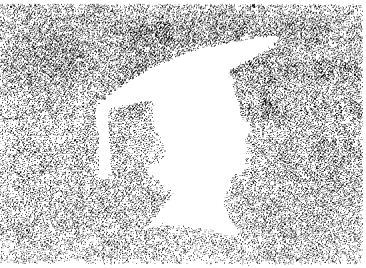
2012全国重点高校自主招生考试专用教材

数学

应试指南及真题精解

紫光教育　组编

清华大学出版社



2012全国重点高校
自主招生考试专用教材

数学

应试指南及真题精解

组　编　紫光教育
主　编　周建武
副主编　张大北
编　委　杨法增　王更新　丁俊标　杨斯谨
　　　　潘忠林　蒋建军　史小玉　史惠中
　　　　任才生　周　燕　谢必文　徐孟军
　　　　陈永良　刘建松　闫　浩
策　划　李凌己　张迎晖

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是高校自主招生考试的数学应试指南. 首先，为帮助考生熟悉考查要点，本书侧重分析了重点、难点及知识点的灵活运用，旨在提高学生融会贯通、解决实际问题的能力. 其次，为帮助考生洞悉命题规律，本书专门搜集了多所著名高校的自主招生典型试题，并从点拨思路的角度提供了答案和分析指导，旨在为考生指点迷津. 同时本书还提供了相应的模拟练习题，针对性强，涵盖面广. 希望通过本书的指导和练习能够帮助考生从容备考，并在自主招生考试的数学科目中取得优异成绩.

图书在版编目（CIP）数据

2012 全国重点高校自主招生考试专用教材：数学应试指南及真题精解 / 紫光教育组编. --北京：清华大学出版社，2011.11
ISBN 978-7-302-27172-7

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①紫… Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 217451 号

责任编辑：石　磊　赵从棉
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　　**印　张**：7.25　　**字　数**：111 千字
附赠上网学习卡
版　次：2011 年 11 月第 1 版　　**印　次**：2011 年 11 月第 1 次印刷
印　数：1～5000
定　价：19.50 元

产品编号：043566-01

“2012全国重点高校自主招生考试专用教材”序

百年大计，教育为本，而上名牌大学更是很多家长和考生的理想。自古华山一条路，这也是大多数家长和考生对高考的一种评价.但是，如今通往名牌大学的道路又宽敞了许多，自主招生考试就是一条柳暗花明的捷径，并且越来越显示出其独特的魅力.

自主招生是扩大高校自主权、深化高校招生录取制度改革的重要举措，也是选拔培养优秀创新人才、促进素质教育全面开展的有益探索.这一政策的出现，无疑给一部分优秀考生增加了一个上名牌高校的筹码..2003年，教育部批准在清华大学、北京大学等22所高校中进行自主选拔录取改革试点.从2006年开始，上海交通大学、复旦大学自主选拔录取办法又有了新的突破，即部分有资格的上海考生只要通过高校组织的“申请资格测试”，便可以不用参加全国高考统考，直接面试决定录取结果.到2009年，全国获批参与自主招生的高校已经达到了76所，许多高校在录取比例上也取消了“控制在年度本科招生计划5%以内”的限制……越来越多的重点中学、考生和家长开始关注自主招生考试.

相对于高考选拔录取而言，高校自主招生是一个新生事物，它是21世纪我国教育改革发展的一个构成部分.作为高校招生改革的方向，从2003年的小范围试点到如今，自主招生考试已由当初的“小众参与的游戏”变为“大众聚会”.当越来越多的学校拥有自主招生权，加入自主招生的行列中时，越来越多的学生希望通过这一高考新模式，顺利通过高考独木桥，迈入理想高校的大门.那么，自主招生考试如何进行，考题如何设置，内容范围如何确定，考生如何做好复习准备，这些都是广大考生迫切希望了解的.我们认为，在着力于普通高考的同时，及时了解并掌握高校自主招生的相关内容无疑是具有前瞻性意义的.这主要体现在以下几个方面.

第一,目前,已经开始自主招生的高校大多都是全国排名靠前、学科设置齐全、综合实力拔尖的学校,参与这些学校的自主招生考试既能促进学生特长的发展与综合能力的培养,又可以减轻学生参加高考和走进名校的压力.

第二,高校自主招生考试时间在每年高考之前,高校自主招生试题与普通高考试题有相通之处;了解、掌握各高校自主招生试题的考查内容和考查形式,对学生准备高考有积极的促进作用.

第三,从各高校自主招生选拔考生的标准看,自主招生注重选拔综合素质高和有专项特长的学生,这一标准在一定程度上揭示了高校在人才培养方面的基本要求和目标,积极了解并参与自主招生对考生在大学的进一步深造和将来就业都是很好的铺垫和准备.

当前,各类高校的自主招生形式日趋多元化.有的高校特别重视考生的文化成绩;有的高校则对考生的动手能力青睐有加;有的高校喜欢品学兼优的三好学生;有的高校则对考生的一技之长情有独钟……但就对自主招生的认识而言,包括自主招生的相关政策、各高校自主招生的实施办法、笔试面试的考查内容与考查形式等,还没有像高考那样被广泛了解.很多中学在组织学生参加自主招生时由于对其缺乏系统的了解,往往感觉无从下手;许多考生在准备自主招生复习考试时,经常由于无暇兼顾高考复习,结果造成顾此失彼,甚至导致高考"砸锅".

针对上述情况,为使考生们熟悉自主招生考试,掌握应对方法,提高被录取的几率,我们及时了解自主招生资讯,针对目前的教学大纲,积极搜集高校自主招生的最新试题,并邀请了从事高等教育和中等教育研究的专家学者,包括清华大学等高校及有关重点高中的优秀教师、学科带头人,认真研究了相关的政策,深入分析历年自主招生的各类试题,着力编写了这套"全国重点高校自主招生考试专用教材"丛书,力图通过系列指导,从各个方面对考生进行点拨和指导,以期达到最好的效果.在编写过程中,我们突出了以下特色.

首先,本套丛书全面系统地将自主招生考试的每个方面都加以阐释和剖析,提供了大量实用的报考和备考信息,让所有考生都不再是稀里糊涂地报名,模棱两可地考试,忐忑不安地等待结果,尽可能地让所有考生都能有一个清楚明确的考前准备,有的放矢,有

备无患.

其次,本套丛书的重点突出,让考生可以在百忙之中很方便地找到对自己最有帮助的板块,集中精力,重点突破,以达到事半功倍的效果.同时,编者们精心研究并归纳总结了近年来自主招生考试中获得成功的考生们的经验,供读者参考借鉴.

同时,本套丛书集中了近几年的主要名牌高校的自主招生考试真题,把考试的风采再现在考生面前,让考生能身临其境地感受到自主招生考试的氛围和特色,以便更好地把握要点,体味内涵,为自己的成功做好准备.在此基础上,我们还精心编写了一定数量的模拟题,以供考生自我测试.

总之,本丛书立足考生备战自主招生笔试和面试的需求,从全国各高校自主招生考试特点的实际出发,力求综合性、前瞻性、实效性相结合,为参加清华、北大等国内一流名牌高校自主招生的同学提供切实有用的指导.同时贯彻"起步早、视点高、方法活、效果好"的原则,帮助考生洞悉各科自主招生的命题规律,集萃近几年各科自主招生的典型试题,针对今后可能出现的知识视点,做到讲练"精要、好懂、有用","务实、得法、有效".

随着国家招生制度的改革,自主招生考试的录取模式也将日趋成熟和规范化,也越来越成为莘莘学子的热门选择.自主招生并非高不可攀,只要弄清楚自主招生考试的本质,掌握它的应试技巧,每个人都有机会展示出自己的才华.希望本套丛书的出版为优秀考生的名牌大学梦画上最璀璨的一笔.

本套丛书的编写得到了清华大学素质教育研究中心、紫光教育培训中心、世纪明德修学营组委会、江苏省宜兴第一中学等单位和机构的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢.

由于自主招生考试正处于不断发展变化中,且涉及的范围广、内容多,加上编写时间和水平所限,书中疏漏之处在所难免,热诚欢迎广大考生及读者对本书进行批评并提出宝贵意见,以便我们再版时修正,使本套丛书的编写质量得到不断的改进和提高.

紫光教育

2011 年 8 月于北京清华园

目录

第一章　函数与方程

专题引导

函数是描述客观世界变化的重要数学模型，高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系，同时还用集合与对应语言加以刻画. 由此可以看出，函数是高中数学的重要内容. 不仅如此，函数还是学习高等数学的基础. 函数现象大量地存在于我们周围，与我们的生活息息相关，是我们认识世界和改造世界的有力工具，函数的思想方法将贯穿高中课程的始终. 所以，近几年的高考与自主招生考试，均把函数部分列为重点考查的内容之一.

真题精解

例 1(2008 年复旦大学)　设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+x+2=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. -4　　B. -1　　C. 0　　D. 2

解　由三次方程韦达定理得 $x_1+x_2+x_3=0, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1, x_1x_2x_3=-2$,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$$

$$=-(x_1+x_2+x_3)^3+3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

$$=0.$$

答案：C.

例 2(2005 年上海交通大学)　已知 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1，求实数 a，b.

解　由 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$，得 $(y-a)x^2-8x+y-b=0$，因为此方程有解，所以 $\Delta=64-4(y-a)(y-b)\geqslant 0$，得 $y^2-(a+b)y+ab-16\leqslant 0$.

由题意，9 和 1 为方程 $y^2-(a+b)y+ab-16=0$ 的两个根，所以

$$\begin{cases}a+b=10,\\ ab-16=9,\end{cases}$$

解得 $a=b=5$.

例 3(2004 年复旦大学)　若存在 M，使任意 $t\in D$(D 为函数的定义域)，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数有界，问函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在定义域上是否有界？

解　此函数的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，因为 $g(x)=|\sin x|$ 的最小正周期为 π，$h(x)=\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 是偶函数，并在 $(0,+\infty)$ 上递减，只需研究 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是否有界，若有界，利用导数求极值；若无界，需用反例说明.

取 $x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，$k\geqslant 1$，则 $f\left(\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $k\to\infty$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\to\infty$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是有界函数.

例 4(2009 华南理工大学)　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4,+\infty]$ 上的单调增函数，要使得对于一切实数 x，不等式 $f(\cos x-b^2)\geqslant f(\sin^2 x-b-3)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

解　由题设条件可得

$$\begin{cases}\cos x-b^2\geqslant \sin^2 x-b-3,\\ \cos x-b^2\geqslant -4,\\ \sin^2 x-b-3\geqslant -4.\end{cases}$$

它又等价于

$$\begin{cases}\cos x-b^2\geqslant\sin^2x-b-3,\\ \sin^2x-b-3\geqslant-4.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}b^2-b\leqslant\cos x-\sin^2x+3,\\ b\leqslant\sin^2x+1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^2-b\leqslant\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4},\\ b\leqslant\sin^2x+1.\end{cases}$$

由于上式要对一切实数 x 均成立，故应有 $b^2-b\leqslant\frac{7}{4}$ 且 $b\leqslant1$，因此，

$$\frac{1}{2}-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2}\quad 且\quad b\leqslant1.$$

所以，$\frac{1}{2}-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant1$.

例 5(2008 年上海交通大学)　若 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，$g(x)=f^{-1}(x)$，则 $g\left(\frac{3}{5}\right)=$________.

解　设 $g\left(\frac{3}{5}\right)=f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=t$，则

$$f(t)=\frac{3}{5},\quad 即\quad \frac{2^t-1}{2^t+1}=\frac{3}{5},$$

所以 $t=2$.

例 6(2001 年复旦大学)　a 为何值时，方程 $\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg(a-x)}{\lg 2}=\log_2(a^2-1)$ 有解？只有一解？

解　方程可化为

$$\log_2x+\log_2(a-x)=\log_2(a^2-1),$$

其中 $a>1$，$0<x<a$，进一步可化为

$$x(a-x)=a^2-1,$$

由于

$$0<x(a-x)\leqslant\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}a^2,$$

要使方程有解，需

$$0<a^2-1\leqslant\frac{1}{4}a^2\quad(a>1),$$

解之，

$$1<a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

由 $x(a-x)=a^2-1$ 得

$$x^2-ax+a^2-1=0,$$

所以

$$x=\frac{a\pm\sqrt{4-3a^2}}{2},$$

由于 $0<x<a$，又 $1<a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$0<\frac{a\pm\sqrt{4-3a^2}}{2}<a$，要使方程仅有一解，只需 $4-3a^2=0$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 7(2007 年上海交通大学)　设 $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a$.

试证明：对任意实数 a，

(1) 方程 $f(x)=0$ 总有共同实根.

(2) 存在 x_0，恒有 $f(x_0)\neq0$.

证明　(1) $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a=g(a)=(x^4-3x^2-4)a+x^4+x^3-2x^2$.

考虑

$$\begin{cases}x^4-3x^2-4=0,\\x^4+x^3-2x^2=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=\pm2,\\x=0,1,-2,\end{cases}$$

故 $x=-2$ 时，$f(x)=g(a)=0$，即对任意实数 a，方程 $f(x)=0$ 总有根 $x=-2$.

(2) 由(1)知，$x=2$ 时，对任意实数 a，$f(2)=16\neq 0$，取 $x_0=2$，得证.

例 8(2000 年上海交通大学)　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x>0,\\ lx+m, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，且原点到 $f(x)$ 中直线的距离为 $\frac{1}{3}$，原点到 $f(x)$ 中二次曲线部分的最短距离为 3，试求 b,c,l,m 的值.(其中 $b,c>0$)

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以，$c=m$，$f(x)$ 在 $x=0$ 时，左导数=右导数，$f'_{左}(0)=l$，$f'_{右}(0)=b$，所以 $b=l$.

由原点到 $f(x)$ 中直线的距离为 $\frac{1}{3}$，可得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+l^2}}=\frac{1}{3}$，所以 $9m^2=1+l^2$，因为 $b,c>0$，所以，x^2+bx+c 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于 0，原点到二次曲线的距离 $d=\sqrt{x^2+(x^2+bx+c)^2}\geqslant c$，所以，$c=3$，$m=3$，$l=4\sqrt{5}$，$b=4\sqrt{5}$.

例 9(2002 年上海交通大学)　函数 $f(x)=|\lg x|$，有 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(1) 求 a,b 满足的关系；(2) 证明：存在这样的 b，使 $3<b<4$.

解　(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，

$$f(x)=|\lg x|=\lg x,$$

为单调递增函数，所以 $1\leqslant a<b$ 不可能使得

$$f(a)=f(b),$$

故

$$0<a<1\leqslant b,$$

此时，

$$f(a)=-\lg a=\lg\frac{1}{a},\quad f(b)=\lg b,$$

由 $f(a)=f(b)$，得

$$\frac{1}{a}=b,$$

即

$$ab=1.$$

又

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 1,\quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\lg\frac{a+b}{2},$$

由

$$f(b)=2\lg\frac{a+b}{2},$$

得

$$b=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2,$$

整理得 $b^4-4b^3+2b^2+1=0\Rightarrow(b-1)(b^3-3b^2-b-1)=0$，又 $b\neq1$（否则 $a=1$），所以 $b^3-3b^2-b-1=0$，故 a,b 满足的关系为 $b^3-3b^2-b-1=0,b>1$，且 $ab=1$.

(2) 设 $g(b)=b^3-3b^2-b-1$，由 $g(3)=-4<0,g(4)=11>0$，知 $g(b)=0$ 在 $(3,4)$ 上至少有一根，故存在 $b\in\mathbb{R}$，使 $3<b<4$.

巩 固 练 习

1. 已知抛物线 $y=x^2-5x+2$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 关于点 $(3,2)$ 对称，则 $a+b+c$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则对于 $[0,1]$ 内的所有 x 值，一定成立的是（　　）.

A. $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$　　B. $f(x)\leqslant f^{-1}(x)$

C. $f(x)=f^{-1}(x)$　　D. $f(x)\neq f^{-1}(x)$

3. 抛物线 $y^2=-4(x-1)$ 的准线方程为(　　).

A. $x=1$　　B. $x=2$　　C. $x=3$　　D. $x=4$

4. 设有三个函数,第一个是 $y=f(x)$,它的反函数就是第二个函数,第三个函数的图像与第二个函数的图像关于直线 $x+y=0$ 对称,则第三个函数是(　　).

A. $y=-f(x)$　　B. $y=-f(-x)$

C. $y=-f^{-1}(x)$　　D. $y=-f^{-1}(-x)$

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$,则函数 $g(x)=f(x+c)+f(x-c)$ 在 $0<c<\frac{1}{2}$ 时的定义域为(　　).

A. $(-c,1+c)$　　B. $(1-c,c)$　　C. $(1+c,-c)$　　D. $(c,1-c)$

6. 设 $a>0$ 且 $a\neq1$,则方程 $a^x+1=-x^2+2x+2a$ 的解的个数为________.

7. 若 $3^a=4^b=6^c$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{c}=$________.

8. 设 $f(x)$ 的原函数是 $\sqrt{x}+1$,则 $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=$________.

9. 设 a,b,c 均为实数,且 $3^a=6^b=4$,则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=$________.

10. 已知函数 $f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1}$,对于 $n=1,2,\cdots$,定义 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$,若 $f_{35}(x)=f_5(x)$,则 $f_{28}(x)=$________.

11. 解方程组 $\begin{cases} xy=2x+y-1, \\ yz=2z+3y-8, \\ xz=4z+3x-8. \end{cases}$

12. 在实数范围内求方程 $\sqrt[4]{10+x}+\sqrt[4]{7-x}=3$ 的实数根.

13. $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根分别为 a,b,c,并且 a,b,c 是不全为零的有理数,求 a,b,c 的值.

提 升 训 练

1. 对于 $x>0$,设 $f(x)=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{6}-\left(x^{6}+\dfrac{1}{x^{6}}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{3}+x^{3}+\dfrac{1}{x^{3}}}$,求 $f(x)$的最小值.

2. 试构造函数 $f(x)$,$g(x)$,其定义域为$(0,1)$,值域为$[0,1]$.

(1) 对于任意 $a\in[0,1]$,$f(x)=a$ 只有一解;

(2) 对于任意 $a\in[0,1]$,$g(x)=a$ 有无穷多个解.

3. 若存在常数 A,使得函数 $F(x)$对其定义域上的任意实数 x,有 $F(x)\geqslant\dfrac{A}{x}$成立,且等号能取到,则称 $y=\dfrac{A}{x}$为 $F(x)$的下托曲线.

(1) 若 $F(x)=\ln x$,求其下托曲线.

(2) 函数 $g(x)=\ln x+\dfrac{2}{\mathrm{e}x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$的图像与 x 轴是否有交点?并说明理由.

答 案 解 析

巩固练习

1. B　2. A　3. B　4. B　5. D　6. 2　7. 0　8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　9. $-\dfrac{1}{2}$

10. $\dfrac{1}{1-x}$

11. **解**　原方程组即$\begin{cases}(x-1)(y-2)=1, & ①\\(y-2)(z-3)=-2, & ②\\(z-3)(x-4)=4. & ③\end{cases}$

$\dfrac{①\times③}{②}$,得$(x-1)(x-4)=-2$,即 $x^{2}-5x+6=0$,解得 $x_1=2$,$x_2=3$,从而 $y_1=3$,