

(1)自然语言法:用文字叙述的形式描述集合的方法. 其特点是通俗易懂,只要叙述清楚即可. 例如:2011 年 1 月 1 日前与我国建立外交关系的所有国家.

(2)列举法:将集合中的元素一一列举出来,写在花括号内表示集合的方法. 使用列举法时,需注意以下几点:①元素间用分隔号“,”;②元素不重复且无顺序;③对于含有较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素之间的规律表示清楚后才能用省略号.

(3)描述法:用集合中元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 其一般形式为 $\{x\in I|P(x)\}$,其中“x”是集合中元素的代表形式,“I”是 x 的范围,“$P(x)$”是元素的共同特征. “|”表示将代表元素与其特征分隔开来,使意思明确. 如:$A=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$ 与 $B=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$ 是截然不同的两个集合,集合 A 的元素是非负数 y,其实质是满足 $y=x^2$ 的所有实数 y 组成的集合;而集合 B 的元素是有序实数对 (x,y),其实质是满足 $y=x^2$ 的点集.

(4)数学中一些常用的数集及其表示方法:

①全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$.

②所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

③全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$.

④全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

⑤全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

剖析说明

(1)列表法适合表示元素有限的集合,当集合中元素的个数较少时,用列举法表示集合较为方便,而且使人一目了然.

(2)用描述法表示集合的注意事项:

①写清楚该集合中的代表元素的代号,如集合 $\{x\in\mathbf{R}|1<x<2\}$ 不能写成 $\{1<x<2\}$.

剖析说明

②集合与它的代表元素所采用的字母名称无关,只与代表元素的形式有关,如 $\{x\in\mathbf{R}|1<x<2\}$ 也可以写成 $\{y\in\mathbf{R}|1<y<2\}$,当然还可以写成 $\{a\in\mathbf{R}|1<a<2\}$.

③多层描述时,应当准确使用“且”“或”等表示元素之间关系的词汇,如 $\{x\in\mathbf{R}|x>1$ 且 $x<2\}$ 等.

④集合中不能出现未被说明的符号,如 $\{x\in\mathbf{Z}|x=3k\}$ 中的 k 未被说明,故此集合元素是不明确的.

⑤所有描述的内容都要写在集合符号内,如 $\{x\in\mathbf{Z}|x=3k\}$,$k\in\mathbf{Z}$ 便不符合要求,应将 $k\in\mathbf{Z}$ 写进集合中去,即 $\{x\in\mathbf{Z}|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

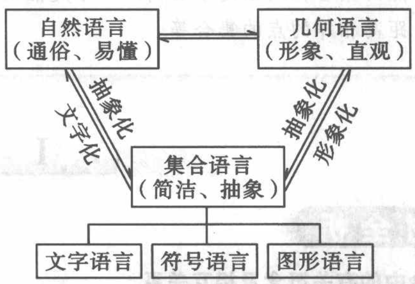
⑥如果从上下文的关系来看,表示代表元素的范围是明确的,如 $x\in\mathbf{R}$,则可以省略,更简洁.

(3)特定集合 $\mathbf{N},\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+,\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 等的意义是教材定义的,解题中可作为已知使用,不必重述它们的意义.

知识拓展

1. 集合语言

集合语言是现代数学的基本语言,也就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言. 集合语言与其他语言的关系以及集合语言的构成如下:



集合的三种语言之间可进行相互转化,在解决集合问题时,一般是将集合符号语言转化为图形语言、文字语言,这样有助于弄清集合是由哪些元素构成的,有助于提高分析和解决问题的能力.

2. 解决集合问题的关键

解决集合问题的关键是弄清集合是由哪些元素构成的. 如何弄清呢? 关键在于把抽象问题具体化、形象化. 也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示,或用图形法来表示抽象的集合,或用数轴来表示这些集合;再如,当集合的元素为有序实数对时,可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等.

Ⅱ 典型例题解读

基础题型

题型 1　元素与集合关系的理解(链接 A 卷第 3、4 题)

例 1 用符号“$\in$”和“$\notin$”填空.

(1)设集合 A 是正整数的集合,则 0______A,$\sqrt{2}$______A;

(2)设集合 B 是小于 $\sqrt{11}$ 的所有实数的集合,则 $2\sqrt{3}$______B,$1+\sqrt{2}$______B.

分析:(1)正整数是不包含 0 的自然数,如:1,2,3,…,0 和 $\sqrt{2}$ 都不属于 A;(2)因为 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$,所以 $2\sqrt{3}$ 不属于 B,

$1+\sqrt{2}<\sqrt{11}$，所以 $1+\sqrt{2}$ 属于 B.

答案：(1) $\notin$ $\notin$. (2) $\notin$ $\in$.

点拨：判断一个对象是否在集合中，需根据对象是否满足代表元素所适合的条件来确定. 若满足，则使用符号"$\in$"，否则使用符号"$\notin$".

例2 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Z}$；

(2) $(-1)^0$ ________ $\mathbf{N}^*$；

(3) 5 ________ $\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$；

(4) $(-1,1)$ ________ $\{y|y=x^2\}$；$(-1,1)$ ________ $\{(x,y)|y=x^2\}$.

分析：确定元素与集合的关系，首先要弄清各集合的含义，即其中元素的性质，再判断所给元素是否在此集合中.

答案：(1) $\notin$. (2) $\in$. (3) $\in$. (4) $\notin$ $\in$.

点拨：对于(4)中的两个集合的形式要特别注意，这是两个不同的集合.

题型2 集合中元素特征的理解（链接A卷第1、2、5、7题，链接B卷第1、2题）

例3 下列各组对象不能构成集合的是（ ）.

A. 所有的长方形

B. 方程 $x^2-3x-2=0$ 的所有实数根

C. 著名的数学家

D. 1～20以内的所有质数

分析：A，B，D都是由一些元素组成的集合，且构成这些集合的元素是确定的，但C中数学家是否著名，无法客观地判断，故不能构成集合.

答案：C.

点拨：要抓住集合中元素的三大特征，即确定性、无序性、互异性，三者缺一不可.

例4 已知 $a^2\in\{a,1,0\}$，求实数 a 的值.

分析：由元素的确定性可知 $a^2=a$，$a^2=1$ 或 $a^2=0$；由互异性可知 $a\neq1$，且 $a\neq0$.

解：①若 $a^2=0$，则 $a=0$，此时集合为 $\{0,1,0\}$，不符合集合元素的互异性，故舍去.

②若 $a^2=1$，则 $a=\pm1$；

当 $a=1$ 时，集合为 $\{1,0,1\}$，舍去，

当 $a=-1$ 时，集合为 $\{-1,1,0\}$，符合题意.

③若 $a^2=a$，则 $a=0$ 或 $a=1$，由上述可知均不符合题意.

综上所述，$a=-1$.

点拨：本题实质是分类讨论，需要注意的是求出参数的值以后，要代入检验，看其是否满足集合中元素的三大特征.

题型3 集合的表示方法（链接A卷第6、9题）

例5 按所给要求表示集合.

(1) 用自然语言表示：① $\{x|x\geq3\}$；② $\{1,3,5,7,\cdots\}$；

(2) 用列举法表示：$\{x|x^2\leq4,x\in\mathbf{Z}\}$.

解：(1) ①所有大于或等于3的实数构成的集合.

②所有非负奇数构成的集合.

(2) $\{-2,-1,0,1,2\}$.

点拨：用列举法表示集合时，其中的元素要不重复、不遗漏.

综合题型

题型1 集合与方程的综合（链接A卷第8、10题）

例6 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$，若 A 中元素至多只有一个，求 a 的取值范围.

分析：A 中至多有一个元素，其实质是方程有一个实数根或有两个相等的实数根或无实数根.

解：当 $a=0$ 时，原方程变为 $-3x+2=0$，得 $x=\dfrac{2}{3}$，满足题意；

当 $a\neq0$ 时，原方程为一元二次方程 $ax^2-3x+2=0$，此时 $\Delta=9-4\times a\times2=9-8a$，当 $\Delta\leq0$，即 $a\geq\dfrac{9}{8}$ 时，方程有两个相等的实根或无实根，即满足 A 中至多有一个元素.

综上所述，$a=0$ 或 $a\geq\dfrac{9}{8}$ 时，A 中元素至多只有一个.

点拨：对于方程 $ax^2+bx+c=0$ 来说，二次项系数往往要分 $a=0$ 及 $a\neq0$ 两种情况讨论；题目中的关键词"至多只有一个"是指集合中无元素或只有一个元素.

题型2 集合的综合题（链接B卷第4题）

例7 用描述法表示图1-1-1中阴影部分（含边界）点的坐标的集合.

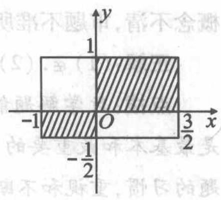


图1-1-1

分析：本题运用图形语言给出问题，要求把图形语言转换为符号语言.

解：由图可得 $-1\leq x\leq\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{1}{2}\leq y\leq1$. 并且图中阴影部分分别位于第一、三象限，这两个象限中点的坐标需满足 $xy\geq0$.

故用描述法表示图中阴影部分点的坐标的集合为：

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,xy\geq0,\text{且}-1\leq x\leq\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leq y\leq1\right\}.$$

点拨：本题首先要注意此题的代表元素 (x,y) 是点的坐标形式，然后仔细分析横、纵坐标所满足的条件.

题型3 集合相等的创新题（链接B卷第3题）

例8 已知集合 $A=\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$，$B=\{a^2,a+b,0\}$，且 $A=B$，求 $a^{2010}+b^{2011}$.

分析：两集合相等，就是两个集合中的元素是一样的，由此可求出 a,b 的值.

解：由题意知，$a\neq0$ 且 $a\neq1$.

$\because A=B$，

$\therefore \begin{cases}a^2=1,\\a=a+b,\\\dfrac{b}{a}=0;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=1,\\a^2=a,\\\dfrac{b}{a}=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=0;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$（舍去）

$\therefore a^{2010}+b^{2011}=(-1)^{2010}+0^{2011}=(-1)^{2010}=1$.

点拨：由集合中的元素特征及集合相等的定义进行求解.

Ⅲ 思维误区点击

本节常见的思维误区：(1)概念不清，集合表示混乱，如$\{(a,b)\}$表示点集，$\{(x,y)|x=a$ 或 $y=b\}$表示的元素是(a,y)或(x,b)；(2)元素a与集合A间的关系：$a\in A$或$a\notin A$；(3)集合中元素的三大基本特征在解题中易被忽视，其中最容易被忽视的是元素的互异性.

例9 填空：

(1)$(-1,2)$______$\{x|y=-2x\}$(填"$\in$"或"$\notin$")；

(2)用列举法表示方程组$\begin{cases}2x+y=8,\\x-y=1\end{cases}$的解集为______.

错解：(1)$\in$. (2)$\{3,2\}$或$\{x=3,y=2\}$或$\{(x,y)|x=3,y=2\}$.

误区分析：(1)集合$\{x|y=-2x\}$是数集而非点集，竖线后面表示的是元素的基本特征，这点在解题中尤其要注意.

(2)错解$\{3,2\}$表示的是两个数3和2组成的集合，而$\{x=3,y=2\}$不符合集合表示法的基本模式，$\{(x,y)|x=3$ 或 $y=2\}$表示的元素实质是$(3,y)$或$(x,2)$，与题意不符，上述错误都是概念不清，审题不准所致，所以要正确理解相关概念.

正解：(1)$\notin$. (2)$\{(3,2)\}$.

点拨：数学解题能力是一种综合能力，但阅读理解能力却是最基本和最重要的，因而在学习中要养成认真读题，严格审题的习惯，重视和不断发展自己的阅读理解能力.

例10 若$-3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，求实数a的值.

错解：$\because -3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，

$\therefore$令$-3=a-3$，得$a=0$；

令$-3=2a-1$，得$a=-1$；

令$-3=a^2-4$，则$a=1$或$a=-1$.

$\therefore a$的值为$a=0$或$a=1$或$a=-1$.

误区分析：此题在求解时，只考虑到求a的值，而忽略了集合中元素的互异性.

正解：由题意知，若$-3=a-3$，则$a=0$，此时集合为$\{-3,-1,-4\}$，符合题意；

若$-3=2a-1$，则$a=-1$，此时集合为$\{-4,-3,-3\}$，与集合中元素互异矛盾，故$a=-1$舍去；

若$-3=a^2-4$，则$a=1$或$a=-1$(舍去)，当$a=1$时，集合为$\{-2,1,-3\}$，符合题意.

综上所述$a=0$或$a=1$.

点拨：集合问题中经常遇到求参数的值或求参数的取值范围的题目，这类题目常常用到代入检验的办法，应予以重视.

Ⅳ 高考能力提升

集合中元素的互异性、确定性、无序性是本节的重点，也是高考必考的知识点.利用集合元素的特征和集合相等，方程等有关概念结合起来求元素的取值是常见题型，同时描述法是本节的另一重要知识点，在今后的数学学习中经常用到，在高考中也多有涉及.本节在高考中多以选择题、填空题为主，难度一般都不大，属于低档题.

例11 (2010山东模拟5分)已知集合$A=\{x|x^2-2x+a>0\}$，且$1\notin A$，则实数a的取值范围是(　　).

A. $\{a|a\leqslant 1\}$　　B. $\{a|a\geqslant 1\}$

C. $\{a|a\geqslant 0\}$　　D. $\{a|a\leqslant -1\}$

分析：因为$1\notin A$，所以当$x=1$时，$1-2+a\leqslant 0$，所以$a\leqslant 1$，即$a\in\{a|a\leqslant 1\}$.

答案：A.

例12 (2010江西模拟5分)若集合$M=\{0,1,2\}$，$N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0$且$x-2y-1\leqslant 0,x,y\in M\}$，则$N$中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

分析：由题意得(1)当$x=y$时，有$\begin{cases}x-2x+1\geqslant 0,\\x-2x-1\leqslant 0,\end{cases}$即$-1\leqslant x\leqslant 1$，又$x\in M$，则有序实数对$(x,y)$有两对；(2)当$x\neq y$时，若$x=0$，则有$\begin{cases}0-2y+1\geqslant 0,\\0-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. 又$y\in M$，则有序实数对$(x,y)$不存在；若$x=1$，则有$\begin{cases}1-2y+1\geqslant 0,\\1-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$0\leqslant y\leqslant 1$，又$y\in M$，所以$y=0$，则有序实数对$(x,y)$有一对；若$x=2$，则有$\begin{cases}2-2y+1\geqslant 0,\\2-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$，又$y\in M$，所以$y=1$，则有序实数对$(x,y)$有一对. 综上所述，集合$N$中元素的个数为4.

答案：C.

点拨：对于N中的元素要理解准确，注意$(0,1)$和$(1,0)$是不同的元素.

V　知识巩固训练

A卷　基础水平训练（答案见106页）

一、选择题

1.（2011福州市期中模块质量检查）下列对象能构成集合的是（　　）.

A. 2010年春节联欢晚会上的所有好看节目

B. 我国从1991～2009年所发射的所有人造卫星

C. 2010广州亚运会中的高个子男运动员

D. 上海世博会中所有热门场馆

2. 集合$A=\{$一条边长为1，一个角为40°的等腰三角形$\}$中元素个数为（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 无数个

3. 已知集合$M=\{$大于-2且小于1的实数$\}$，则下列关系式正确的是（　　）.

A. $\sqrt{5}\in M$　　B. $0\notin M$　　C. $1\in M$　　D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

4. 下面的结论正确的是（　　）.

A. $ax\in \mathbf{Q}$，则$a\in \mathbf{N}$　　B. $a\in \mathbf{Z}$，则$a\in\{$自然数$\}$

C. $x^2-1=0$的解集是$\{-1,1\}$　D. 以上结论均不正确

5.（2010长沙高一检测）下列集合中表示同一集合的是（　　）.

A. $M=\{(3,2)\}$，$N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{(x,y)\mid x+y=1\}$，$N=\{y\mid x+y=1\}$

C. $M=\{4,5\}$，$N=(5,4)$

D. $M=\{1,2\}$，$N=\{(1,2)\}$

二、填空题

6. 已知集合$\left\{m\,\middle|\,\frac{6}{5-m}\in \mathbf{N}^*，且m\in \mathbf{Z}\right\}$，则该集合用列举法可表示为________.

7. 集合$\{3,x,x^2-2x\}$中，实数x应满足的条件是________.

8. 已知$-5\in\{x\mid x^2-ax-5=0\}$，则集合$\{x\mid x^2-4x-a=0\}$中所有元素之和为________.

三、解答题

9. 用列举法表示下列集合：

(1)不大于11的非负奇数集；

(2)$\{(x,y)\mid x+y=5,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}\}$.

10. 已知集合$A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathbf{R}\}$，若$A$中至少有一个元素，求$a$的取值范围.

B卷　高考水平训练（答案见106页）

1.（2009广东模拟5分）设$a,b\in \mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则$b-a$等于（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

2.（综合题）已知$A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若$1\in A$，求实数$a$的值.

3.（应用题）下列三个集合：

(1) $\{x\mid y=x^2+1,x\in \mathbf{R}\}$；(2) $\{y\mid y=x^2+1,x\in \mathbf{R}\}$；(3) $\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in \mathbf{R}\}$.

它们是否为相同的集合？请说明理由.

4.（创新题）设S为满足下列两个条件的实数所构成的集合：

① S内不含1；②若$a\in S$，则$\frac{1}{1-a}\in S$.

解答下列问题：

(1)若$2\in S$，则S中必有其他两个数，求出这两个数；

(2)求证：若$a\in S$，则$1-\frac{1}{a}\in S$；

(3)在集合S中，元素的个数能否只有一个？请说明理由.

1.1.2　集合间的基本关系

目标导航

1. 理解子集、真子集、空集的概念，并掌握符号$\subseteq$、$\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$的用法.
2. 理解集合之间包含与相等的含义.
3. 能用Venn图、数轴表示集合间的关系，会用Venn图分析理解集合的问题.

旧知回顾

1. 集合：一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合.
2. 集合中的元素的特征：确定性、互异性、无序性.
3. 元素与集合的关系：给定任一元素a和集合A，要么$a\in A$，要么$a\notin A$.

I　教材知识详解

教材全析

1. Venn图与数轴法表示集合

(1) Venn图：在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为Venn图．如图1-1-2表示集合A.

图1-1-2

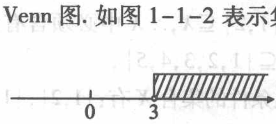


图1-1-3

(2)数轴法：在解集合之间关系问题时，常利用数轴来形象、直观地表示集合.

例如，$A=\{x|x>3\}$，在数轴上表示集合 A，如图 1-1-3，阴影部分表示集合 A 中所有元素. 此方法类似不等式的解集在数轴上的表示.

2. 子集

(1)子集的概念：一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作“A 含于 B”（或“B 包含 A”）. 当集合 A 不含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则类似记作“$A\nsubseteq B$”或“$B\nsupseteq A$”.

若 A 是 B 的子集，可用 Venn 图（如图 1-1-4）表示 A，B 之间的关系.

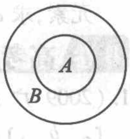


图 1-1-4

(2)两个集合相等：如果集合 A 是集合 B 的子集（$A\subseteq B$），且集合 B 是集合 A 的子集（$B\subseteq A$），此时，集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，因此，集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

(3)子集的性质：①$A\subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集. ②如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$. ③如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$. ④如果 $A\nsubseteq B$，$B\nsubseteq C$，那么 $A\nsubseteq C$.

剖析说明

(1)包含的定义也可以表述成：如果由任一 $x\in A$，可以推出 $x\in B$，那么 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.

(2)子集不只是包含集合中“部分元素”组成的集合，即任何集合都是它本身的子集（$A\subseteq A$）.

3. 真子集

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

若 $A\subsetneqq B$，则 B 中至少存在一个元素 $x\notin A$.

剖析说明

(1)对于集合 A，B，C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

(2)两个集合 A，B 之间的关系：

$$\begin{cases}A\subseteq B\begin{cases}A=B\Rightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A\\ A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B\end{cases}\\ A\nsubseteq B\end{cases}$$

剖析说明

(3)元素与集合的关系是属于与不属于的关系，用符号“$\in$”“$\notin$”表示；集合与集合之间的关系是包含、不包含、真包含、相等的关系，用符号“$\subseteq$”“$\nsubseteq$”“$\subsetneqq$”和“$=$”表示.

4. 空集

我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

规定：空集是任何集合的子集.

剖析说明

(1)空集只有一个子集，即它本身.

(2)空集是任何非空集合的真子集.

(3)注意空集“不包含任何元素”，类似 $\{\varnothing\}$、$\{0\}$ 等不是空集.

知识拓展

1. 两个集合相等的证明

证明两个集合相等的方法：列举法、定义法. 若 A，B 两个集合是元素较少的有限集，可利用列举法将元素列举出来，说明两个集合的元素完全相同，从而 $A=B$；若 A，B 是无限集时，欲证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 成立即可. 即可设任意 $x_0\in A$，证明 $x_0\in B$，从而得出 $A\subseteq B$. 又设任意 $y_0\in B$，证明 $y_0\in A$，从而得到 $B\subseteq A$，进而证明得到 $A=B$.

2. 有限集合的子集个数

根据子集的定义可知，若集合 A 是集合 B 的子集，则有 $A\subseteq B$，它包含以下几个方面：

(1)$A=\varnothing$；(2)$A\subsetneqq B$；(3)$A=B$.

所以对于有限集合的子集个数有下述四个结论：

①n 个元素的集合有 2^n 个子集；

②n 个元素的集合有 2^n-1 个真子集；

③n 个元素的集合有 2^n-1 个非空子集；

④n 个元素的集合有 2^n-2 个非空真子集.

Ⅱ 典型例题解读

基础题型

题型 1 集合与集合关系的理解（链接 A 卷第 1,2,3,8 题）

例 1 已知集合 X 满足 $\{1,2\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，求所有满足条件的集合 X.

分析：因为 $\{1,2\}\subseteq X$，所以 X 中必须含有 $\{1,2\}$ 两个元素.

解：$\because \{1,2\}\subseteq X$，$\therefore X$ 中必须含有元素 $\{1,2\}$.

又 $\because X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，

$\therefore$ 满足条件的集合 X 有：$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$，共 8 个.

点拨：若集合 A 中有 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 个元素，则 A 有 2^n 个子集.

例 2 已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\dfrac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M，N，P 满足的关系是（　　）.

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P=M$

分析：三个集合结构形式上有明显差异，应利用等价转化思想，化异为同，然后才能确定.

对集合 M,N,P 进行变换，得集合 $M=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$；对于集合 $N=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$；对于集合 $P=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$. ∵ $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数，而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数，∴ $M\subsetneqq N=P$.

答案：B.

点拨：认清集合的元素，紧扣集合的定义，此类问题主要有两类：一是元素和集合之间的关系问题，二是集合与集合之间的关系问题，关键在于化简给定的集合，确定集合的元素，正确认识集合中元素的属性. 对于用描述法给出的集合 $\{x|x\in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P；重视图示法的作用，通过数形结合直观地解决问题.

题型 2　空集的理解（链接 A 卷第 1 题，链接 B 卷第 1 题）

例 3 下列集合中：①$\{0\}$；②$\{x|x=n^2+1,x<0,n\in\mathbf{R}\}$；③$\{\varnothing\}$；④$\varnothing$；⑤$\{x|x=\sqrt{-2-n^2},n\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$；⑥$\{(0,0)\}$，是空集的为______.（只填序号）

分析：空集是指不含任何元素的集合，而与元素是否等于 0 无关. ①中有元素 0，③中有元素 $\varnothing$，⑥中有元素 $(0,0)$，它们都不是空集；②中元素 $x=n^2+1\geqslant 1$，所以不存在任何一个元素属于集合②，②是空集，同理⑤也是空集；$\varnothing$ 代表空集，所以④是空集.

答案：②④⑤.

题型 3　由集合间的关系求参数（链接 A 卷第 5、6、9、10 题，链接 B 卷第 2 题）

例 4 若 $\{x|2x-a=0\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，则 a 的取值范围是________.

分析：由 $2x-a=0$，得 $x=\dfrac{a}{2}$，要使 $\left\{\dfrac{a}{2}\right\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，需满足 $-1<\dfrac{a}{2}<3$，解得 $-2<a<6$.

答案：$\{a|-2<a<6\}$.

例 5 已知集合 $A=\{x|ax-1=0\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，若 $A\subsetneqq B$，求 a.

分析：可先具体化简集合 B，然后利用 $A\subsetneqq B$，即 A 是 B 的真子集来求 a 的取值.

解：∵ $B=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$，

又∵ $A\subsetneqq B$，

∴ a. 当 $a=0$ 时，方程 $ax-1=0$ 无解，此时 $A=\varnothing$，符合题意.

b. 当 $a\neq 0$ 时，则 $A=\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$.

若 $\dfrac{1}{a}=-1$，则 $a=-1$；若 $\dfrac{1}{a}=3$，则 $a=\dfrac{1}{3}$.

综上所述，a 的值为 $0,-1$ 或 $\dfrac{1}{3}$.

点拨：要抓住 $A\subsetneqq B$ 这一关键条件，对 A 分 $\varnothing$ 和非空集两种情况讨论，尤其要注意 $A=\varnothing$.

题型 4　证明两个集合相等（链接 A 卷第 4、7 题）

例 6 集合 $X=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{y|y=4k\pm 1,k\in\mathbf{Z}\}$，试证明：$X=Y$.

分析：要证明 $X=Y$，按集合相等的定义，应证明 $X\subseteq Y$，且 $Y\subseteq X$.

证明：先证 $X\subseteq Y$. 设 $x_0\in X$，则 $x_0=2n_0-1,n_0\in\mathbf{Z}$.

若 n_0 是偶数，可设 $n_0=2m,m\in\mathbf{Z}$，则 $x_0=4m-1$，∴ $x_0\in Y$；

若 n_0 是奇数，可设 $n_0=2m-1,m\in\mathbf{Z}$，则 $x_0=2(2m-1)-1=4m-3=4(m-1)+1$，∴ $X_0\in Y$.

∴ 不论 n_0 是偶数还是奇数，都有 $x_0\in Y$，∴ $X\subseteq Y$.

再证 $Y\subseteq X$.

设 $y_0\in Y$，则 $y_0=4k_0+1$ 或 $y_0=4k_0-1,k_0\in\mathbf{Z}$.

∵ $y_0=4k_0+1=2(2k_0+1)-1$，或 $y_0=4k_0-1=2(2k_0)-1$，

而 $2k_0+1\in\mathbf{Z},2k_0\in\mathbf{Z}$，

∴ $y_0\in X$，∴ $Y\subseteq X$.

综上可知 $X=Y$.

点拨：在证明集合相等时，应利用集合相等的定义，判断集合之间的关系，而判断集合之间的关系时，应转化为判定元素和集合的关系.

题型 5　求有限集合的子集个数（链接 B 卷第 4 题）

例 7 集合 $\{a,b,c\}$，$\{a,b,c,d\}$ 的元素的个数分别为多少？它们分别有哪些真子集？它们的真子集个数为多少？根据结论直接写出集合 $\{a,b,c,d,e,f\}$ 的真子集的个数.

分析：集合 A 的全部子集中，除了集合 A 本身，其他集合都是集合 A 的真子集.

解：集合 $\{a,b,c\}$ 有 3 个元素，真子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，个数为 $2^3-1=7$（个）.

集合 $\{a,b,c,d\}$ 有 4 个元素，真子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$，$\{c,d\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，个数为 $2^4-1=15$（个）. 集合 $\{a,b,c,d,e,f\}$ 的真子集个数为 $2^6-1=63$（个）.

综合题型

题型 1　集合与函数的综合（链接 B 卷第 3 题）

例 8 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

分析：$B\subseteq A$ 可分为 $B=\varnothing$，$B\subsetneqq A$，$B=A$，三种情况讨论.

解：∵ $A=\{0,-4\}$，∴ $B\subseteq A$.

a. 当 $B=A$ 时，即 $B=\{0,-4\}$，所以 0 和 -4 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两个实数根，由根与系数之间的关系，得

$$\begin{cases}\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)>0,\\-2(a+1)=-4,\\a^2-1=0.\end{cases}$$

解得 $a=1$.

b. 当 $B\subsetneqq A$ 时，又可分为

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta<0$，即 $4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，$B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$，此时 $\Delta=0$，解得 $a=-1$，经检验符合题意.

综合 a，b 可知，a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant -1$ 或 $a=1\}$.

点拨：解分类问题的实质是将整体化为部分来解决，在分

类时要做到“不重不漏”，这类问题最易漏掉 $B=\varnothing$ 的情况.

题型 2　集合间关系在实际中的应用

例 9 在 100 个学生中，有篮球爱好者 60 人，排球爱好者 65 人，问：既爱好篮球又爱好排球的人数最少有多少人？最多有多少人？

分析：本题源自生活实际，又很好地考查了集合中的相关知识，在解决此题时应借助 Venn 图求解，并融合了逻辑思维能力.

解：篮球爱好者 60 人+排球爱好者 65 人=125 人，显然 125−100=25 人是两集合公共元素，如图 1-1-5（设 A 为篮球爱好者构成的集合，B 为排球爱好者构成的集合），故得最少为 25 人，当然，不难想象，最多为 60 人，此时 A 为 B 的真子集.

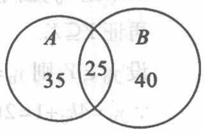


图 1-1-5

点拨：用所学知识解决实际问题恰是新课程改革的一个重要方面，应予以重视.

题型 3　有限集合的子集个数的创新题

例 10 设非空集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且若 $a\in A$，则 $6-a\in A$，这样的集合 A 共有几个？

分析：含有 n 个元素的非空子集有 2^n-1 个，本题中若把 $\{1,2,3,4,5\}$ 的子集全部写出，再逐个检验，虽然可行，但太繁琐. 由题设可知，$a+(6-a)=6$，可把子集分为单元素集、二元素集、三元素集、四元素集、五元素集五类，并注意单元素集及二元素集是基础，其余的都是由二者共同组成的.

解：满足条件的集合 $A=\{3\},\{1,5\},\{2,4\}\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{1,5,2,4\},\{1,2,3,4,5\}$ 共 7 个.

点拨：紧扣题目中若 $a\in A$，则 $6-a\in A$ 这一关键信息，寻求简捷的解题途径.

Ⅲ 思维误区点击

本节常见的思维误区：(1) 不能准确把握子集、真子集、相等等相关概念，一个集合的子集包括它本身，但真子集不包括它本身，在解集合的概念和集合的关系这类题型时应特别注意两个端点是否可取到的问题. (2) 在解题的过程中空集极易被忽视，容易忽视在题设中隐含着的有空集参与的集合问题从而导致的错误.

例 11 若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求 m 的值.

错解：$\because A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$，

$B=\{x|mx+1=0\}=\left\{x\,\middle|\,x=-\dfrac{1}{m}\right\}$，

$\therefore$ 令 $-\dfrac{1}{m}=-3$ 或 $-\dfrac{1}{m}=2$.

解得 $m=\dfrac{1}{3}$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$.

误区分析：错解忽视了当 B 为 $\varnothing$ 时仍符合题意.

正解：当 $B=\varnothing$，即 $m=0$ 时适合题意，

当 $B\neq\varnothing$ 时，令 $-\dfrac{1}{m}=-3$ 或 $-\dfrac{1}{m}=2$，即 $m=\dfrac{1}{3}$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，m 的值为 $0,\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$.

例 12 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

错解：$\{a|a<-2\}$.

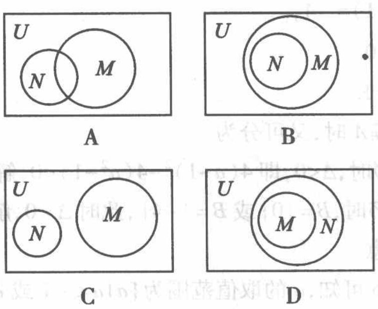
误区分析：错解漏掉了端点值导致错误.

正解：由 $A=\{x||x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，而 $A\subseteq B$，$\therefore a\leqslant -2$. 即 $a\in\{a|a\leqslant -2\}$.

Ⅳ 高考能力提升

在高考中，对子集、真子集以及集合相等概念的考查较多，但难度不大，命题形式主要是选择题与填空题；集合间的三种关系的判断与应用，在高考中屡有涉及，主要考查形式是选择题和填空题.

例 13 (2009 广东高考 1 题 5 分) 已知全集 $U=\mathbf{R}$，则正确表示集合 $M=\{-1,0,1\}$ 和 $N=\{x|x^2+x=0\}$ 关系的韦恩 (Venn) 图是(　　).



分析：由 $N=\{x|x^2+x=0\}$，得 $N=\{-1,0\}$，则 $N\subsetneqq M$，故选 B.

答案：B.

例 14 (2010 天津高考 9 题 5 分) 设集合 $A=\{x||x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x||x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a,b 必满足(　　).

A. $|a+b|\leqslant 3$　　B. $|a+b|\geqslant 3$

C. $|a-b|\leqslant 3$　　D. $|a-b|\geqslant 3$

分析：本题主要考查两个集合间的子集关系与绝对值不等式的解法，属于中等题. 由题意知 $A=\{x|a-1<x<a+1\}$，$B=\{x|x<b-2$ 或 $x>b+2\}$，因为 $A\subseteq B$，所以 $a+1\leqslant b-2$ 或 $a-1\geqslant b+2$，即 $a-b\leqslant -3$ 或 $a-b\geqslant 3$，即 $|a-b|\geqslant 3$.

答案：D.

V 知识巩固训练

A卷 基础水平训练 （答案见106页）

一、选择题

1. 如果集合$A=\{x|2x-1>0\}$，那么① $0\subseteq A$；② $\varnothing\subseteq A$；③ $\{0\}\subsetneqq A$；④ $\mathbf{N}\subseteq A$；⑤$\left\{\frac{1}{3}\right\}\subsetneqq A$各式中，正确的个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 集合$M=\{x|x=1+a^2, a\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{y|y=x^2-4x+5, x\in\mathbf{N}^*\}$，下列关系中正确的是（　　）.

A. $M\subsetneqq P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M=P$　　D. $M\subsetneqq P$且$P\not\subseteq M$

3. （2011新源八中模块试卷）设$P=\{x|x\leqslant 4\}$，$a=\sqrt{10}$，则下列关系正确的是（　　）.

A. $a\subseteq P$　　B. $a\notin P$　　C. $\{a\}\in P$　　D. $\{a\}\subset P$

4. 已知集合$M=\{(x,y)|x+y<0$且$xy>0\}$，集合$P=\{(x,y)|x<0$且$y<0\}$，那么M与P的关系是（　　）.

A. $P\subsetneqq M$　　B. $M\subsetneqq P$　　C. $M=P$　　D. $M\subset P$

二、填空题

5. 已知$A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|x<a\}$.

（1）若$B\subseteq A$，则a的取值范围为________；

（2）若$A\subsetneqq B$，则a的取值范围为________.

6. （2010人大附中模块考核试卷）已知集合$A=\{1,2,a\}$，集合$B=\{1,7\}$，若$B\subseteq A$，则实数a的值是______.

7. 已知$M=\{x|x=a^2+2a+4, a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=b^2-4b+7, b\in\mathbf{R}\}$，则$M$，$N$之间的关系为______.

8. 设$x,y\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)|y=x+1\}$，$B=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1(x\neq 2)\right.\right\}$，则$A$，$B$的关系为______.

三、解答题

9. 已知$A=\{x|x<-1$或$x>5\}$，$B=\{x|a\leqslant x<a+4\}$，若$A\supsetneqq B$，求实数a的取值范围.

10. （2010石家庄高一检测）已知集合$A=\{x|x^2-1=0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$，若$B\neq\varnothing$，且$B\subseteq A$，求实数a，b的值.

B卷 高考水平训练 （答案见107页）

1. （2009山东模拟5分）已知集合$A=\{x|0\leqslant x<3$且$x\in\mathbf{N}\}$的真子集个数是（　　）.

A. 16　　B. 8

C. 7　　D. 4

2. （2009上海模拟5分）已知集合$A=\{-1,3,2m-1\}$，集合$B=\{3,m^2\}$，若$B\subseteq A$，则实数$m=$________.

3. （综合题）已知$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax+a^2-12=0\}$，$B\subseteq A$，求实数$a$的取值范围.

4. （创新题）如果非空集合M同时满足：$M\subseteq\{x|0<x<10, x\in\mathbf{Z}\}$；若$a\in M$，则必有$10-a\in M$，那么集合$M$的个数共有多少个？

5. （探究题）已知集合$A=\{x|x^2-1=0\}$，$B=\{x|x^3-2x^2-x+2=0\}$，求证：$A\subsetneqq B$.

1.1.3 集合的基本运算

目标导航

1. 理解两个集合的交集、并集的定义，并能正确利用定义求两个集合的交集与并集.
2. 理解全集及补集的概念，知道全集是相对的，补集是相对于所给定的全集而言的，会求给定的子集的补集.
3. 能用图形语言表示集合关系，并能结合图形语言理解各种集合的运算及性质，能应用性质解决简单的集合问题.

旧知回顾

1. 子集：一般地，对于两个集合A，B，如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素，就称集合A为集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$），读作A含于B（或B包含A）.
2. 真子集：如果集合$A\subseteq B$，但在集合B中至少存在一个元素x，使$x\notin A$，则称A是B的真子集，记作$A\subsetneqq B$.
3. 集合相等：如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称集合A与集合B相等，记作$A=B$.
4. 空集：不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$. 并规定空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

I 教材知识详解

教材全析

1. 并集

（1）并集的定义：一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的并集，记作$A\cup B$，读作"A并B"，即$A\cup B=\{x|x\in A$，或$x\in B\}$.

（2）并集的图形表示："$A\cup B$"可用Venn图1-1-6中的阴影部分表示.

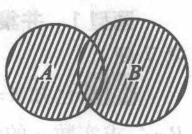


图1-1-6

（3）并集的运算性质：①$A\cup B=B\cup A$；②$A\cup A=A$；③$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；④$A\subsetneqq$