

[21世纪]

金牌

主编 刘玉翘

奥数实力标准竞赛教材

小学 5 年级



编著 李跃东 金丽英



高等教育出版社

21世纪金牌

奥数实力标准竞赛教材

小学五年级

编著 李跃东

金丽英

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

21 世纪金牌奥数实力标准竞赛教材. 小学五年级/李跃东、金丽英编著. —北京: 高等教育出版社, 2005. 3

ISBN 7-04-014811-0

I. 2... II. 刘... III. 数学课—小学—教学参考资料 IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 020626 号

策划编辑 袁 舫 责任编辑 石 勃 责任印制 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京机工印刷厂		
开 本	850 × 1168 1/32	版 次	2005 年 3 月第 1 版
印 张	10.375	印 次	2005 年 3 月第 1 次印刷
字 数	60 000	定 价	12.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 14811-00

《21 世纪金牌奥数实力标准竞赛教材》

编 委 会

主 编 刘玉翹(特级教师,中国数学奥林匹克首批高级教练员,中国数学学会普委会副主任。)

执行主编 季建华(中学高级教师,江苏省数学奥林匹克竞赛优秀教练员。)

编 委 (以姓氏笔画为序)

李跃东 张凤兰 陈莹琛

苗 敏 尚庆海 金丽英

孟庆甲 顾绍凤 顾绍明

常迎宝 梁淑芳

审 定 孙家芳

前 言

“数学是一个卓绝的工具。”^① “数学反映客观事物的真相。”^② “数学不仅具有真理，而且具有至高无尚的美……人们在数学里将找到真正意义上的快乐。”^③ “数学能使你的思想正确、敏捷。有了正确、敏捷的思想，你们才有可能爬上科学的大山。”^④ 先哲掷地有声的评述，激起青少年开掘数学潜能的层层浪花，为满足广大青少年探索数学王国奥秘的需要，特延请北京市、江苏省数学奥校资深教练悉心编写了这套《21 世纪金牌奥数实力标准竞赛教材》。

本套教材具有以下特点：

(1) 精讲精练，主题明晰。每年级分编为上下两册，每册依不同主题分列若干讲，例题讲解中特辟“这样想”一栏，引导合理思路，切入解题关键，训练题目着重启迪思维，加强变知识为能力的培养，给参加各种数学竞赛的同学搭起系统全面的演示平台。

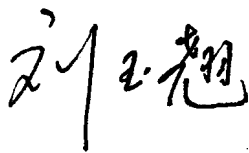
(2) 经纬交织，梯级跨跃。年级之间构成螺旋递进的框架，纵向彼此关联，横向独立成章。低年级以图文并茂的方式培养数学情感；中年级用数学语言帮助同学初步领悟推理，了解判断；高年级运用推理、判断、分析、总结等思维手段，提高运用基本原理解答实际问题的能力，部分难度较大的题目，挑战自我，是激励同学摘取金牌的阶梯。

(3) 实用高效, 前卫性强。针对不同题型, 适时增加“小结”、“说明”或“聪明的发现”等, 起到点拨梳理的作用。例题、训练题目, 有选择地引用全国各地数学竞赛试题, 并附有启发性和指导性的答案。在此, 向命题老师表示衷心感谢。

本套教材适用于奥林匹克数学学校、华罗庚数学学校和各种数学兴趣学校的课堂教学, 是家长辅导孩子学数学的最佳用书。

本书已多次印刷, 深受全国广大师生欢迎, 并被北京四中培训中心、北京 161 中培训中心、北京方庄文化培训中心、商丘市奥数培训学校等全国众多学校选做课堂教学用书, 获得一致好评。

也应指出, 由于编写时间仓促, 囿于见闻, 有不当或错误的地方, 请老师、同学批评指正。



- ① 拉普拉斯 (1749—1827) 法国天文学家、数学家。
- ② 杜威·约翰 (1859—1952) 美国哲学家、教育学家。
- ③ 罗素 (1872—1970) 英国哲学家、数学家。
- ④ 华罗庚 (1910—1985) 中国数学家。

目录

上册

- 1 等差数列 / 1 ✓
- 2 一笔画和多笔画 / 11
- 3 乘法原理和加法原理 / 24
- 4 排列 / 33 ✓
- 5 组合 / 40 ✓
- 6 排列组合的应用 / 48 ✓
- 7 逻辑推理 / 56 ✓
- 8 方阵问题 / 65 ✓
- 9 抽屉原则 / 73 ✓
- 10 定义新运算 / 80
- ✓ 11 行程问题 / 89 ✓
- 12 列方程解应用题 / 98
- 13 多种方法解应用题 / 107
- 14 循环问题 / 118
- 集训测试(一) / 127
- 集训测试(二) / 132



下 册

- 1 图形问题 / 137 ✓
- 2 整除的特征 / 157 ✓
- 3 奇数与偶数 / 168 ✓
- 4 质数与合数 / 179 ✓
- 5 分解质因数 / 187
- 6 最大公约数与
最小公倍数 / 196 ✓
- 7 尾数问题 / 207
- 8 容斥原理 / 215 ✓
- 9 分数大小的比较 / 225
- 10 速算与巧算 / 236
- 11 竞题选讲 / 250
集训测试(一) / 268
集训测试(二) / 272
参考答案 / 277



1 等差数列

许多同学都知道大数学家高斯在很小的时候就巧妙、迅速地计算出从 1 到 100 自然数的和,是因为高斯发现了自然数的排列规律——从第二项起,每一项与前一项的差是 1。像这样,一个数列,如果从第二项开始,每一项与它前面一项的差都相等,这个数列就叫等差数列,后项与前项的差叫做这个数列的公差。

判断下列数列是否是等差数列?是等差数列的求出公差。

- (1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
- (2) 12, 16, 20, 24, ...
- (3) 6, 9, 12, 15, 18, ...
- (4) 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, ...
- (5) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

这样想

(1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... 是等差数列,且公差为 1。因为在这个数列中,从第二项开始,每一项与它前一项的差都是 1。

(2) 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... 是等差数列,且公差为 4。因为在这个数列中,从第二项开始,每一项与它前一项的差都是 4。

(3) 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... 是等差数列,且公差为 3。因为在这个数列中,从第二项开始,每一项与它前一项的差都是 3。

(4) 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, ... 是等差数列,且公差为 0.2。因为在这个数列中,从第二项开始,每一项与它前一项的差都是 0.2。

这四个数列的共同规律是 从第二项起,每一项与它前一项的差都相等。这样的数列,我们称它为等差数列。

等差数列

而(5)1, 4, 9, 16, 25, 36, … 不是等差数列。因为4比1大3, 9比4大5, 16比9大7, 25比16大9, 36比25大11, 也就是说数列中从第二项起, 每一项与它前一项的差不相等。

下面我们熟悉一下等差数列的符号表示:

等差数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$

第1项记作 a_1 , 第2项记作 a_2 , 第3项记作 a_3 , …, 第 n 项记作 a_n , 公差记作 d 。

等差数列 12, 16, 20, 24, … 的各项有如下规律:

$$a_1 = 12$$

$$a_2 = 16 = 12 + 4 = 12 + (2 - 1) \times 4$$

$$a_3 = 20 = 12 + 8 = 12 + (3 - 1) \times 4$$

$$a_4 = 24 = 12 + 12 = 12 + (4 - 1) \times 4$$

……

经过观察可以发现: 等号右边的公差4 前边所乘的数比项数少1。所以 $a_n = 12 + (n - 1) \times 4$ 。

再看等差数列 6, 9, 12, 15, 18… 的各项也有这样的规律:

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 9 = 6 + 3 = 6 + (2 - 1) \times 3$$

$$a_3 = 12 = 6 + 6 = 6 + (3 - 1) \times 3$$

$$a_4 = 15 = 6 + 9 = 6 + (4 - 1) \times 3$$

……

$$a_n = 6 + (n - 1) \times 3$$

由此我们可以得到等差数列的通项公式:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d$$

这个公式经过变形, 可以得出

$$a_1 = a_n - (n - 1) \times d$$

$$d = (a_n - a_1) \div (n - 1)$$

$$n = (a_n - a_1) \div d + 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$



如果用 S_n 表示等差数列前 n 项的和, 经过推导还可以得出

$$S_n = (a_1 + a_n) \times n \div 2$$

【例 1】 求所有能被 7 整除的两位数之和。

这样想

先找出所有能被 7 整除的两位数 14, 21, 28, 35, ..., 98, 这是一个等差数列。再根据 $n = (a_n - a_1) \div d + 1$, 求得 $n = (98 - 14) \div 7 + 1 = 13$, 最后再根据等差数列求和公式解答。

解: $n = (98 - 14) \div 7 + 1 = 13$

$$S_n = (14 + 98) \times 13 \div 2 = 728$$

答: 所有能被 7 整除的两位数之和是 728。

【例 2】 某电影院的座位排列成扇面形, 第一排有 60 个座位。以后每排都比前一排多 2 个座位, 共有 50 排。请你计算一下, 这个电影院的第 25 排和最后一排各有多少个座位?

这样想

电影院的座位组成的数列为等差数列。这个等差数列的第 1 项 $a_1 = 60$, 公差 $d = 62 - 60 = 2$, 要求第 25 项和第 50 项, 可以应用通项公式解答。

解: $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$

$$a_{25} = 60 + (25 - 1) \times 2 = 108$$

$$a_{50} = 60 + (50 - 1) \times 2 = 158$$

答: 这个电影院的第 25 排有 108 个座位, 第 50 排有 158 个座位。

【例 3】 公路沿线上每隔 2 千米有一个仓库, 每个仓库存有 12 吨货物, 共有 10 个仓库。现在要用卡车把这 10 个仓库的货物全部运到距第 10 个仓库 50 千米远的码头。已知每吨货运 1 千米的运费为 0.2 元。问总运费是多少元(码头在第 1 个仓库到第 10 个仓库之外的沿线上)?

这样想

第10个仓库的货物运到码头的运费是 $0.2 \times 50 \times 12 = 120$ (元), 第9个仓库的货物运到码头的运费是 $0.2 \times (50 + 2) \times 12 = 124.8$ (元), 第8个仓库的货物运到码头的运费是 $0.2 \times (50 + 2 \times 2) \times 12 = 129.6$ (元), ……。可以看出, 各仓库货物的运费组成一个等差数列

120, 124.8, 129.6, …

这个数列的第1项 $a_1 = 120$, 公差 $d = 4.8$, 项数 $n = 10$ 。求总运费是多少, 就是求这个数列的和, 应用等差数列求和公式。根据求和公式 $S_n = (a_1 + a_n) \times n \div 2$, 要先求得末项。

解: $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$

$$a_{10} = 120 + (10 - 1) \times 4.8 = 163.2 \text{ (元)}$$

$$S_{10} = (120 + 163.2) \times 10 \div 2 = 1416 \text{ (元)}$$

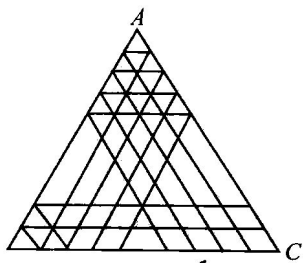
答: 总运费是 1416 元。

小结: 等差数列既适用于整数, 又适用于小数。只要符合构成等差数列的基本条件即可。

【例4】 一个等边三角形 ABC 边长为 1 米, 每隔 2 厘米在边上取一点, 再从这点出发分别作与其他两边平行的直线, 并且与其他两边相交。
(1) 求边长为 2 厘米的等边三角形的个数;
(2) 求所作平行线的总长度。

这样想

(1) 观察示意图, 自上而下的数, 边长为 2 厘米的等边三角形 B 的个数组成等差数列 1, 3, 5, 7, …



$a_1 = 1, d = 2, n = 100 \div 2 = 50$ (共有 50 行)。根据通项公式, 最后一项为 $a_n = 1 + (50 - 1) \times 2 = 99$ (个)

然后应用等差数列求和公式, 求出边长为 2 厘米的等边三角形的个数。

解: $a_n = 1 + (50 - 1) \times 2 = 99$ (个)

$$n = 100 \div 2 = 50$$

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$$

$$= (1 + 99) \times 50 \div 2$$

$$= 2500 \text{ (个)}$$

(2) 观察示意图,所作平行线分别与三条边平行,且各有 49 条。每组平行线的长度组成相同的等差数列 2, 4, 6, ..., 98, 共有 49 项。运用求和公式即可。

解: $S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 98$

$$= (2 + 98) \times 49 \div 2$$

$$= 2450 \text{ (厘米)}$$

$$2450 \times 3 = 7350 \text{ (厘米)}$$

答:边长为 2 厘米的等边三角形共有 2500 个。所作平行线的总长度是 7350 厘米。

小结:用等差数列解题,不但要掌握有关的基本原理,还要积累灵活、多样地分析问题、解决问题的方法。

【例 5】 把所有奇数排列成下面的数表,根据规律,请你指出:

(1) 197 排在第几行的第几个数?(2) 第 10 行的第 9 个数是多少?

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 3 & 3 & 5 & 7 \\
 & & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\
 7 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\
 33 & 35 & 37 & 39 & 41 & 43 & 45 & 47 & 49 \\
 & \cdots & & & & & & &
 \end{array}$$

这样想

(1) 观察数表可知,第 1 行有 1 个数,第 2 行有 3 个数,第 3 行有 5 个数, ..., 第 n 行有 $2 \times n - 1$ 个数。因此,前 n 行中共有奇数的个数: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \times n - 1)$, 构成一个等差数列。它的第 1 项是 1, 最后 1 项是 $2 \times n - 1$ 。根据等差数列求和公式可得:

$$S_n = [1 + (2 \times n - 1)] \times n \div 2$$

等差数列

$$= [2 \times n] \times n \div 2$$

$$= n \times n$$

这是等差数列的奇数求和公式,也是等差数列的奇数个数的公式。

我们知道,这个数列的前 10 行共有 $10 \times 10 = 100$ (个) 奇数,第 100 个奇数是 $1 + (100 - 1) \times 2 = 199$,第 10 行共有 $2 \times 10 - 1 = 19$ (个) 奇数。所以 197 位于第 10 行的倒数第 2 个数,即第 10 行第 18 个数。

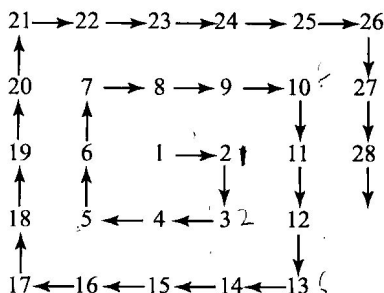
说明: $10 \times 10 = 100$ (个) 中的 100 表示第 10 行的最后一个奇数在整个奇数表中是第 100 个奇数,即 $n = 100$; 而 $1 + (100 - 1) \times 2 = 199$ 求的是 a_{100} , 即第 100 个奇数是 199。即第 10 行第 19 个奇数是 199。

(2) 第 10 行第 9 个数是奇数表中的第 90 个奇数 ($9 \times 9 + 9 = 90$), 这个数是:

$$a_{90} = 1 + (90 - 1) \times 2 = 179$$

【例 6】 将自然数按从小到大的顺序排列成螺旋形(如图),在 2 处拐第 1 个弯,在 3 处拐第 2 个弯,在 5 处拐第 3 个弯,……

问拐第 20 个弯的地方是哪一个数?



(“华罗庚金杯赛”少年数学邀请赛决赛试题)

这样想

我们依次把拐弯处的数列出来,找找规律:

拐弯序号 n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
拐弯处的数 a_n	1	2	3	5	7	10	13	17	21	26	...

观察上表可以发现,对于 a_n 依次排成的数列,相邻两项之差是 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ……, 即 $a_0 = 1, a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 2, a_5 - a_4 = a_6 - a_5 = 3, a_7 - a_6 = a_8 - a_7 = 4, \dots$,

照此规律, $a_{17} - a_{16} = a_{18} - a_{17} = 9$ $a_{19} - a_{18} = a_{20} - a_{19} = 10$. 这样,我们就可以列出求 a_{20} 的算式。

$$\begin{aligned}
 a_{20} &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) \\
 &\quad + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{19} - a_{18}) + (a_{20} - a_{19}) \\
 &= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 10 + 10 \\
 &= 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解: } a_{20} &= 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \\
 &= 1 + 2 \times 55 \\
 &= 111
 \end{aligned}$$

答:拐第 20 个弯的地方是 111。

说明:这道题也可以这样解,各拐弯处按所在的位置,可以分为:第 1 个弯在“右上”,第 2 个弯在“右下”,第 3 个弯在“左下”,第 4 个弯在“左上”。依次排下去,第 20 个弯一定在“左上”。进一步观察“左上”拐弯处各数特点,在第 4 个拐弯处的 7 之前 6 个数排成“2×3”的长方形,可以认为有以下算式: $7 = \underline{2} \times 3 + 1$,即第 4 个拐弯处的 4 是 2 的 2 倍。

“左上”第 8 个拐弯处的数列,同样可以认为是 $21 = 4 \times 5 + 1$,即第 8 个拐弯处的 8 是 4 的 2 倍;所以,第 12 个拐弯处的数是 $6 \times 7 + 1 = 43$,即第 12 个拐弯处的 12 是 6 的 2 倍。照此规律,第 20 个拐弯处的数是

$$10 \times 11 + 1 = 111。$$

【例 7】 黑板上写有从 1 开始的若干个连续的奇数 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …, 擦去其中的一个奇数后,剩下的所有奇数之和为 1998。那么,擦去的奇数是_____。

(北京市第十四届迎春杯数学竞赛决赛试题)

这样想

这道题不但要应用有关的等差数列知识,还要运用列方程解应用题的知识才能正确解答。

解: 假设一个奇数也没有擦去,根据等差数列奇数求和公式,可以求出所写奇数和为

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n\times n$$

设擦去的奇数为 x , 则 $1998+x=n\times n(x\leq n)$

因为 $1998 > 44 \times 44$

如果 $1998+x=45 \times 45$

$$x=2025-1998$$

$$x=27$$

$27 < 45$, 所以 $x=27$ 符合题意。

如果 $1998+x=46 \times 46$

$$x=2116-1998$$

$$x=118$$

$118 > 45$, 所以 $x=118$ 不符合题意。即 n 取比 45 大的数均无符合题意的解。

训 练 (1)

1 100 名学生站成一排由排头按 1、2、3、… 依次报数,问报数是 7 的倍数的学生有多少人?

2 在铁路一侧有 41 根电线杆,第 1 根与第 2 根之间距离 60 米,由第 2 根以后每两根之间距离都是 50 米。从经过第 1 根电线杆起,到经过第 41 根电线杆止,恰好过了 3 分钟,求这列火车的速度。

3 100 到 200 之间不能被 3 整除的数之和是多少?

4 把 1988 表示成 28 个连续偶数的和,那么,其中最大的偶数是多少?

(北京市迎春杯数学竞赛第四届决赛试题)

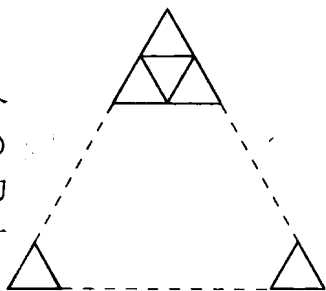
5 大会堂的座位,第一排从左至右有 100 个座位,第二、三、四、五排,……,分别有 102、104、106、108 个座位……。学生排单行进入会场,从第一排起按从左到右的顺序坐,一排坐满再坐下一排。那么排在第 1993 个的同学该坐在第几排第几个座?

(北京市迎春杯数学竞赛第十届刊赛试题)

6 一个等差数列,第一项是 5,相邻两项的差是 3,问第 1998 项是几?

7 所有两位自然数的和是多少?

8 用三根等长的彩色小棒摆成一个等边三角形,用这样的等边三角形(如图)拼成一个大的等边三角形。如果这个大的等边三角形的底边为 20 根小棒长,那么一共用多少根彩色小棒?



9 计算下面数字方阵中所有自然数的和。

1, 2, 3, ..., 38, 39, 40

2, 3, 4, ..., 39, 40, 41

3, 4, 5, ..., 40, 41, 42

.....

40, 41, 42, ..., 77, 78, 79