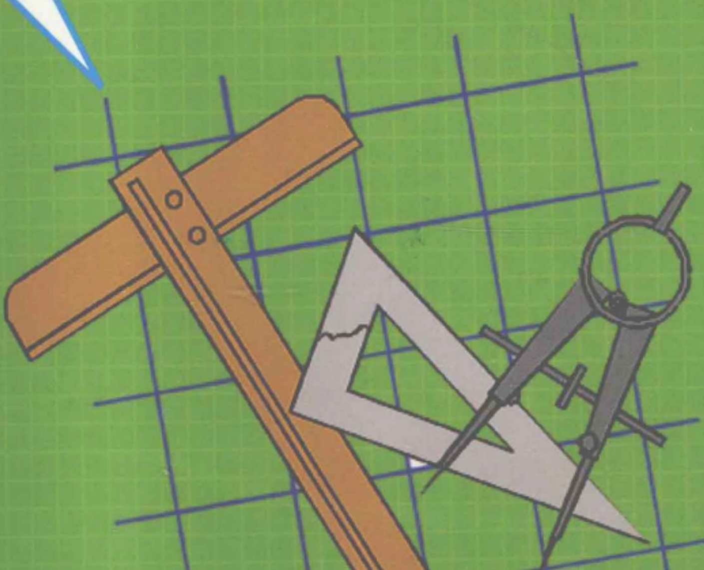
中考数学
压轴题集训

策　划：刘根林
主　编：万冬梅

解开数学奥秘
轻松跨越数学关

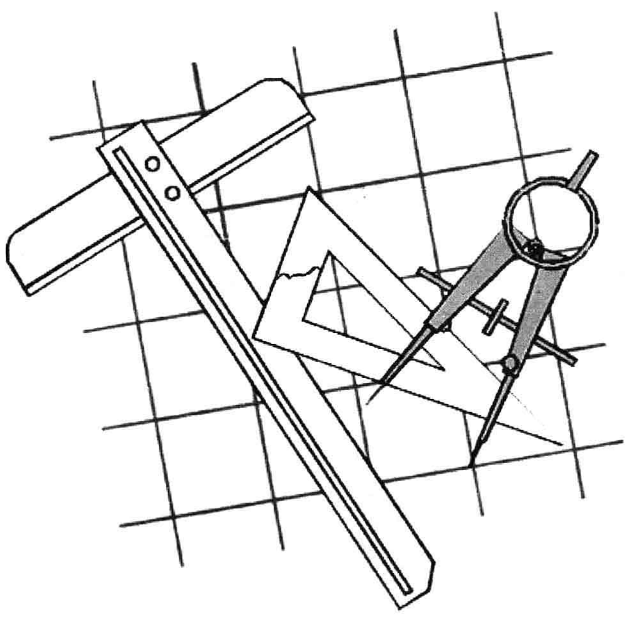


南京大学出版社

中考数学
压轴题集训

解开数学奥秘
轻松跨越数学关

策　划：刘根林
主　编：万冬梅
编　委：万冬梅　肖永华
曹建国　鲁国华
朱桂生



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学压轴题集训 / 万冬梅主编. --南京 ：南京大学出版社，2011.2

ISBN 978-7-305-08060-9

Ⅰ.①中... Ⅱ.①万... Ⅲ.①数学课—初中—解题—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第014669号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址　http：//www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

书　　名　中考数学压轴题集训
主　　编　万冬梅
责任编辑　张　语　　　　　　编辑热线　025-86208581
审读编辑　孟庆生

照　　排　南京新洲印刷有限公司制版中心
印　　刷　南京紫竹印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 18.75　字数 424千
版　　次　2011 年 3 月第 1 版　2011 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-08060-9
定　　价　36.80 元

发行热线　025-83594756　025-86219022
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com（市场部）

前言 QiaNYaN

在学习中，“有效训练”一直是老师同学的目标追求，也是“新生活教育的行动研究”课题研究者们不断探索的课题。为实现“轻负高效”的学习目标，本书聚焦“压轴题”，试图让学生找到学习的有效路径。本书特点包括：

◆ 有效训练策略之一：抓重点

“压轴题”是对测试试卷中后几道试题的习惯称呼。一般都是试卷中综合性最强、难度最大、能够真正拉开水平档次的题型。能够把握住压轴题，在一定程度上就意味着获得高分。该书使用对象是中等生、中上等生、尖子生，它是为提升这些学生的数学思维能力提供的高质量的教学辅导用书。本书通过深层次地梳理各地中考试卷的压轴题，帮助学生理解并把握压轴题的命题方向和规律，掌握解答压轴题的技巧，使学生在有限的复习时间内，提高学习效率，取得成绩的飞跃。

◆ 有效训练策略之二：分层次

为适合不同层次的学生，本书在题目设计上采取分层策略：一般难度的训练题占 40%（即稍高于课本、看起来难、但一点就通的题目），中上难度的训练题占 30%（与数学课本中思考题难度相当的题目），高难度的训练题占 30%（即有思维难度、探索性强、实践性强的题目，还采用了部分奥数题）。

◆ 有效训练策略之三：高质量

各类题目以提高学生数学冲刺能力和探索兴趣为目的，具有针对性和实用性。为了便于学习复习，本书将各种试题进行分类，按专题介绍，每个专题设有“解法归纳”、“例题精析”和“考题真练”等栏目。“解法归纳”主要介绍本专题的相关知识，帮助学生构建知识结构；“例题精析”重点介绍该类型题目的知识要点和解题规律，并适当进行考点延伸；“考题真练”则是从浩瀚的题海中精选出有代表意义的题目让学生开展有效训练，真正实现触类旁通、举一反三的学习目标。

由于编写时间较紧，书中不足之处，敬请广大读者特别是专家学者海涵并不吝赐教！

目录 MULU

1 函数图像中点的存在性问题

第1专题　存在性问题中的相似三角形

解法归纳

相似三角形是初中几何的重要内容，包括相似三角形的性质，判断定理及其应用，是中考的必备内容. 以二次函数为背景的综合题是常见的热点题型，此类题型对学生的能力要求很高. 如何不用题海战术，让学生真正掌握解决这类问题的方法呢？掌握好相似三角形的基础知识是至关重要的.

一、三角形相似的性质与判定

1. 平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

2. 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

3. 如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

4. 如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似.

5. 直角三角形相似判定定理1——斜边与一条直角边对应成比例的两直角三角形相似.

6. 直角三角形相似判定定理2——直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原直角三角形相似，并且分成的两个直角三角形也相似.

7. 射影定理.

8. 相似三角形的一切对应线段(对应高、对应中线、对应角平分线、外接圆半径、内切圆半径等)的比等于相似比. 相似三角形周长的比等于相似比.

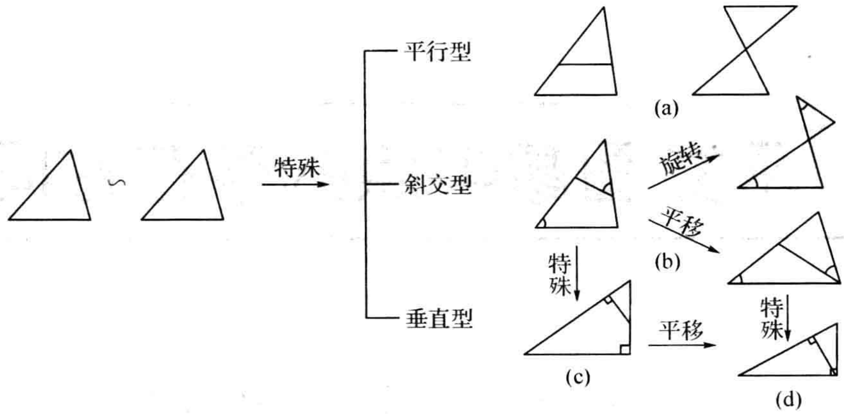
9. 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

二、相似三角形中一些常用的基本图形

1. 平行型如图(a)；

2. 斜交型如图(b)，图(b)中有公边共角的两个相似三角形，公边的平方等于两相似三角形落在一条直线上的两边之积；

3. 垂直型如图(d)，图(d)中由射影定理及面积关系等可得常用的乘积式.



三、思想方法

1. 分类讨论的思想.分类讨论在存在性问题中经常见到.三角形相似的讨论往往从以下几个方面讨论：①由边的对应关系的不确定性而讨论；②由角的对应关系的不确定性而讨论.

2. 方程思想.常常通过设未知数，根据相似三角形的对应边成比例列方程求解.分类讨论应遵循分类的对象是确定的，标准是统一的，不遗漏，不重复，分层次，不越级讨论.

3. 转化的思想.

例题精析

例 1 (临沂)如图 1-1-1，抛物线经过 $A(4,0)$、$B(1,0)$、$C(0,-2)$三点.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) P 是抛物线上一动点，过点 P 作 PM 垂直于 x 轴，垂足为 M，是否存在点 P，使得以 A、P、M 为顶点的三角形与三角形 OAC 相似？若存在，请求出符合条件的点 P 坐标；若不存在，请说明理由.

(3) 在直线 AC 上方的抛物线上有一点 D，使得 $\triangle DCA$ 的面积最大，求出点 D 的坐标.

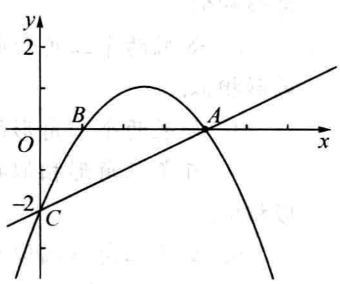


图 1-1-1

● 思路分析

(1) 求抛物线的解析式无非是下列几种方法：①顶点式；②两点式；③一般式.

(2) 分类讨论：①当点 P 在 x 轴上方时；②当点 P 在点 A 的右侧时；③当点 P

在点 B 的左侧时.每一种情况有 $\frac{PM}{AM}=\frac{AO}{CO}=2$ 与 $\frac{PM}{AM}=\frac{CO}{AO}=\frac{1}{2}$ 两种可能性.

(3) 设点 D 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2\right)$,利用点到线的距离公式计算点到线的距离最大时 x 的值,再代入抛物线计算该点的坐标即可.

● 详细解答

(1) 因为抛物线与 x 轴交于 $A(4,0)$、$B(1,0)$ 两点,所以设

$$y=a(x-1)(x-4),\text{代入 } C(0,-2),$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$.

所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$.

(2) 存在点 P,使得以 A、P、M 为顶点的三角形与△OAC 相似.

设点 P 的坐标为 $\left(x,-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2\right)$.

① 如图 1-1-2,当点 P 在 x 轴上方时,$1<x<4$,$PM=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$,$AM=4-x$.

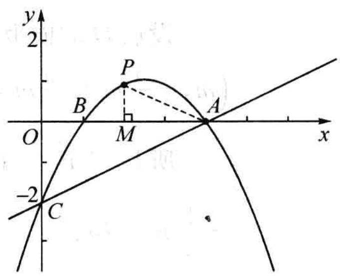


图 1-1-2

a. 如果 $\frac{PM}{AM}=\frac{AO}{CO}=2$,那么 $\frac{-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=2$.

解得 $x=5$,不符合题意.

b. 如果 $\frac{PM}{AM}=\frac{CO}{AO}=\frac{1}{2}$,那么 $\frac{-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=\frac{1}{2}$,解得 $x=2$.

所以点 P 的坐标为 $P(2,1)$.

② 如图 1-1-3,当点 P 在点 A 的右侧时,

有 $x>4$,$PM=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$,$AM=x-4$.

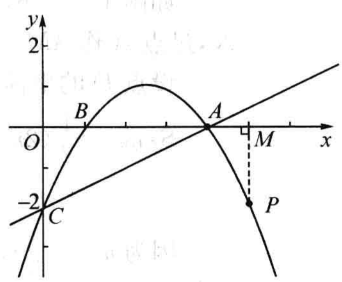


图 1-1-3

a. 如果 $\frac{PM}{AM}=\frac{AO}{CO}=2$,那么

$$\frac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{x-4}=2.$$

解得 $x=5$,所以点 P 的坐标为 $P(5,-2)$.

b. 如果 $\frac{PM}{AM}=\frac{CO}{AO}=\frac{1}{2}$,那么 $\frac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{x-4}=\frac{1}{2}$,解得 $x=2$,不符合题意.

③ 如图 1-1-4,当点 P 在点 B 的左侧时,$x<1$,$PM=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$,$AM=4-x$.

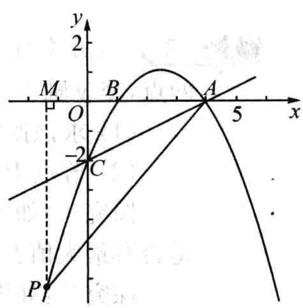


图 1-1-4

a. 如果$\frac{PM}{AM}=\frac{AO}{CO}=2$,那么$\frac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=2$,解得$x=-3$.

所以点P的坐标为$P(-3,-14)$.

b. 如果$\frac{PM}{AM}=\frac{CO}{AO}=\frac{1}{2}$,那么$\frac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=\frac{1}{2}$,解得$x=0$,此时点$P$与点$C$重合,所以点$P$不符合题意.

综上所述,符合条件的点P的坐标为$(2,1)$、$(5,-2)$、$(-3,-14)$.

(3) 如图 1-1-5,过点D作x轴的垂线交AC于点E.

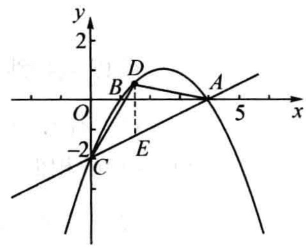


图 1-1-5

易知直线AC的解析式为$y=\frac{1}{2}x-2$.

设点D的横坐标为$m(1<m<4)$,所以点D坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2\right)$,点$E$的坐标为$\left(m,\frac{1}{2}m-2\right)$.

所以 $DE=\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2\right)-\left(\frac{1}{2}m-2\right)=-\frac{1}{2}m^2+2m$.

所以$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2+2m\right)\times4=-(m-2)^2+4$.

所以当$m=2$时,$\triangle DCA$面积最大,此时点D的坐标为$(2,1)$.

● 考点伸展

第(3)题也可这样解:

如图 1-1-6,过点D作y轴的垂线,交y轴于点N,过点A作AM平行于y轴交DN于点M.

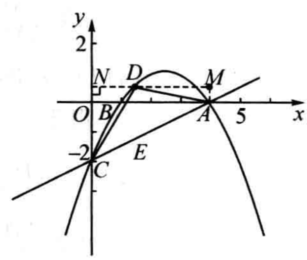


图 1-1-6

设点D的坐标为$(m,n)(1<m<4)$,那么

$$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}(2n+2)\times4-\frac{1}{2}n(4-m)-\frac{1}{2}m(2+n)$$
$$=-m+2n+4.$$

因为$n=-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2$,所以$S_{\triangle DAC}=-m^2+4m$.

以下解法同上.

●例 2 (丹东)已知在平面直角坐标系中,抛物线$y=ax^2-x+3(a\neq0)$交x轴于A、B两点,交y轴于点C,且对称轴为直线$x=-2$.

(1) 求该抛物线的解析式及顶点D的坐标;

(2) 若点$P(0,t)$是y轴上的一个动点,请进行如下探究.

探究一:如图 1-1-7,设$\triangle PAD$的面积为S,令$W=t\cdot S$,当$0<t<4$时,W是否有最大值?如果有,求出W的最大值和此时t的值;如果没有,请说明理由;

探究二:如图 1-1-8,是否存在以P、A、D为顶点的三角形与$\text{Rt}\triangle AOC$相似?如果存在,求点P的坐标;如果不存在,请说明理由.

$\left[\text{参考资料:抛物线 } y=ax^2+bx+c(a\neq0)\text{ 的对称轴是直线 } x=-\dfrac{b}{2a}\right]$

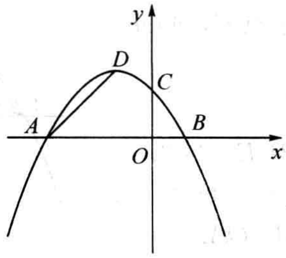


图 1-1-7

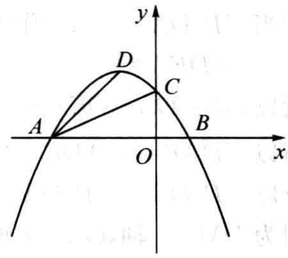


图 1-1-8

● 思路点拨

(1) 由对称轴为直线 $x=-2$,并根据抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的对称轴的直线方程 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 求解.

(2) ①设 $P(0,t)$,$\triangle PAD$ 的面积 S 用 t 表示,转化为二次函数的顶点式就可以求出 S 的最大值.

②在以 P、A、D 为顶点的三角形与 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 相似,抓住$\triangle PAD$ 的直角的不确定性进行分类讨论.

● 详细解答

(1) 因为抛物线 $y=ax^2-x+3(a\neq0)$ 的对称轴为直线 $x=-2$,

所以 $-\dfrac{-1}{2a}=-2$,即 $a=-\dfrac{1}{4}$.

所以 $y=-\dfrac{1}{4}x^2-x+3$.

所以 $D(-2,4)$.

(2) 探究一:当 $0<t<4$ 时,W 有最大值.

因为抛物线 $y=-\dfrac{1}{4}x^2-x+3$ 交 x 轴于 A、B 两点,交 y 轴于点 C,所以

$$A(-6,0)、B(2,0)、C(0,3).$$

所以 $OA=6$,$OC=3$.

当 $0<t<4$ 时,如图 1-1-9 所示,作 $DM\perp y$ 轴于点 M,则 $DM=2$,$OM=4$.

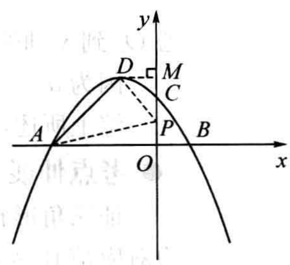


图 1-1-9

因为 $P(0,t)$,所以

$$OP=t,MP=OM-OP=4-t.$$

因为
$$\begin{aligned}S_{\triangle PAD}&=S_{\text{梯形}OADM}-S_{\triangle AOP}-S_{\triangle DMP}\\&=\frac{1}{2}(DM+OA)\cdot OM-\frac{1}{2}OA\cdot OP-\frac{1}{2}DM\cdot MP\\&=\frac{1}{2}\times(2+6)\times4-\frac{1}{2}\times6\times t-\frac{1}{2}\times2\times(4-t)\\&=12-2t,\end{aligned}$$

所以 $W=t(12-2t)=-2(t-3)^2+18$.

所以当 $t=3$ 时，W 有最大值，$W_{最大值}=18$.

探究二：存在. 分三种情况，如图 1-1-10 所示.

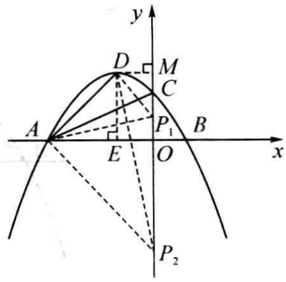


图 1-1-10

①当 $\angle P_1DA=90°$ 时，作 $DE\perp x$ 轴于点 E，则 $OE=2$，$DE=4$，$\angle DEA=90°$.

所以 $AE=OA-OE=6-2=4=DE$.

所以 $\angle DAE=\angle ADE=45°$，$AD=\sqrt{2}DE=4\sqrt{2}$.

所以 $\angle P_1DE=\angle P_1DA-\angle ADE=90°-45°=45°$.

因为 $DM\perp y$ 轴，$OA\perp y$ 轴，所以 $DM/\!/OA$.

所以 $\angle MDE=\angle DEA=90°$.

所以 $\angle MDP_1=\angle MDE-\angle P_1DE=90°-45°=45°$.

所以 $P_1M=DM=2$，$P_1D=\sqrt{2}DM=2\sqrt{2}$.

此时 $\dfrac{OC}{P_1D}=\dfrac{OA}{AD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. 又因为 $\angle AOC=\angle P_1DA=90°$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ADP_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle AOC$，所以 $OP_1=OM-P_1M=4-2=2$，即 $P_1(0,2)$. 所以当 $\angle P_1DA=90°$ 时，存在点 P_1，使 $\mathrm{Rt}\triangle ADP_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle AOC$.

此时点 P_1 的坐标为 $(0,2)$.

②当 $\angle P_2AD=90°$ 时，则 $\angle P_2AO=45°$，所以 $P_2A=\dfrac{OA}{\cos45°}=6\sqrt{2}$.

所以 $\dfrac{P_2A}{OA}=\dfrac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$.

因为 $\dfrac{AD}{OC}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，所以 $\dfrac{AD}{OC}\neq\dfrac{P_2A}{OA}$.

所以 $\triangle P_2AD$ 与 $\triangle AOC$ 不相似，此时点 P_2 不存在.

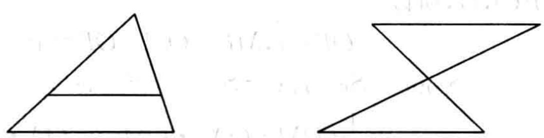
③当 $\angle AP_3D=90°$ 时，以 AD 为直径作 $\odot O_1$，则 $\odot O_1$ 的半径 $r=\dfrac{AD}{2}=2\sqrt{2}$，圆心 O_1 到 y 轴的距离 $d=4$.

因为 $d>r$，所以 $\odot O_1$ 与 y 轴相离，故不存在点 P_3，使 $\angle AP_3D=90°$.

综上所述，只存在一点 $P(0,2)$ 使 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 相似.

● 考点伸展

证三角形相似常用的方法有以下几种：① 最常用的是两组角对应相等；②两边对应成比例，且夹角相等；③有平行线时出现的基本图形：A 形与 X 形（如图 1-1-11）.



A形　　X形

图 1-1-11

●例 3 （枣庄）如图 1-1-12，抛物线的顶点为 $A(2,1)$，且经过原点 O，与 x 轴的另

一个交点为 B.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 连接 OA、AB,在抛物线上求点 M,使 $\triangle MOB$ 的面积是 $\triangle AOB$ 面积的 3 倍.

(3) 在 x 轴下方的抛物线上是否存在点 N,使 $\triangle OBN$ 与 $\triangle OAB$ 相似?若存在,求出点 N 的坐标;若不存在,说明理由.

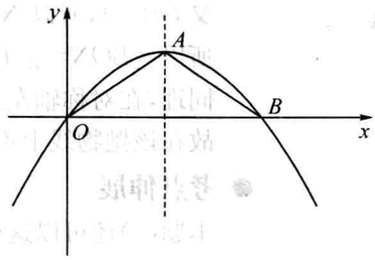


图 1-1-12

思路点拨

(1) 已知抛物线的顶点(2,1),可设抛物线的解析式为顶点式 $y=a(x-2)^2+1$.

(2) $\triangle MOB$ 与 $\triangle AOB$ 是同底的两个三角形,要使 $\triangle MOB$ 的面积是 $\triangle AOB$ 面积的 3 倍,只要使 $\triangle MOB$ 的边 OB 上的高是 $\triangle AOB$ 的边 OB 上的高的 3 倍即可,所以这样的点只可能在 x 轴下方的抛物线上.

(3) 数形结合,求出点 N 的坐标,并判断 $\triangle OBN$ 是否与 $\triangle OAB$ 相似.

详细解答

(1) 由题意,可设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+1$.

因为抛物线过原点,所以

$$a(0-2)^2+1=0, a=-\frac{1}{4}.$$

所以抛物线的解析式为

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1=-\frac{1}{4}x^2+x.$$

(2) $\triangle AOB$ 和所求 $\triangle MOB$ 同底不等高,且 $S_{\triangle MOB}=3S_{\triangle AOB}$,

所以 $\triangle MOB$ 的高是 $\triangle AOB$ 高的 3 倍,即 M 点的纵坐标是 -3.

所以 $-3=-\frac{1}{4}x^2+x$,即 $x^2-4x-12=0$.

解得 $x_1=6, x_2=-2$.

所以满足条件的点有两个,分别是 $M_1(6,-3)$,$M_2(-2,-3)$.

(3) 不存在.

由抛物线的对称性,知 $AO=AB$,$\angle AOB=\angle ABO$.

若 $\triangle OBN$ 与 $\triangle OAB$ 相似,必有 $\angle BON=\angle BOA=\angle BNO$.

如图 1-1-13,设 ON 交抛物线的对称轴于点 A',显然 $A'(2,-1)$.

所以直线 ON 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x$.

由 $-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{4}x^2+x$,得 $x_1=0, x_2=6$.

所以 $N(6,-3)$.

过点 N 作 $NE\perp x$ 轴,垂足为点 E. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEN$ 中,$BE=2$,$NE=3$.

所以 $NB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

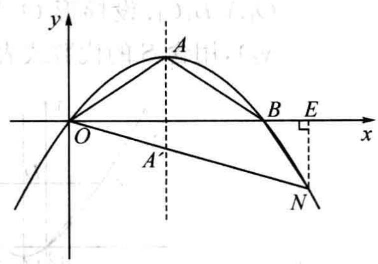


图 1-1-13

又 $OB=4$，所以 $NB\neq OB$.

所以$\angle BON\neq\angle BNO$，则$\triangle OBN$ 与$\triangle OAB$ 不相似.

同理，在对称轴左边的抛物线上也不存在符合条件的点 N.

故在该抛物线上不存在点 N，使$\triangle OBN$ 与$\triangle OAB$ 相似.

● 考点伸展

本题(3)还可以这样解：

如图 1-1-14，由抛物线的对称性，知 $AO=AB$，$\angle AOB=\angle ABO$.

若$\triangle OBN$ 与$\triangle OAB$ 相似，必有

$$\angle BON=\angle BOA=\angle BNO,$$

所以 $OB=BN=4$.

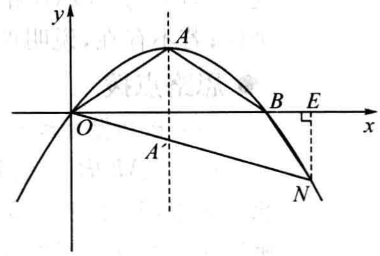


图 1-1-14

设点 N 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{4}m^2+m\right)$，过点 N 作 NE 垂直于 x 轴，垂足为 E，则 $\tan\angle OBA=\tan\angle BON=\frac{1}{2}$.

即$\dfrac{\frac{1}{4}m^2-m}{m}=\dfrac{1}{2}$，解得 $m_1=0$，$m_2=6$.

所以 $N(6,-3)$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEN$ 中，$BE=2$，$NE=3$.

所以 $NB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

所以 $NB\neq OB$，所以$\angle BON\neq\angle BNO$，故$\triangle OBN$ 与$\triangle OAB$ 不相似.

同理，在对称轴左边的抛物线上也不存在符合条件的点 N.

故在该抛物线上不存在点 N 使$\triangle OBN$ 与$\triangle OAB$ 相似.

例 4 （临沂）如图 1-1-15，已知梯形 $OABC$，抛物线分别过点 $O(0,0)$、$A(2,0)$、$B(6,3)$.

(1) 直接写出抛物线的对称轴、解析式及顶点 M 的坐标.

(2) 将图 1-1-15 中梯形 $OABC$ 的上、下底边所在的直线 OA、CB 以相同的速度同时向上平移，分别交抛物线于点 O_1、A_1、C_1、B_1，得到如图 1-1-16 的梯形 $O_1A_1B_1C_1$. 设梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积为 S，A_1、B_1 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，用含 S 的代数式表示 x_2-x_1，并求出当 $S=36$ 时点 A_1 的坐标.

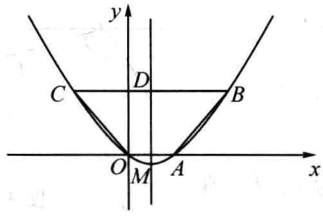


图 1-1-15

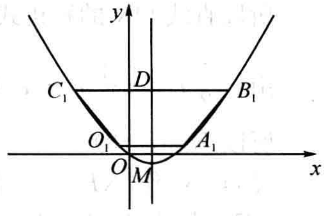


图 1-1-16

(3) 在图 1-1-15 中，设点 D 坐标为(1,3)，动点 P 从点 B 出发，以 1 个单位

长度每秒的速度沿着线段 BC 运动，动点 Q 从点 D 出发，以与点 P 相同的速度沿着线段 DM 运动. P、Q 两点同时出发，当点 Q 到达点 M 时，P、Q 两点同时停止运动. 设 P、Q 两点的运动时间为 t，是否存在某一时刻 t，使得直线 PQ、直线 AB、x 轴围成的三角形与直线 PQ、直线 AB、抛物线的对称轴围成的三角形相似？若存在，请求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

● 思路点拨

(1) 设抛物线的解析式为两点式，用待定系数法求出抛物线的解析式，再转化为顶点式，即可求出抛物线的对称轴、顶点坐标，或者直接设抛物线的解析式为顶点式，用待定系数法求出解析式即可.

(2) 根据梯形的面积公式求出面积 S，面积 S 用关于 x_2+x_1 的式子表示. 梯形的高为 $y_2-y_1=3$，把 y_2-y_1 转化为关于 x_2-x_1 和 x_2+x_1 的式子，整理出 S 与 x_2-x_1 关系式即可.

(3) 分两种情况讨论：①PQ 与 AB 平行前两三角形相似；②PQ 与 AB 平行后两三角形相似. 这两种情况下的三角形都是钝角三角形，又有一个公共锐角，所以上述两种情况下的三角形相似都分别只有一个情况.

● 详细解答

(1) 对称轴为直线 $x=1$，解析式为 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x$，即 $y=\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{8}$.

顶点坐标为 $M\left(1,-\frac{1}{8}\right)$.

(2) 由题意，得 $y_2-y_1=3$，即 $y_2-y_1=\frac{1}{8}x_2^2-\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{8}x_1^2+\frac{1}{4}x_1=3$，得

$$(x_2-x_1)\left[\frac{1}{8}(x_2+x_1)-\frac{1}{4}\right]=3. \quad ①$$

$$S=\frac{2(x_1-1+x_2-1)\times 3}{2}=3(x_1+x_2)-6.$$

得 $x_1+x_2=\frac{S}{3}+2.$ ②

把②式代入①式并整理，得 $x_2-x_1=\frac{72}{S}(S>0)$.

当 $S=36$ 时，$\begin{cases}x_2+x_1=14,\\x_2-x_1=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=6,\\x_2=8.\end{cases}$

把 $x_1=6$ 代入抛物线解析式得 $y_1=3$，所以点 $A_1(6,3)$.

(3) 存在.

由题意，得直线 AB 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$，可得直线 AB 与抛物线对称轴的交点 E 的坐标为 $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$.

所以 $BD=5$，$DE=\frac{15}{4}$，$DP=5-t$，$DQ=t$.

当 $PQ/\!/AB$ 时，$\frac{DQ}{DE}=\frac{DP}{DB}$.

所以$\frac{t}{\frac{15}{4}}=\frac{5-t}{5}$,得 $t=\frac{15}{7}$.

设直线 PQ 与直线 AB、x 轴的交点分别为点 F、G. 下面分两种情况讨论:

①当 $0<t<\frac{15}{7}$时,如图 1-1-17 所示.

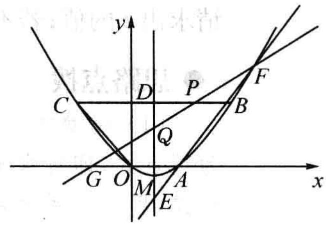


图 1-1-17

因为$\triangle FQE\backsim\triangle FAG$,所以$\angle FGA=\angle FEQ$.

所以$\angle DPQ=\angle DEB$.

易得$\triangle DPQ\backsim\triangle DEB$,所以$\frac{DQ}{DB}=\frac{DP}{DE}$.

所以$\frac{t}{5}=\frac{5-t}{\frac{15}{4}}$.

解得 $t=\frac{20}{7}>\frac{15}{7}$. 所以 $t=\frac{20}{7}$(舍去).

②当$\frac{15}{7}<t<3\frac{1}{8}$时,如图 1-1-18 所示.

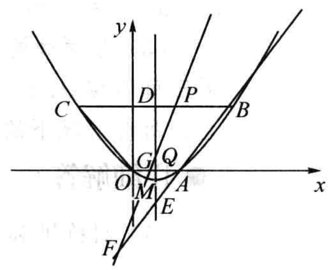


图 1-1-18

因为$\triangle FQE\backsim\triangle FAG$,所以$\angle FAG=\angle FQE$.

因为$\angle DQP=\angle FQE$,$\angle FAG=\angle EBD$,

所以$\angle DQP=\angle DBE$. 易得$\triangle DPQ\backsim\triangle DEB$.

所以$\frac{DQ}{DB}=\frac{DP}{DE}$,即$\frac{t}{5}=\frac{5-t}{\frac{15}{4}}$,所以 $t=\frac{20}{7}$.

所以当 $t=\frac{20}{7}$ s 时,直线 PQ、直线 AB、x 轴围成的三角形与直线 PQ、直线 AB、抛物线的对称轴围成的三角形相似.

● 考点伸展

本题(2)还可以这样考虑:

可将 $y=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}$向左平移一个单位得到 $y=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{8}$,再用(2)中类似的方法可求得 $x'_2-x'_1=\frac{72}{S}$,$A'_1(5,3)$.

所以 $x_2-x_1=\frac{72}{S}$,$A_1(6,3)$.

例 5 (金华)如图 1-1-19,把含有 30°角的三角板 ABO 置入平面直角坐标系中,A、B 两点坐标分别为(3,0)和$(0,3\sqrt{3})$. 动点 P 从点 A 开始沿折线 $AO-OB-BA$ 运动,点 P 在 AO、OB、BA 上运动的速度分别为 1、$\sqrt{3}$、2(单位长度/秒). 一直尺的上边缘 l 从 x 轴的位置开始以$\frac{\sqrt{3}}{3}$(单位长度/秒)的速度向上平行移动(即移动过程中保持 $l/\!/x$ 轴),且分别与 OB、AB 交于 E、F 两点. 设动点 P 与动直线 l 同时出发,运动时间为 t s,当点 P 沿

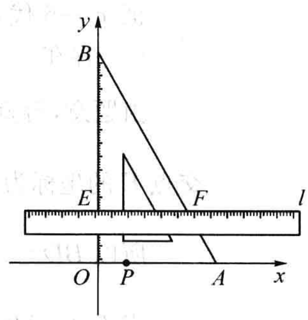


图 1-1-19

折线 $AO-OB-BA$ 运动一周时，直线 l 和动点 P 同时停止运动.

请解答下列问题：

(1) 过 A、B 两点的直线解析式是____________.

(2) 当 $t=4$ 时，点 P 的坐标为__________；当 $t=$__________时，点 P 与点 E 重合.

(3) ①作点 P 关于直线 EF 的对称点 P'. 在运动过程中，若形成的四边形 $PEP'F$ 为菱形，则 t 的值是多少？

②当 $t=2$ 时，是否存在着点 Q，使得 $\triangle FEQ \backsim \triangle BEP$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

● 思路点拨

(1) 待定系数法. 根据点 A、B 的坐标求直线 AB 的解析式.

(2) 根据 $t=4$ 时，先判断出点 P 的位置，然后再确定其坐标；点 P 与点 E 只能在 y 轴上重合.

(3) ①根据运动路线分类讨论：a. 当点 P 在线段 AO 上时；b. 当点 P 在线段 OB 上时；c. 当点 P 在线段 BA 上时.

②根据题意将 $\triangle BEP$ 绕点 E 顺时针方向旋转 $90°$，得到 $\triangle B'EC$，过点 F 作 $FQ /\!/ B'C$，构造三角形相似. 根据三角形相似对应边成比例，求出点 Q 的坐标，再由对称性求出另一个点 Q'.

● 详细解答

(1) $y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$.

(2) $(0,\sqrt{3})$；$t=\dfrac{9}{2}$.

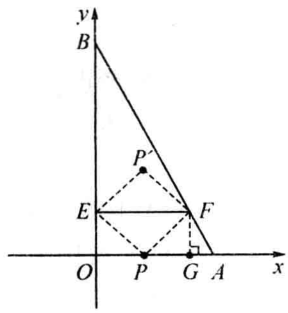


图 1-1-20

(3) ①当点 P 在线段 AO 上时，过点 F 作 $FG \perp x$ 轴，G 为垂足，如图 1-1-20 所示.

因为 $OE=FG$，$EP=FP$，$\angle EOP=\angle FGP=90°$，所以 $\triangle EOP \cong \triangle FGP$，所以 $OP=PG$.

又因为 $OE=FG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$，$\angle OAB=60°$，所以 $AG=\dfrac{FG}{\tan 60°}=\dfrac{1}{3}t$.

而 $AP=t$，所以 $OP=3-t$，$PG=AP-AG=\dfrac{2}{3}t$.

由 $3-t=\dfrac{2}{3}t$，得 $t=\dfrac{9}{5}$.

当点 P 在线段 OB 上时，形成的是三角形，不存在菱形.

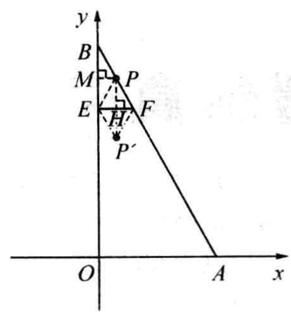


图 1-1-21

当点 P 在线段 BA 上时，过点 P 作 $PH \perp EF$，$PM \perp OB$，且 H、M 分别为垂足，如图 1-1-21 所示.

因为 $OE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$，所以 $BE=3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$，所以 $EF=$

$\dfrac{BE}{\tan 60^\circ}=3-\dfrac{t}{3}$.

所以 $MP=EH=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{9-t}{6}$.

又因为 $BP=2(t-6)$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle BMP$ 中，$BP\cdot\cos 60^\circ=MP$.

即 $2(t-6)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9-t}{6}$，解得 $t=\dfrac{45}{7}$.

所以当 $t=\dfrac{45}{7}$ 或 $t=\dfrac{9}{5}$ 时，四边形 $PEP'F$ 为菱形.

②存在. 理由如下：

因为 $t=2$，所以 $OE=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，$AP=2$，$OP=1$.

将 $\triangle BEP$ 绕点 E 顺时针方向旋转 90°，得到 $\triangle B'EC$，如图 1－1－22 所示.

因为 $OB\perp EF$，所以点 B' 在直线 EF 上.

C 点坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)$.

过点 F 作 $FQ\parallel B'C$，交 EC 于点 Q，则 $\triangle FEQ\backsim\triangle B'EC$.

由 $\dfrac{BE}{FE}=\dfrac{B'E}{FE}=\dfrac{CE}{QE}=\sqrt{3}$，可得点 Q 的坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 运用对称性点 Q' 与点 Q 关于 EF 对称，所以 $Q'\left(-\dfrac{2}{3},\sqrt{3}\right)$.

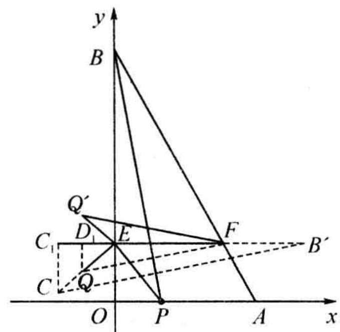


图 1－1－22

● **考点伸展**

本题(2)的详细解法为：

当 $t=4$ 时，点 P 在 OB 上，因为 $OA=3$，点 P 在 OA 上的速度为 1 个单位/秒，所以 $t=3$ 时，点 P 与点 O 重合. 又因为点 P 在 OB 上的速度为 $\sqrt{3}$ 个单位/秒，所以 $OP=\sqrt{3}$，所以点 P 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$.

当点 P 与点 E 重合时，设点 P、E 走过的线段长为 s，运动时间为 t，则有 $s_P-s_E=OA$.

所以 $1\times3+\sqrt{3}(t-3)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}t=3$，所以 $t=\dfrac{9}{2}$.

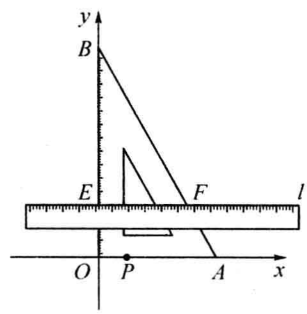
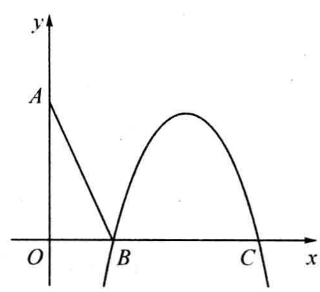


图 1－1－23

考题真练

1. 如图，在直角坐标系 xOy 中，设点 $A(0,t)$、$Q(t,b)$. 平移二次函数 $y=-tx^2$ 的图像，得到的抛物线 F 满足两个条件：①顶点为 Q；②与 x 轴相交于 B、C 两点（$|OB|<|OC|$），连接 AB.

(1) 是否存在这样的抛物线 F，使得 $|OA|^2=|OB|\cdot$



（第 1 题）