

何华灿 何智涛 著

统一无穷理论

Unified Infinity Theory

He Huacan and He Zhitao



科学出版社

统一无穷理论

Unified Infinity Theory

何华灿 何智涛 著

国家自然科学基金面上项目(60273087,2003-2005)

西北工业大学基础研究基金重点项目(W18101,2007-2009)

西北工业大学计算机学院专项出版资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据理想计数器模型,综合运用三维视野(自然数数值维、编码长度维和 ∞ 的可达性维),指出传统自然数集概念和层次无穷理论的局限性,提出完整的自然数集概念和统一无穷理论:①肯定自然数的二重性(内蕴性和排序性)和无穷的双相性(潜无穷和实无穷并存)。②指出潜无穷过程只能生成由有穷自然数组成的开放序列,它不是无穷集合;实无穷过程可生成由所有自然数组成的无穷集合,包括有穷自然数、趋近无穷自然数和无穷大。③断定完整的自然数集和单位区间实数集等势, $2^\infty = \infty$ 是 ∞ 的基本性质, ∞ 和无穷小 $\delta=1/\infty$ 唯一存在。④提出数的理想模型和规范模概念,证明超越数和无理数都是无穷集,得到了超越数的判定定理。

本书是用计算机科学原理和方法论证数学基础问题的初次尝试,重点在于阐述统一无穷理念,适于研究无穷问题的数学、哲学、逻辑、计算机科学、信息科学和人工智能的专家、博士生及广大科学爱好者阅读和参考,凡具有大专以上文化程度的读者均可读懂。

图书在版编目(CIP)数据

统一无穷理论=Unified Infinity Theory/何华灿,何智涛著. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-032570-9

I. 统… II. ①何…②何… III. 无穷大-统一理论 IV. 0173

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 211852 号

责任编辑:魏英杰 牛宇锋 / 责任校对:林青梅

责任印制:赵 博 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 12 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2011 年 12 月第一次印刷 印张:18 1/4

字数:314 000

定价:80.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

序 一

“无穷”启迪人们的智慧,也激发人们的情感。数学围绕无穷观问题已经争论2500多年,曾经引起过三次大的数学危机,但是,时至今日并未结束。数学中的无穷概念和理论影响着哲学、数理逻辑、计算机科学、人工智能、信息理论等相关学科,对现代科学技术理论体系有深远的影响。

早期数学中流行的是有穷观,在发现了无理数 $\sqrt{2}$ 之后的200多年中,古希腊数学经历了艰难的思索过程,终于有限度地接受了无穷观。当时,古希腊大哲学家亚里士多德说:研究无穷与研究有穷都具有重要意义,无穷只能是潜在的存在,而不是实在的存在。于是,以后的2000多年,潜无穷观取代有穷观统治数学,实无穷观被忽视。然而,进入变量数学时期,微增量计算和实无穷过程已经无法避免,潜无穷观的局限性显现出来。在这种背景下,大数学家康托尔提出:实无穷大是存在的,它有无限多的层次,实无穷小并不存在。因此,100多年来的现代数学被层次无穷观统治,而实无穷小仍然被忽视。但是,不断有人发现:现代数学中的许多矛盾和冲突,都是由层次无穷观引起的。

我国著名的人工智能学者、泛逻辑学专家何华灿教授,提出了统一无穷概念和理论,撰写了专著《统一无穷理论》,他的贡献在于:纠正了传统自然数集概念的局限性,证明了单位区间实数集与完整的自然数集一样大, $2^\infty = \infty$,从而修正了康托尔的层次无穷观,理清了潜无穷过程与实无穷过程的辩证关系,突破了传统无穷观的局限性与片面性,展现了统一无穷观的协调性与和谐性。

何华灿教授的“统一无穷观”根植于华夏文化的沃土,充满了辩证思维的光辉。早在春秋战国时期,中国就有“至大无外,至小无内”的无穷观,何华灿继承、发扬了先哲们的光辉思想,建立了现代的科学无穷理论。

该书内容丰富、结构合理、行文流畅、语言生动、深入浅出、通俗易懂,既面向专门研究无穷问题的有关专业人士,又可供具有大专文化程度以上的广大读者阅读,重在阐述一种新的无穷观念。

何华灿教授已年逾古稀,仍然不畏艰难、孜孜不倦地探索重要数学基础理论问题,冲破层层阻碍,取得了关于无穷的重大突破,为自主创新、勇攀科学高峰,做出了表率,值得我们称赞和学习。

涂序彦 钟义信

2011年5月于北京

Foreword One

The mysterious concept of infinity in mathematics has been giving to humans the great inspiration in both wisdom and imagination and has been making deep impacts to many disciplines such as philosophy, mathematical logic, computer science, artificial intelligence, information theory, and even the entirety of science and technology in contemporary time. On the other hand, however, the arguments and controversies related to the concept of infinity have been lasting over two thousand and five hundred years and still being continued nowadays, arousing the crises three times in the history of mathematics.

In the early days of the history, the concept of finite number in mathematics had been dominant. The first crisis appeared two hundred years after the discovery of $\sqrt{2}$, which is termed irrational number later. This made the ancient mathematics, led by Greek scholars, accepted, to some limited extent, the concept of infinity after experiencing a difficult period of time for rethinking. Aristotle, the great philosopher then, said that the studies on infinity and finite numbers seemed both meaningful although the concept of infinity was only potential, rather than real, existence. As result, the concept of potential infinity dominated mathematics for more than two thousand years. Nevertheless, when variables began to enter in mathematics and the infinitesimal calculation as well as the concept of real infinity became unavoidable, the limitation and weakness of the concept of potential infinity were exposed evidently. In response to the new crisis, an eminent mathematician, Cantor, proposed an explanation which said that the concept of real infinity was real existence and it had infinite levels whereas the infinitesimal did not exist. Mathematics was dominated by the concept and theory of layered infinity for over hundred years thereafter. Yet, there has been endless of discoveries which indicate that many contradictions occurred in the contemporary mathematics are resulted from the concept and theory of layered infinity. This is the third crisis in the history of mathematics.

Recently, Professor HE Huacan, a famous scholar of artificial intelligence and universal logic, presented a concept and theory of unified infinity in his monographic book, *Unified Infinity Theory*, in which he corrected the limitation of

the concept of traditional natural number set, proved the result of unit interval real number set being as big as complete natural number set, $2^\infty = \infty$. This completely corrects Cantor's concept and theory of leveled infinity, clarified the interrelationship between the processes of potential infinity and real infinity, and showed the consistency and harmoniousness of the concept of unified infinity.

The concept and theory of unified infinity proposed by Professor HE is deeply rooted in the earth of Chinese culture and full of the light of dialectic thinking. As early as two thousand years ago, Chinese scholars already had the concept of infinity expressed as "The biggest with no bigger and the smallest with no smaller". Having accepted and advanced these ideas, Professor HE established the modern concept and theory of infinity.

The book of *Unified Infinity Theory* is featured with systematic knowledge, good structure, fluent expression, easy to understand, and placing emphasis on the exposition of the new concept of infinity. It is suitable not only for mathematicians who are dealing with the study on the concept and theory of infinity but also for readers who had experienced their university education.

Professor HE has been over seventy years old. But he still maintains his high spirit in exploring the fundamental theory of mathematics and made great breakthrough in the new concept and theory of infinity. Professor HE has set up a glorious example for both young and old Chinese researchers. It is believed that learning from his spirit will be beneficial to us all.

TU Xuyan, ZHONG Yixin
May, 2011 in Beijing

序 二

我国著名学者何华灿教授新著《统一无穷理论》，是哲学、数学、逻辑学、信息科学、计算机科学与智能科学的基础理论，作者以科学的语言、翔实材料，严谨地论述了他在探索无穷这一世界难题的道路上取得的突破性进展。这个重要成果的取得，和他的交叉科学研究方法是分不开的，《统一无穷理论》的面世，必将开创智能、信息、逻辑、数学与哲学研究的新方向、新领域。这里，仅从哲学方法论的角度提出我读《统一无穷理论》后受到的启迪。

1. 哲学的无穷思想

关于哲学与科学研究的关系，爱因斯坦认为：哲学是在最普遍和最广泛的形式中对知识的追求，因而，哲学可以被认为是全部科学研究之母^①。无穷问题的科学研究，古代中西方哲学都曾经提出过朴素的、思辨的无穷观，为后人提供了宝贵的思想资料。

在中国哲学中，老子的道“无形无象，无声无嗅，大而无外，小而无内”。实际上是说：道是无穷的，大而无外是无穷大；小而无内是无穷小。庄子提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”表达了无限可分思想。墨子认为“或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。”它的意思是说，能够量尽的区域叫有穷；永远量不尽的区域叫无穷。

在古希腊哲学中，泰勒斯认为物质无限可分，是潜无穷观的萌芽；德谟克里特认为存在物质的最小不可分粒子，是实无穷观的萌芽。而芝诺悖论则是历史上利用无穷概念思考问题的最初实例：他提出的运动不存在和阿基里斯追不上乌龟的问题，涉及无限可分思想；他的飞矢不动和竞走问题，涉及不可分无穷小量问题。

中西方两种不同的哲学传统，在科学研究中可以而且应该互相补充。这是科学研究中对待古代思想的方法论原则。作者在这方面掌握了丰富的材料，使读者弄清了无穷问题的来龙去脉。

关于我们的主观思维和客观世界的关系这个哲学基本问题，恩格斯提出了数学无穷的原型思想，他认为：微积分中所创造的各种数量（各次的微分和无穷），是人类精神的纯粹的“自由创造物和想象物”，可是“自然界对这一切想象的数量都提

^① 爱因斯坦文集（1卷），北京：商务印书馆，1976：519。

供了原型。”^①以数学研究的对象数和形的概念来说,它们“不是从其他任何地方,而是从现实世界中得来的。”^②恩格斯进一步指出:“全部所谓纯数学都是研究抽象的,它的一切数量严格说来都是想象的数量,……数学的无穷是从现实中借来的,尽管是不自觉地借来的,所以它不能从它自身、从数学的抽象来说明,而只能从现实来说明。”^③

作者思想和恩格斯一致,认为:“所有的人包括大数学家和一般读者,都没有真正见过无穷大和无穷小是什么样子,历史上关于它们的定义和性质的讨论没有正面原型可以参考,只能通过自然数列 $0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ 的发展趋势进行揣摩,众说纷纭,莫衷一是。”(凡不注明出处的引文,均出自该书,下同)因此,问题的关键在于找到无穷概念的正面原型。作者从自然数和数学产生的源头进制计数器出发,结合他长期从事计算机工作的经验,提出一个十分深刻的思想,认为:“计数器是数的母亲,自然数是她的独子,其他各种形式的人工数(负数、整数、有理数、实数、复数和各种多维数等)都是在自然数基础上派生出来的。”因此,他以自然数为原型,首先找到一个能生成所有自然数的模型,这就是理想计数器模型,它不仅能够通过后继(+1)操作生成所有的自然数,同时还可展示出自然数编码的有效位跟随变化的情形,从高度变化和数值变化两个维度上提供自然数的变化信息,指出了传统自然数集概念的局限性,建立了完整的自然数集概念,从而得到了统一无穷概念。可见从哲学的原型思想得出的理想计数器模型,是建立统一无穷理论的基石。

2. 数学的基础理论研究

科学哲学家托马斯·库恩长期研究科学史,在其代表作《科学革命的结构》(1962年)一书中,提出科学发展的模式,认为科学发展一般经历如下的几个时期:

前科学—常规科学—反常和危机—科学革命—新的常规科学……

前科学时期:学科形成时期,存在着各种不同的问题、各种不同的观点与方法。

常规科学时期:学科的研究对象、研究范围、研究方法有了共同的认识。

反常和危机出现:反常就是出现与常规科学相矛盾的现象,用常规科学无法作出解释;危机是用常规科学解决反常时屡遭失败,反常成为常规科学无法解决的难题,于是导致科学的危机。

科学革命:解决危机的出路在于抛弃旧理论,创立新理论。一些科学家思想

① 马克思恩格斯全集(20卷).北京:人民出版社,1971:611.

② 马克思恩格斯全集(20卷).北京:人民出版社,1971:41.

③ 马克思恩格斯全集(20卷).北京:人民出版社,1971:615.

解放、具有创新精神,勇于探索,提出新思想、创立新理论,在科学发展史上产生了带来重大变革的科学革命。

数学发展也遵循上述过程。在数学中,数是它的基本概念,数的概念的每一次扩充都标志着数学的一次飞跃。数的扩充和与之相联系的数系理论的完善,标志着数学发展的不同时期,因而数学基础理论发展的历史可以从数以及与之相联系的数系的形成与发展来考察。

数学的前科学是数学的形成时期。数学是从认识有穷自然数及其运算性质开始的,芝诺悖论就是对这一时期哲学的无穷思想涉及的无穷小、无穷大和连续提出的质疑。这一时期围绕无穷问题的争论基本上是哲学方面的。

数学的常规科学是常量数学时期。它从公元前 5 世纪末期开始到公元 17 世纪中期结束。由于无理数 $\sqrt{2}$ 的发现把无穷问题从哲学问题变成数学问题。公元前 470 年左右,希帕索斯提出一个问题:正方形的对角线和边长是否可以公度?他通过证明得出结论,存在不可公度量,即无理数 $\sqrt{2}$!这个不可公度量用常量数学的整数与整数的比无法解决。无理数 $\sqrt{2}$ 的发现是常量数学的一个反常,它导致了西方数学史上第一次数学危机。1872 年德国数学家戴德金出版《连续性与无理数》,提出关于无理数的一种令人满意的理论,第一次数学危机才算圆满地解决了。

数学的新的常规数学是变量数学时期,它从公元 17 世纪中期开始到公元 19 世纪末期结束。由于变量的引入带来了常量数学的革命,正如恩格斯指出的:“数学发展中的转折点‘是笛卡儿的变数。有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了。’”^①微积分的发明在数学发展史上有决定性意义,由此产生的实数、变量、函数、极限和连续等概念,是微积分和进一步发展起来的数学分析的基础,在这些概念的研究中,无穷是一个重要的基础性概念,特别是微积分中的无穷小量问题。1734 年英国哲学家贝克莱提出贝克莱悖论:“微积分中的无穷小量有时当做 0,有时又不是 0,这无疑是一个矛盾”。无穷小量是变量数学的一个反常,由此引发第二次数学危机。由戴德金从有理数出发定义无理数的工作开始,经过许多有名的数学家对数系的深入研究,形成了数学分析算术化的过程,即

数学分析—实数理论—有理数理论—自然数理论

微积分理论终于有了严格的基础,它利用实数系的所谓“连续”的性质,通过魏尔斯特拉斯的 $\epsilon\delta$ 语言,用潜无穷小回避了实无穷小,相当满意地解决了第二次数学危机。

数学的又一次新的常规数学是现代数学时期,它从公元 20 世纪初期开始,到

^① 马克思恩格斯全集(20 卷). 北京:人民出版社,1971:602.

现在仍在发展过程之中。由于集合论的创建导致了数理逻辑的发展,数理逻辑的发展促进了 20 世纪计算机科学和人工智能的出现。集合论成为构筑现代数学大厦的基石,以致在 1900 年的第二次国际数学家大会上,著名法国数学家庞加莱自豪地说:“今天在分析中,我们可以宣称绝对的严密已经实现了。”由贝克莱悖论引发的第二次数学危机似乎得到了彻底地解决。但是好景不长,1901 年英国数学家罗素提出一个悖论:构造一个集合 S , 它由所有不是自身元素的集合组成。试问 S 属于 S 吗? 无论是肯定或否定的答案都会出现矛盾。罗素悖论引发了第三次数学危机。第一、二次危机基本上属于数学领域,而这次危机则涉及数学、逻辑与哲学等领域,是一个交叉科学问题,需要综合地思考。

3. 数理逻辑的数学基础问题研究

在现代数学时期,数学分析通过数学算术化建立了严密和精确的基础。现代数学理论基础的无矛盾性可归结为实数理论的无矛盾性,实数理论的无矛盾性可归结为自然数理论的无矛盾性,而自然数理论的无矛盾性则归结为集合论的无矛盾性。集合论已成为现代数学的逻辑基础,这主要表现在:用集合论的语言重新描述了代数学、几何学和数学分析,解决了它们中间长期存在的一些问题;又引出了实变函数论、抽象代数、点集拓扑学等众多现代数学分支。可以说,到 20 世纪初,集合论已经渗透到几乎所有的数学领域。

然而,1901 年的罗素悖论,揭露了集合论的逻辑漏洞,几乎动摇了整个数学基础。罗素悖论不仅触及集合论,而且也触动了数学与逻辑学,这就提出一个十分严峻的问题:如何解决数学基础的可靠性? 从哲学上说,已经出现的悖论,都有“所有集合的集合”的表述,这个表述涉及实无穷的问题,从而由罗素悖论引发的第三次数学危机,把数学基础理论研究从潜无穷推进到实无穷,迫使人类去更加深入地认识无穷概念。

以罗素为代表的逻辑主义强调逻辑而排斥直觉,主张逻辑是整个数学的唯一基础;以布劳威尔为代表的直觉主义强调直觉而排斥逻辑,主张以自然数理论为基础展开他的数学理论;以希尔伯特为代表的形式主义,认为逻辑具有先验的真理性以及数学整个地具有逻辑的特征,主张通过逻辑的相容性即无矛盾性来维护数学的真理性和合法性。

从方法论看,逻辑主义与直觉主义分别从逻辑与直觉(对自然数的直觉)出发,是从单个学科出发;而形式主义的研究对象形式系统与研究方法形式化方法,则是从数学(演绎)、逻辑(证明)和语言(对象语言与元语言,或语法语言与语义语言)出发,是从数学、逻辑学与语言学跨学科出发。这表现在 1922 年希尔伯特的规划中,这个规划的步骤如下:

第一步,把古典数学理论(记为 T) 公理化;

第二步,把得到的公理化理论和使用的逻辑推理规则都用形式语言来表示,得到一个形式系统(记为 T_F);

第三步,把形式系统 T_F 作为研究对象(对象语言或形式语言);研究 T_F 系统的理论(记为 T_m) 叫元数学(元语言或语义语言)。

这个规划的目标是:在元数学中如果能够判定 T_F 系统无矛盾,则可判定 T 系统无矛盾。

希尔伯特认为,应用形式化方法创建起来的元数学,其首要目标是证明整个数学的无矛盾性,而最关键、最基本的目标则是证明自然数的无矛盾性(算术的一致性)。

希尔伯特规划的目标被 1931 年哥德尔证明的不完全性定理否定了。哥德尔不完全性定理包括两个:

第一个不完全性定理:任何一个形式系统都不能包含全部的数学真理。

第二个不完全性定理:即便初等算术系统是无矛盾的,这种无矛盾性在系统内也无法证明。

哥德尔的不完全性定理揭示了希尔伯特形式化方法的局限性:相容的系统不一定完备;完备的系统不一定相容。尽管哥德尔的不完全性定理宣告了希尔伯特规划的失败,但是,希尔伯特的形式化方法,把数学、逻辑学与语言学联系起来,为后来的计算机科学、信息科学与智能科学的跨学科研究开创了一条通道。这是前无古人的重大贡献。

4. 《统一无穷理论》的重大突破

在近代科学经过四百多年分门别类研究、取得巨大成就的基础上,从 20 世纪中叶开始了交叉科学的研究,科学家预言:21 世纪将是交叉科学时代。何华灿教授来自跨学科的心声正是我们时代的呼声。

早在 19 世纪 80 年代末,恩格斯就指出,近代自然科学从培根开始、分门别类地对自然界进行解剖、分析、实验,这种研究方法给我们留下了一种习惯,即把自然界的事物和过程孤立起来,撇开从自然界广泛的总的联系去考察,它造成了最近几个世纪所特有的形而上学思维方式^①,即孤立地、片面地考察问题的形而上学思维方式;造成了最近几个世纪科学研究所特有的局限性。为此,恩格斯呼吁:必须从形而上学思维复归辩证思维;并预言从三大发现(能的转化、细胞学说与达尔文进化论)后,自然科学研究必将朝综合化、整体化的方向发展。

何华灿教授是毕生从事计算机科学技术和人工智能研究的信息科学工作者,后来对信息科学的基础理论产生了浓厚的兴趣。由于他沿着交叉科学的综合化研

^① 马克思恩格斯全集(20 卷). 北京:人民出版社,1971:24.

究方向不断探索,在无穷这个数学的灵魂问题上取得了重大突破。他在信息、智能与逻辑领域的研究中,把分析与综合统一起来,他的辩证思维渗透在《统一无穷理论》中,主要体现如下:

1) 提出问题。问题就是矛盾。作者经过多年跨学科的潜心研究,认为康托集合论的层次无穷概念存在严重问题:“本来是大而无外的无穷大怎么能无限地升级?本来是小而无内的无穷小为什么仍然在无限地变小?整个信息科学已经被这种畸形的无穷理论压缩到了一个狭小的零级无穷空间内无法伸展。”

2) 分析问题。无穷问题涉及哲学、数学与逻辑等方面,必须逐一加以分析。

① 哲学。从辩证法的观点看来,统一的无穷一分为二:潜无穷与实无穷。二者的区别在于:潜无穷“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,没有边界;实无穷“大而无外,小而无内”有边界。但二者又是同一的,表现在它们的互相渗透、互相依存或互相联结。纯数学都是研究抽象的,它的一切数量严格说来都是想象的数量,特别是无穷,在现实世界中有没有无穷的正面原型,这是唯物辩证法与唯心辩证法的根本区别。作者从唯物主义的立场出发认为,数学和自然数产生的源头是进位制计数法,并结合他长期从事计算机工作的经验,提出了“以自然数为原型,找出一个能生成所有自然数的模型。”这一思想是十分深刻的。

② 数学。数学研究的对象是数,数是一分为二的,它分为数(音 shù)(number)和数(音 shǔ)(count);前者是名词,是数数过程的结果;后者是动词,是数数过程的本身。既然数的源头是自然数,那么从自然数发展出来的无穷概念,本质上和数一样也是一分为二的,是二重性的。我国著名数学家徐利治最早揭示并论述了自然数性质的二重性,称之为内蕴性和排序性。内蕴性是指自然数所具有的微观内在性质,表现为个别数与数之间的各种不同关系。从内蕴性的角度来看,计数过程是一个潜无穷过程,它只能生成一个开放的永远处在生成过程中的有穷自然数序列,其模式为

$$\vec{N}: \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

排序性是指自然数列所具有的宏观外在属性,表现为自然数总体上可按顺序排列的特征。从排序性角度看,计数过程是一个实无穷过程,它可以生成一个已经完成了的完整的自然数集,其模式为

$$\overline{N}: \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, \infty\}$$

由自然数性质的二重性必然导致无穷概念的双相性。从辩证法的观点看来,无穷概念的双相性是指潜无穷过程与实无穷整体的对立统一,两者同时并存,但又相互区别、相互联系与相互渗透。只看到自然数的内蕴性,必然会形成潜无穷观;只看到自然数的排序性,必然会形成实无穷观。这种片面性的观点是潜无穷观和实无穷观长期对立的根源。

③ 数理逻辑。从 1734 年贝克莱悖论到 1889 年皮亚诺出版《算术原理新方

法》，数学家们为了克服第二次数学危机，进行了数学基础理论——数学分析算术化的研究，结果证明了：

数学分析基础—实数理论—有理数理论—自然数理论

如果自然数的逻辑无矛盾，那么实数理论也就无矛盾。

19 世纪末德国著名数学家康托尔创立集合论，它是人类历史上系统地建立的第一个实无穷理论，是实数理论以至整个数学的基础。在现代数学中，用集合论的语言重新描述了代数学、几何学和数学分析，解决了它们中间长期存在的一些问题。又引出了实变函数论、抽象代数、点集拓扑学等众多现代数学分支。可以说，到 20 世纪初，集合论已经渗透到几乎所有的数学领域。

产生集合论的基本原因，来自第二次数学危机引起的数学分析算术化研究，这个研究过程中的实数、有理数与自然数等概念，和无穷小、无穷大、极限、连续等概念，都与无穷集合有关，从而提出了无穷集合在数学中存在的合理性问题，突出地表现在无穷集合的无矛盾性问题上。由于集合论已经成为现代数学中的基础理论。它的概念和方法渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学和质点力学等一些自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改变了这些学科的面貌，如果没有集合论的观点，很难对现代数学获得一个深刻的理解。于是，无穷集合论的无矛盾性问题在罗素悖论的激发下，立即成为现代数学发展中亟待解决的重大课题。

许多数学家认为：这次危机涉及数学的根本，必须加以严格地考察。在 1900~1930 年，形成了以罗素为代表的逻辑主义学派，以布劳威尔为代表的直觉主义学派和以希尔伯特为代表的形式主义学派，三派都作出了各自的贡献。但从方法论的角度看，特别要提希尔伯特规划，它的方法的特点如下：首先，从跨学科的角度，从罗素悖论涉及的数学、逻辑学与语言学的角度，考察集合论的悖论问题。其次，从系统的观点出发，用公理化与形式化的方法，把包含自然数算术的形式系统（它是无穷集合论的核心）作为研究对象，全面地研究这个形式系统的相容性、独立性与完备性问题。虽然哥德尔的不完全性定理证明了希尔伯特规划是不能实现的，但是希尔伯特的跨学科的角度、系统的观点与形式化的方法，为无穷问题的研究开辟了一条新的方向与道路。

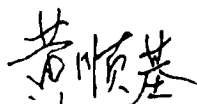
3) 解决问题。综合哲学、数学与逻辑等方面的分析，提出解决问题的方法。

作者从交叉科学的角度，从现代科学技术发展前沿—智能科学与智能计算机出发，在解决问题的过程中，应用图灵机概念作为解决问题的手段，作为综合各方面的矛盾的方法。这是何华灿教授独特的贡献。因为，图灵机是 20 世纪最重要的数学概念之一；是数理逻辑、形式语言与自动机理论、计算机科学和人工智能的理论基础；也是整个信息科学理论体系的重要基础理论之一；图灵机是数学、逻辑、语言、信息与智能的集中体现；图灵机反映了计数器的工作原理。

何华灿教授正是从图灵机找到了研究无穷问题的突破口,构造了无穷位理想计数器,由它生成的新自然数谱和新实数谱,得出了令人信服的结论,即潜无穷和实无穷是数学中不可或缺的两个数学对象;无穷大和无穷小不仅同时存在,而且都只有一个,现代数学应该围绕这样的统一无穷观来重新组建。

5. 开创信息、智能与逻辑研究的新局面

我毫不怀疑地认为:以智能为核心,以何华灿教授的《统一无穷理论》为基础,以钟义信教授的信息-知识-智能转换定律为主线,以创建创新型国家为目标,从不同的领域、不同的视角,研究信息、智能与逻辑,必将开创一个新的局面;我国科学家在当代科学这一前沿领域独树一帜的研究,必将为科学技术现代化、为中华民族的伟大复兴,作出自己的贡献。



2011年8月于人民大学

Foreword Two

Unified Infinity Theory, written by well-known scholar Professor HE Huacan of China, is the basic theory of philosophy, mathematics, logic, information science, computer science and intelligent science. With scientific language, full and accurate materials, the author rigorously describes his breakthrough achievement about Infinity which is a worldwide puzzle. This important achievement is inseparable from his scientific research method of interdisciplinary science. The publication of the book will certainly open new directions and fields for research of intelligence, information, logic, mathematics and philosophy. Here are my enlightenments inspired by the book from the viewpoint of philosophical methodology.

1. Infinite thought of philosophy

With respect to the relationship between philosophy and science, Albert Einstein thought that philosophy was the pursuit for knowledge in the most common and most extensive forms; therefore, philosophy could be considered as the mother of all sciences. There have been naive and speculative concepts about Infinity in philosophies of ancient China and Western countries that provide valuable ideas for later generations.

In Chinese philosophy, Tao in Lao Tzu's idea has neither shape nor form, and has neither sound nor smell. It can be so large as to have no external limitation and can be so small as to have no internal limitation. That is to say, Tao is infinite. Without external limitation means infinitely great while without internal limitation means infinitely small. Chuang Tzu said: "Take half from a foot long stick each day, well then you will never exhaust it." It expresses an idea of infinite division. Mo Tzu thought that limitation is the area can be completely measured and infinity is the area can never be measured.

In ancient Greek philosophy, Thales thought that matter could be divided infinitely, which was a bud of potential infinity concept; Demokritos believed that there was the smallest indivisible particle of material, which was a bud of actual infinity concept. The Zeno's paradoxes were the first instances using the concept

of infinity to deal with problems in the history. The problems he proposed that motion did not exist and Achilles could not catch the tortoise involved the idea of infinite division. And the problems of silently standing and walking involve issues of inseparable infinitesimal.

Different philosophical traditions of the West and the East can and should complement each other in scientific research. This is a methodological principle to treat ancient thoughts. The author of this book makes readers to understand the ins and outs of the infinity problem with rich materials.

About the basic question of philosophy, the relationship between our subjective and objective, Engels proposed a prototype of the mathematical infinity thinking. He thought that a variety of quantities (all kinds of differential and infinity) in calculus is “free creation and imagination objects” of pure human spirit; however, “prototypes of a variety of imaginary quantities were provided by nature. ”For the concepts of number and shape in mathematical research, they are “not from any other place, but come from the real world. ” Engels further pointed out: “All of the so-called pure mathematics is abstract, and all of its quantities are strictly imaginary quantities... mathematical infinity is borrowed from the reality, albeit unconsciously borrowed from it so it cannot be explained by itself and abstract mathematics, but be explained by the reality. ”

The author's ideas are the same as that of Engels. He said: “All people, including professional mathematicians and general readers, have not really seen infinity and infinitesimal. It has not a prototype can be directly referenced in discussions on the definition and characters of them. They can only reckon the developing trend of the natural numbers $0, 1, 2, \dots, n, n+1 \dots$, For infinity and infinitesimal, there is no agreement of opinion at all. ” (Citations not indicated the source, are from the book, the same below). So, the key of the problem is to find the correct prototype of infinity. From the natural numbers and the source of mathematics, the decimal system counters, combined with his long experience in computer work, the author proposed a very profound thought. He thinks that the counter is the number's mother, and natural number is her only child. Other forms of artificial numbers (negative numbers, integers, rational numbers, real numbers, complex numbers, and various multi-dimensional numbers, etc.) are derived from the natural numbers. Therefore, based on natural numbers, the author finds a model to generate all natural numbers, which is the Ideal Counter Model. It is not only able to do follow-up (+1) operation to generate all natural

numbers, but also can show the situation of the natural number-coded significant bit following the change. And it can provide change information of natural number from the height change and numerical value change. Based on finding limitations of traditional natural numbers, a complete set of natural number is set up and a unified concept of infinity is put forward. Therefore the model of an ideal counter derived from a philosophical prototype idea, is the cornerstone of unified infinity theory.

2. Basic theory research of mathematics

Thomas Kuhn, a famous scientific philosopher, studied the history of science over a long period of time. He put forward the scientific development model in his masterpiece, *Structure of Scientific Revolutions* (1962). He thought that the development of science experiences generally the following stages: Former science-normal science-abnormal and crisis-scientific revolution-new normal science ...

Former science period: the period that a discipline forms. There are a variety of problems, thoughts and methods.

Normal science period: there are common understanding about the subject, scope and research methods of a discipline.

Abnormal and crisis period: there are phenomena contradictory with and can not be explained by normal science; normal sciences frequently fail to solve the abnormal phenomena and make them to be difficult problems, thus leading to a scientific crisis.

Scientific revolution period: the way to solve the crisis lies in abandoning old theories and creating new ones. Some scientists have free thought, innovative spirit and courage to explore and propose new ideas. They found new theories to produce a significant revolution in scientific revolution.

Mathematical development follows the process above. In mathematics, number is the basic concept, and every expansion of number's concept marks a leap of mathematics. The expansion of number and the associated improvement of number system theory mark the different stages of the development of mathematics. Therefore, the historical development of the basic mathematic theory can be studied in the perspectives of the formations and developments of number and number system.

The former science of mathematics is the period of mathematics forming.