



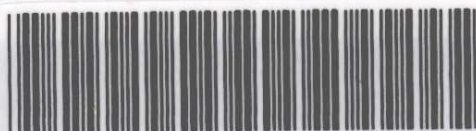
状元笔记

ZHUANGYUAN BIJI

八年级数学 **上**

BS

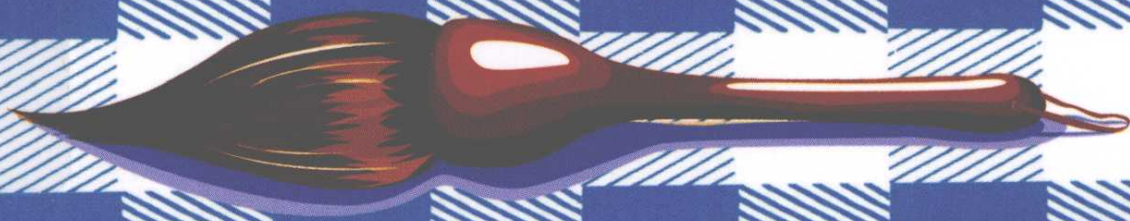
丛书主编：洪林旺 本册主编：赖琼光



YZLI0890161382

昔日状元读书留笔记
今朝我用笔记中状元

★ 内含教材习题答案 ★



龍門書局

龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

ZHUANGYUAN BIJI

八年级数学 上



丛书主编：洪林旺

本册主编：赖琼光

编委：林长征 陈金龙 沈明俊 胡成合
黄跃主 张新溪 张传汕 王盛波
罗幼梅 陈耀通 江木锦 田得喜
简清伟 方慧敏



YZLI0890151382

龍門書局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010-64031958;13801093426

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记. 八年级数学. 上: BS/洪林旺丛书主编;赖琼光本册
主编. —修订版. —北京:龙门书局, 2011

ISBN 978-7-80160-807-9

I. 状… II. ①洪…②赖… III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 055823 号

责任编辑:张凤玲 李淑丽/封面设计:魏晋文化

龍 門 書 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

www.longmenbooks.com

北京汇林印务有限公司 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2003 年 6 月第 一 版 开本: A5(890×1240)

2011 年 4 月第六次修订版 印张: 10 1/2

2011 年 5 月第十八次印刷 字数: 424 000

定 价: 20.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

他山之石，可以攻玉

——《状元笔记》前言

是否，在冥思苦想之余，仍感困惑？

是否，在洗耳恭听之时，还是无助？

是否，在挑灯夜战之后，犹觉茫然？

问鼎状元，如千军万马过独木桥。父母、老师不要求每一位孩子、每一位学生都能力争状元，但如果我们都来借鉴、掌握状元的学习方法、学习技巧，那么，我们就能跳出题海，用较少的时间取得良好的学习效果。因此，龙门书局将全国各省高考状元的各个学科的学习心得和方法技巧，经过名师整理、挖掘与提升出来，形成《状元笔记》，与同学们一起分享。

它用“详解”破译你的困惑；用“技巧”解除你的无助；用“警示”驱走你的茫然。

翻开这本笔记，你将看到的经典栏目有：

教材详解：全面、细致地讲解教材上的知识点，深入剖析其内涵，并配典型例题对其进行巩固。一讲一练夯实基础，使你考试稳拿基础分。

解题技巧：归纳各节的解题方法和技巧，辅以例题，通过对例题的分析和点评，让你掌握解题所用的通性通法以及小窍门，快速提高解题能力。

状元笔记：总结规律、提炼学习方法和技巧，让你掌握状元的学习方法。

陷阱警示：梳理学习过程中遇到的易错点和易混点，通过错因透视，扫除学习中的困惑和障碍。

参考答案及点拨：给出本书所有习题以及教材习题的答案，并用精细的分析，对习题进行点拨。

亲爱的同学，“他山之石，可以攻玉”，取状元学习之精华，架成功积累之天梯。如能掌握本书的方法和技巧，到时，你将成为或班级、或学校、或县市、或全省乃至全国的佼佼者。

在学习过程中有什么疑问或本书如有遗漏之处，请与 zyxxbj@163.com 联系，不胜感谢！

洪林旺

2011年4月

《状元笔记》学生顾问团

2007年山西省文科状元
现就读于中国人民大学财政金融学院
星座：射手座
喜欢的运动：爬山 乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣
反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，
打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，
争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，
持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”



2006年浙江省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：跑步 滑板
喜欢的书：卡尔维诺文集
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，
将每门学科的知识点作一个系统的梳理，
无论是预习时或复习时，这样便可在课上
学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。
坚持锻炼，劳逸结合

2005年河北省文科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：游泳 网球
喜欢的书： *A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习习惯，如制订学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



2005年黑龙江省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：金牛座
喜欢的运动：篮球 台球 排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。
坚持锻炼，劳逸结合。

2005年四川省文科状元
现就读于北京大学
星座：处女座
喜欢的运动：篮球 乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务 and 激烈的竞争。
2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。
3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。
4. 坚持锻炼，劳逸结合。



2005年江苏省文科状元
现就读于北京大学
星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步 台球 放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



2005年北京市理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，
作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持
阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



2005年湖北省理科状元
现就读于北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：足球 篮球 游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，
有希望就不要放弃
学习方法、技巧：1.知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2.知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3.整体把握兴趣和强弱科的平衡。4.正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



目 录

CONTENTS

第一章 勾股定理

1

1.1 探索勾股定理	2
1.2 能得到直角三角形吗	10
1.3 蚂蚁怎样走最近	16
本章小结	23

第二章 实数

29

2.1 数怎么又不够用了	30
2.2 平方根	36
2.3 立方根	44
2.4 公园有多宽	49
2.5 用计算器开方	55
2.6 实数	59
本章小结	67

第三章 图形的平移与旋转

72

3.1 生活中的平移	73
3.2 简单的平移作图	78
3.3 生活中的旋转	83
3.4 简单的旋转作图	88
3.5 它们是怎样变过来的	94
3.6 简单的图案设计	99
本章小结	106

第四章 四边形性质探索

111

4.1 平行四边形的性质	112
4.2 平行四边形的判别	118
4.3 菱形	125
4.4 矩形、正方形	132

4.5 梯形	141
4.6 探索多边形的内角和与外角和	148
4.7 中心对称图形	154
本章小结	162

第五章 位置的确定

168

5.1 确定位置	169
5.2 平面直角坐标系	176
5.3 变化的“鱼”	184
本章小结	192

第六章 一次函数

196

6.1 函数	197
6.2 一次函数	204
6.3 一次函数的图象	210
6.4 确定一次函数表达式	219
6.5 一次函数图象的应用	226
本章小结	234

第七章 二元一次方程组

240

7.1 谁的包裹多	241
7.2 解二元一次方程组	247
7.3 鸡兔同笼	255
7.4 增收节支	260
7.5 里程碑上的数	268
7.6 二元一次方程与一次函数	275
本章小结	284

第八章 数据的代表

293

8.1 平均数	294
8.2 中位数与众数	301
8.3 利用计算器求平均数	308
本章小结	312

期末复习

316

第一章

勾股定理

勾股定理是数学最基本的定理之一,揭示了直角三角形三边之间的一种美妙关系,将形与数紧密联系起来,在数学的发展过程和现实世界中都有着广泛的作用.在数学发展史上,人们很早就展开了对勾股定理的研究,对勾股定理的探索和应用反映了人类杰出的智慧,让我们一起随着本章的学习去感受这个定理丰富的内涵吧!



本章学习目标

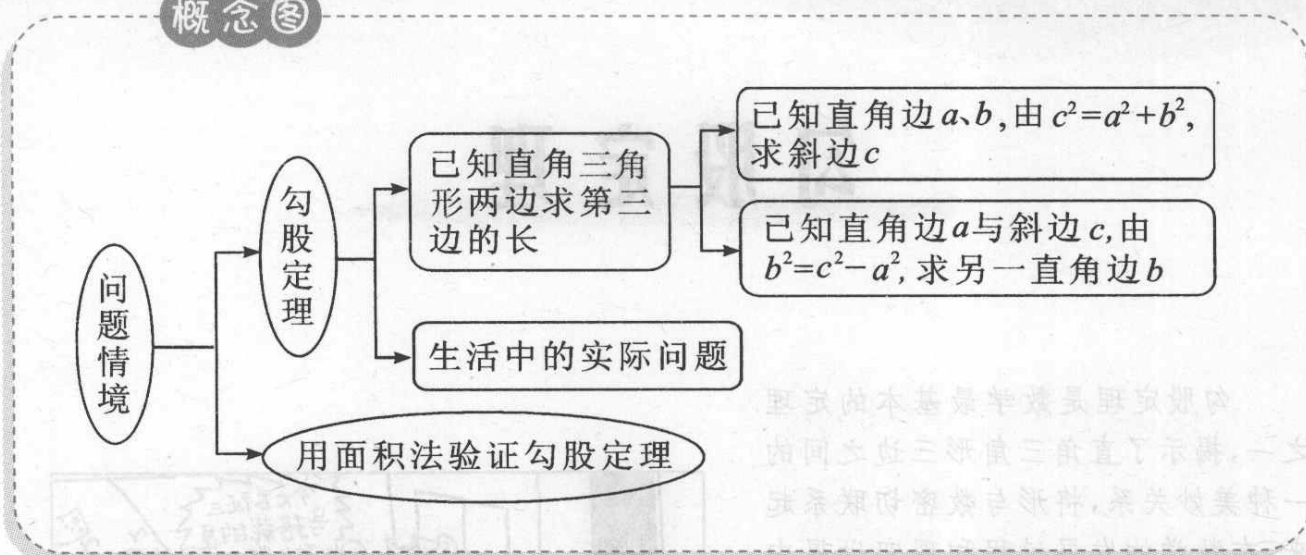
- ◆ 经历勾股定理及直角三角形判别条件(勾股定理逆定理)的探索过程,了解勾股定理的各种探究方法及其内在联系,培养主动探究的习惯.
- ◆ 掌握勾股定理及其逆定理,并能利用它们解决简单的问题.
- ◆ 通过实例了解勾股定理的历史与应用,体会勾股定理的文化价值.

1.1 探索勾股定理



整体感知

概念图



教材详解

知识点一 勾股定理

在直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方.用 a 、 b 表示直角边, c 表示斜边,则可写为 $a^2 + b^2 = c^2$,如图 1-1-1.

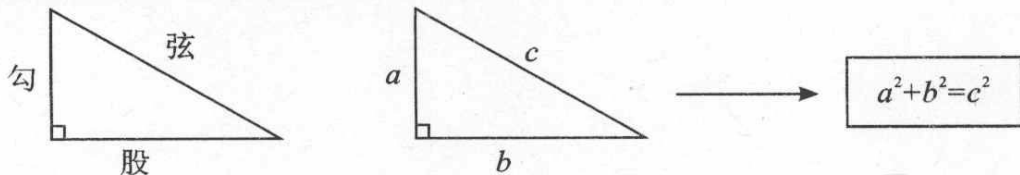


图 1-1-1

详解 勾股定理是中学数学中几个重要定理之一,它从边的角度刻画了直角三角形的特征.我国是最早了解勾股定理的国家之一,早在三千多年前,周朝数学家商高就提出,把一根直尺折成直角,两端连得一直角三角形,“勾广三,股修四,弦隅五.”意思是一个直角三角形较短直角边(勾)的长是3,较长的直角边(股)的长是4,那么斜边(弦)的长是5.而 $3^2 + 4^2 = 5^2$,人们发现对于所有的直角三角形都有:勾² + 股² = 弦²,此定理称为勾股定理.

勾股定理反映了自然界基本规律,人们认为有文明的宇宙“人”都应该认识它,因而数学家华罗庚曾建议把勾股定理图作为与“外星人”联系的信号.

在西方一般认为是毕达哥拉斯学派首先证明了勾股定理,因而被称为毕达哥拉斯定理.

知识点二 利用勾股定理求边长

详解 勾股定理是直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方,反映直角三角形的三条边之间的关系,它适用于直角三角形中已知两边求第三边的长:

- (1) 已知两直角边 a, b , 由 $c^2 = a^2 + b^2$, 可求斜边 c ;
- (2) 已知一直角边 a 与斜边 c , 由 $b^2 = c^2 - a^2$, 可求另一直角边 b .

在具体计算中应分清所求的是直角边还是斜边.

【例 1】 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边,

- (1) 若 $\angle C = 90^\circ, a = 40, b = 9$, 则 $c =$ _____.
- (2) 若 $\angle B = 90^\circ$, 若 $b = 25, c = 15$, 则 $a =$ _____.

解析: 代入勾股定理的公式中直接计算, 注意分清直角边与斜边.

解: (1) $\because \angle C = 90^\circ, c$ 是斜边, $\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 40^2 + 9^2 = 41^2, \therefore c = 41$.

(2) $\because \angle B = 90^\circ, b$ 是斜边, a 是直角边, $\therefore a^2 = b^2 - c^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2, \therefore a = 20$.

方法总结: 使用勾股定理时, 应注意所求的边是直角边还是斜边. 已知两直角边求斜边是平方和的运算; 已知一直角边与斜边, 求另一直角边是平方差的运算.

知识点三 利用面积法验证勾股定理

详解 勾股定理的验证方法多种多样, 据说达 300 余种. 利用数格子、拼图等都是借助图形的面积验证勾股定理的方法, 也是最常用的方法.

【例 2】 对于勾股定理, 中国有个古老而精彩的验证方法, 出自我国古代无名数学家之手, 方法如下: 剪 4 个完全相同的直角三角形, 拼成如图 1-1-2 所示的正方形, 请用该图形探究古人验证的过程.

解析: 这个正方形是由 4 个大小完全相同的直角三角形拼接而成的, 验证勾股定理就是要由这个图形所表示的面积关系推导出式子 $a^2 + b^2 = c^2$.

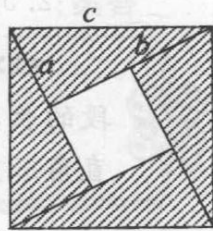


图 1-1-2

解: 大正方形的边长为 c , 其面积为 c^2 , 而大正方形又可以看成是由四个直角三角形和中间一个小正方形构成, 小正方形的边长为 $b - a$, 大正方形的面积又可表示为:

$4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2$, 因此 $4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2 = c^2$, 化简整理得 $4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = c^2$, 所以, $a^2 + b^2 = c^2$.

【例 3】 如图 1-1-3 是美国第 20 届总统伽菲尔德发表在《新英格兰教育日志》上的验证勾股定理所用的图形, 请你写出验证过程.

解析: 这个图形是直角梯形, 它被分割成直角边分别为 a, b , 斜边为 c 的两个直角三角形以及一个直角边为 c 的等腰直角三角形.

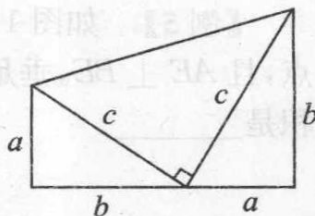


图 1-1-3

解: $S_{\text{直角梯形}} = \frac{1}{2}(a+b)(b+a) = \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2,$

三个三角形面积之和为: $\frac{1}{2}ab \times 2 + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$

上述两式相等: $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$ 消去 ab 项, 可得, $a^2 + b^2 = c^2.$

状元
笔记

规律总结: 以上两个例题虽然图形不一样, 但验证思路一致. 利用图形面积的方法验证勾股定理, 主要是观察同一个图形面积从不同的角度计算, 可用不同的字母表示, 从而找到等量关系, 通过代数计算, 导出勾股定理.



解题技巧

技巧1 利用勾股定理求线段的长

【例4】 如图1-1-4, 某农舍的大门是一个木制的矩形栅栏, 它的高为2m, 宽为1.5m, 现需要在相对的顶点间用一根木板加固, 木板的长至少为_____.

解析: 设木板的长为 a , 矩形栅栏的长、宽分别为 b, c . 木板与矩形栅栏的两边构成直角三角形, 木板为直角三角形的斜边. 本题的解题思路流程如下图所示:

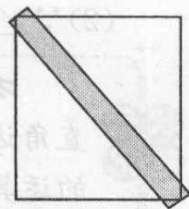


图 1-1-4

求木板的长	← 转化	求出 a^2	← 转化	$a^2 = b^2 + c^2 = 2^2 + 1.5^2$ $= 6.25 = 2.5^2$
-------	------	----------	------	---

答案: 2.5m

状元
笔记

技巧总结: 理解题意, 根据示意图或由题目的条件画出示意图, 要求一线段的长, 先由勾股定理求出它的平方, 再观察这个数是哪个数的平方数, 求出直角三角形的未知边.

技巧2 利用勾股定理解决图形的面积问题

解决
技巧

- 方法一: 直接计算, 图形的面积与已知直角三角形的边长相关联(例5)
- 方法二: 逐步代换, 求出图形的面积(方法引申1)
- 方法三: 利用平方关系, 揭示图形的面积关系(方法引申2)

【例5】 如图1-1-5, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 是正方形内一点, 且 $AE \perp BE$, 垂足为 E , 若 $AE = 6, BE = 8$, 则图中阴影部分的面积是_____.

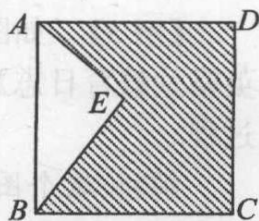
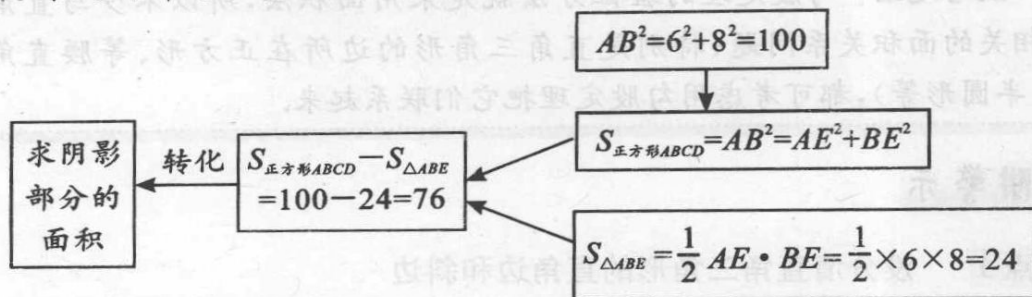


图 1-1-5

解析: 本题的解题思路流程如下图所示:



答案: 76

技巧总结: 把正方形、等腰直角三角形、半圆形等图形的面积与直角三角形的边长联系起来, 根据勾股定理, 把面积转化为已知直角三角形边长平方的表达式.

方法引申 1 (四川达州中考题) 图 1-1-6 是一株美丽的勾股树, 其中所有的四边形都是正方形, 所有的三角形都是直角三角形. 若正方形 A、B、C、D 的边长分别是 3、5、2、3, 则最大正方形 E 的面积是 ()

- A. 13 B. 26 C. 47 D. 94

解析: 正方形 A、B、C、D 的边长分别是图中三角形的直角边, 其面积就是相应直角边长的平方, 用 S_A 、 S_B 、 S_C 、 S_D 分别表示 A、B、C、D 的面积, 由勾股定理可得 $S_1 = S_A + S_B = 3^2 + 5^2 = 34$, $S_2 = S_C + S_D = 2^2 + 3^2 = 13$. 最大正方形 E 的面积等于其边长的平方, 它是图中最大直角三角形斜边的平方, 利用勾股定理可得出 E 的面积等于 $S_1 + S_2 = 13 + 34 = 47$.

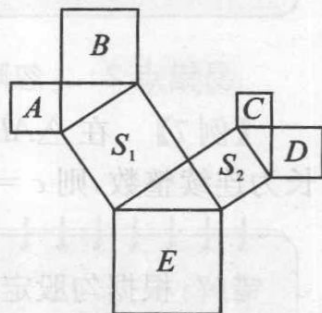


图 1-1-6

答案: C

技巧总结: 逐步找出与图形面积相关的直角三角形, 将图形的面积转化为直角三角形的边长的平方, 利用勾股定理找出等量关系求面积.

方法引申 2 如图 1-1-7, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 分别以 AC、BC、AB 为直径作半圆, 面积分别记为 S_1 、 S_2 、S, 试说明 $S_1 + S_2 = S$.

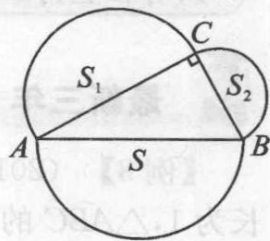


图 1-1-7

解析: 图中的 S_1 、 S_2 、S 分别是半圆的面积, 分别表示成相应直径的代数式, 利用勾股定理找出等量关系.

$$\text{解: } \because S_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \pi AC^2, S_2 = \frac{1}{8} \pi BC^2, S = \frac{1}{8} \pi AB^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理, $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{1}{8} \pi (AC^2 + BC^2) = \frac{1}{8} \pi AB^2, \therefore S_1 + S_2 = S.$$

状元笔记

技巧总结: 勾股定理的验证方法就是采用面积法,所以不少与直角三角形相关的面积关系问题(特别是直角三角形的边所在正方形、等腰直角三角形、半圆形等),都可考虑用勾股定理把它们联系起来。



陷阱警示

易错点 1 没分清直角三角形的直角边和斜边

【例 6】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 其中 $a = 3$, $b = 4$, 则以 c 为边的正方形的面积为_____。

错解: 根据勾股定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$,

$\therefore$ 以 c 为边的正方形的面积为 25。

纠错秘方: 受思维定式的影响, 认为 $\angle C$ 是直角, 没有注意具体条件, 没有分清所求的边是直角边还是斜边。

正解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, b 为斜边, 根据勾股定理, 得

$c^2 = b^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$, $\therefore$ 以 c 为边的正方形的面积为 7。

易错点 2 忽略直角的条件, 使用勾股定理

【例 7】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $a = 3$ 、 $b = 4$, 若三边长为连续整数, 则 $c =$ _____。

错解: 根据勾股定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$, 所以 $c = 5$ 。

正解: 三角形的三边必须满足两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 所以 $1 < c < 7$, 三边长为连续整数, 取 $c = 2$ 或 $c = 5$ 。

纠错秘方: 错把 $\triangle ABC$ 当成直角三角形, 只注意到勾 3、股 4、弦 5, 解题时应注意只有在直角三角形条件下才可使用勾股定理。



最新三年中考经典

【例 8】 (2010·广西南宁) 图 1-1-8 中, 每个小正方形的边长为 1, $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 的大小关系式为 ()

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

解析: 必要时找到各边所在的直角三角形, 计算各边的平方数: $b^2 = AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $a^2 = BC^2 = 4^2 + 1^2 = 17$, $c^2 = AB^2 = 4^2 = 16$ 。

所以 $c < a < b$, 故选 C。

答案: C

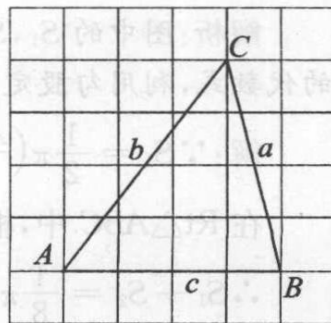


图 1-1-8

点评:在网格中绘图或计算是中考的热点,若线段的长度不能直接看出,则以两个格点的连线作为斜边,构造直角三角形,可以计算出任意两点之间线段的长度(或它的平方数).

【例 9】(2009·辽宁营口)如图 1-1-9,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DCB = 90^\circ$, $AB = 25\text{cm}$, $BC = 24\text{cm}$,将该梯形折叠使点 A 恰好与点 D 重合, BE 为折痕,那么梯形 $ABCD$ 的面积为

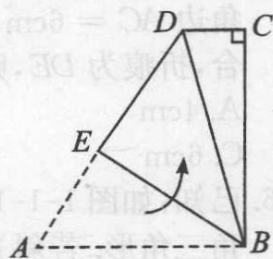
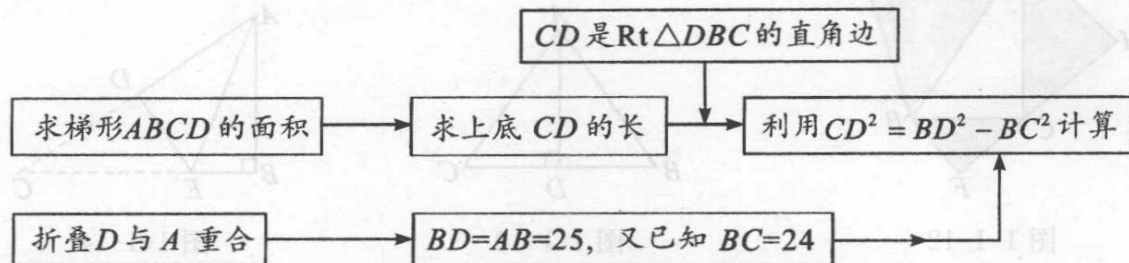


图 1-1-9

解析:本题的解题思路流程如图所示:



解: $\because BD = AB = 25, BC = 24, \therefore CD^2 = BD^2 - BC^2 = 25^2 - 24^2 = 49 = 7^2, \therefore CD = 7$

$\therefore S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BC = \frac{1}{2} \times (25 + 7) \times 24 = 384(\text{cm}^2).$

答案: 384cm^2

点评:在图形折叠求线段长度的问题中,要对比折叠前后点或线的位置,注意相等的线段,找到与它们相关的直角三角形,利用勾股定理求线段长度的方法解决.



轻松练习

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c .

(1) 若 $a = 8, b = 15$, 则 $c =$ _____;

(2) 若 $a = 9, c = 41$, 则 $b =$ _____;

(3) 若 $b = 1.5, c = 2.5$, 则 $a =$ _____.

2. (山东济宁中考题)“赵爽弦图”是四个全等的直角三角形与中间一个小正方形拼成的大正方形. 如图 1-1-10 是“赵爽弦图”的飞镖板, 其直角三角形的两条直角边的长分别是 2 和 4. 小明同学距飞镖板一定距离向飞镖板投掷飞镖(假设投掷的飞镖均扎在飞镖板上), 则投掷一次飞镖扎在中间小正方形区域(含边线)的概率是 ()

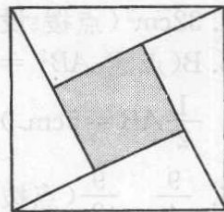


图 1-1-10

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{10}$

3. 如果一把梯子底端离建筑物 2.5 米, 那么 6.5 米长的梯子顶端可到达建筑物的高度为 _____.

4. 正方形的对角线长为 8cm, 则这个正方形的面积为 _____.

5. (2010·广西钦州) 如图 1-1-11 是一张直角三角形的纸片, 两直角边 $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 现将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕为 DE , 则 BE 的长为 ()

A. 4cm

B. 5cm

C. 6cm

D. 10cm

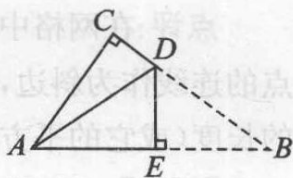


图 1-1-11

6. 已知: 如图 1-1-12, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边为斜边分别向外作等腰直角三角形. 若斜边 $AB = 3$, 则图中 $\triangle ABE$ 的面积为 _____, 阴影部分的面积为 _____.

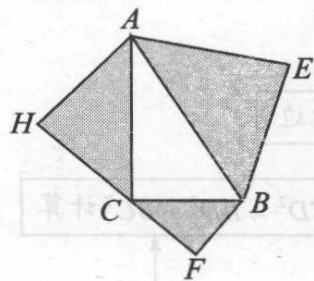


图 1-1-12

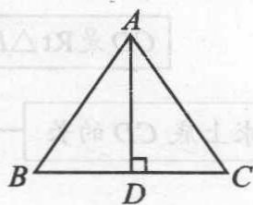


图 1-1-13

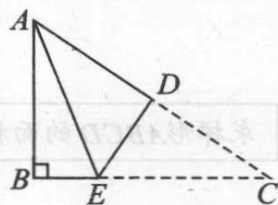


图 1-1-14

7. (湖南长沙中考题) 如图 1-1-13, 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是底边上的高, 若 $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, 则 $AD =$ _____ cm .
8. 如图 1-1-14, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 C 与 A 重合, 得折痕 DE , 求 $\triangle ABE$ 的面积.



参考答案及点拨

[轻松练习]

- (1) 17 (点拨: 由 $c^2 = a^2 + b^2 = 8^2 + 15^2 = 17^2$.)
(2) 40 (点拨: 由 $b^2 = c^2 - a^2$, 计算.)
(3) 2 (点拨: 由 $a^2 = c^2 - b^2$, 计算.)
- C (点拨: 注意到图中小正方形的边长等于直角三角形两直角边的差, $S_{\text{小正方形}} = (4-2)^2 = 4$, 而大正方形的边长是直角三角形的斜边, 另斜边为 c , 则 $S_{\text{大正方形}} = (c)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$; 飞镖扎在中间正方形区域的概率是 $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.)
- 6 米 (点拨: 根据勾股定理, 由 $6.5^2 - 2.5^2 = 36 = 6^2$.)
- 32cm^2 (点拨: 设正方形的边长为 a , 则 $a^2 + a^2 = 8^2$, $2a^2 = 64$, $a^2 = 32$.)
- B (点拨: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$, 所以 $AB = 10$, E 为 AB 的中点, $BE = \frac{1}{2}AB = 5\text{cm}$.)
- $\frac{9}{4}$ $\frac{9}{2}$ (点拨: $AE = BE$, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot BE = \frac{1}{2}AE^2$, $\because AE^2 + BE^2 = AB^2$, $\therefore 2AE^2 = AB^2$, $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{9}{4}$; 同理得, $S_{\triangle AHC} + S_{\triangle BCF} = \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BC^2$, $\because AC^2 + BC^2 = AB^2$, $\therefore$ 阴影部分的面积为: $\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$.)
- 4cm (点拨: 所求的 AD 是 $\text{Rt}\triangle ABD$ 的直角边, 等腰三角形底上的高也是底边上的中线. 由 $DB = CD = \frac{1}{2}BC = 3\text{cm}$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 利用勾股定理可得, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$, $AD = 4$.)
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$, $BC = 4$,
设 $BE = x$, 则 $CE = 4 - x$, $AE = CE = 4 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 根据勾股定理, $AB^2 + BE^2 = AE^2$,

$\therefore 3^2 + x^2 = (4-x)^2$, 解得 $x = \frac{7}{8}$, $\triangle ABE$ 的面积为: $\frac{1}{2} BE \cdot AB = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times 3 = \frac{21}{16} (\text{cm}^2)$.

[教材习题答案]

习题 1.1(P7)

- (1) $x = 10$ (点拨: $x^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \therefore x = 10$.)
(2) $y = 12$ (点拨: $y^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \therefore y = 12$.)
- 60cm^2 (点拨: 由勾股定理可求出另一条直角边的长度为 8cm , $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60\text{cm}^2$.)
- 本题具有一定的开放性. 如可以最简单地选择图 1-1-15① 的方案(两个较大的正方形), 也可以将其中一个正方形再次转化为两个较小的正方形, 如图 1-1-15②.
- 12cm^2 (点拨: 如图 1-1-16, 作 AB 边上的高 CD , 则 $AD = 3$, 在直角 $\triangle ACD$ 中, $CD^2 = AC^2 - AD^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2, \therefore CD = 4, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12\text{cm}^2$.)

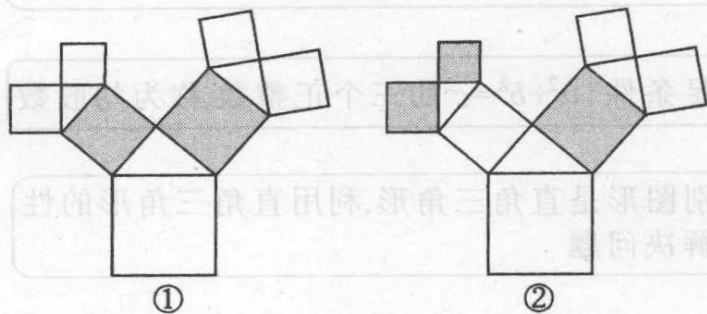


图 1-1-15

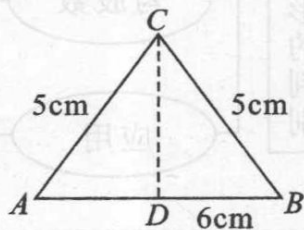


图 1-1-16

习题 1.2(P11)

- 8 米 (点拨: $10^2 - 6^2 = 64 = 8^2$)
- 能 图中梯形的面积一方面可以写成 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$, 另一方面也可以写成: $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$, 化简得 $a^2 + b^2 = c^2$. 这个方法和本节探索的方法思路一样, 都是构造一个图形, 利用两种方法计算该图形面积, 从而得到一个关于三条边长 a, b, c 之间的等式, 这种方法习惯称为“算两次”, 在数学学习中有着广泛的运用.
- 可拼出如图 1-1-17 的图形, 然后进行验证.

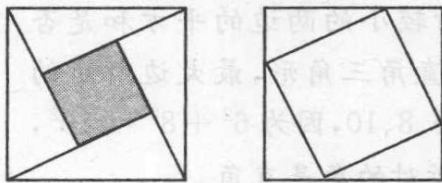


图 1-1-17

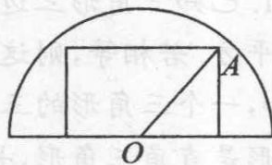


图 1-1-18

习题 1.3(P15)

- 能通过该隧道. 设卡车在隧道中所处位置的截面图如图 1-1-18 所示, 则 $OA^2 = 1.5^2 + 2.4^2 = 8.01 < 3.6^2$, 所以能通过.
- 能 按要求剪下多边形 $ABCDEF$ 后, 将硬纸的剩余部分翻转拼成图 ③, 此时 $S_{\text{多边形}ABCDEF} = S_{\text{多边形}A'B'C'D'E'F'}$. 然后再剪下 $\triangle OBC$ 和 $\triangle OFE$, 并将它们分别放在图 ③ 中的 $\triangle A'B'F'$ 和 $\triangle D'E'C'$ 的位置上. 通过测量 $B'F'E'C'$ 是正方形, 且它的面积等于图 ① 中正方形 $ABOF$ 和正方形 $CDEO$ 的面积和. 即 $B'C'^2 = AB^2 + CD^2$, 也就是 $BC^2 = a^2 + b^2$.
- 所选择的两条互相垂直的线中, 有一条平行于直角三角形的斜边即可正确地切割.
- 可从搜索勾股定理相关的史料入手.

1.2 能得到直角三角形吗



整体感知

概念图

直角三角形的判别

判别方法

如果一个三角形的三边分别为 a 、 b 、 c ,且满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形

勾股数

满足条件: $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数,称为勾股数

应用

判别图形是直角三角形,利用直角三角形的性质解决问题



教材详解

知识点一 直角三角形的判别条件

勾股定理的逆定理:如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.如图1-2-1,如果 $\triangle ABC$ 的三边满足 $a^2+b^2=c^2$,那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle C$ 是直角.

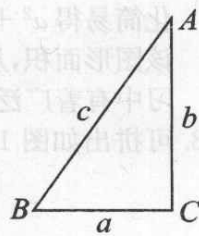


图1-2-1

详解 1. 已知三角形三边的长,只要看较小的两边的平方和是否等于最大边的平方.若相等,则这个三角形是直角三角形,最大边所对的角是直角.例如,一个三角形的三边长分别为6、8、10,因为 $6^2+8^2=10^2$,所以这个三角形是直角三角形,长为10的边所对的角是直角.

2. 如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2-b^2=c^2$,那么这个三角形同样也是直角三角形.因为由 $a^2-b^2=c^2$,可得 $b^2+c^2=a^2$.此时 a 为最大边,长为 a 的边所对的角是直角.

【例1】 分别以下列各组数为边长,能构成直角三角形的有 ()

①1、2、3;②3、4、5;③1.5、2、2.5;④8、39、40

A. 4组

B. 3组

C. 2组

D. 1组

解析:通过计算判断,本题解题思路流程如下图所示:

$1+2=3 \Rightarrow$ 两边之和等于第三边 $\Rightarrow$ ①项不能构成三角形,不是直角三角形

$3^2+4^2=5^2 \Rightarrow$ 符合 $a^2+b^2=c^2$ $\Rightarrow$ ②项是直角三角形

$1.5^2+2^2=2.5^2 \Rightarrow$ 符合 $a^2+b^2=c^2$ $\Rightarrow$ ③项是直角三角形