吴纪桃 魏光美 李翠萍 柳重堪 编著

第2版

高等数学 上册

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

高等数学

第2版

上册

吴纪桃
魏光美
李翠萍
柳重堪
编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分上、下两册，上册内容包含函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和级数，下册内容包含空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和常微分方程.

本书内容经过精细筛选，重点突出，层次分明，叙述清楚，深入浅出，简明易懂. 全书例题丰富，每节之后均配有适当数量的习题，书末附有习题答案与提示，便于教师教学，也便于学生自学.

本书可供高等学校理工科非数学专业的本科生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/吴纪桃等编著. --2 版. --北京：清华大学出版社，2011. 8
ISBN 978-7-302-26084-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 132509 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨 艳
出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮 编：100084
社 总 机：010-62770175
邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市兴旺装订有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170×230 **印 张**：22.25 **字 数**：394 千字
版 次：2011 年 8 月第 2 版 **印 次**：2011 年 8 月第1 次印刷
印 数：1～4000
定 价：29.80 元

产品编号：037066-01

第 2 版前言

21 世纪以来，北京航空航天大学在本科人才培养定位上做了明确定位：为我国培养具有创新潜质的国民经济建设领域里的领军人才和国防建设领域的领导人才。学校的办学方向明确为：具有航空航天特色和工程技术优势的多科性、开放式、研究型大学，肩负着高层次人才培养和基础性、前瞻性科学研究，以及战略高技术研究的历史使命。为了适应这一变化，学校将高等数学课程确定为 6 门校级核心课程之一。因此，北航高等数学课程组在北京市精品课建设的基础上，对高等数学的教学内容和练习系统进行了进一步的改革和完善，重点是有利于在教学中突出对优秀学生的培养。

2008 年北航高等数学课程获批进行国家精品课建设。在教育部质量工程经费的支持下，我们对教学过程进一步进行了优化，部分成果固化在本套教材中。经过这几年在北航本科教学中应用，证明了这套教材对相当层次的学校和学生是适用的。近年来，北航的学生连续在北京市数学竞赛和全国数学竞赛中取得了优异成绩，这也从一个侧面反映了这套教材在大班课的教学中突出了对优秀生的培养。

与第 1 版相比，本书第 2 版有以下改动：

1. 增加了课后的一部分上台阶的练习题。

2. 修改了第 1 版中的一些错误。

3. 重新安排了教学内容和体系，比如，将级数的教学内容调整到上册来，这样容易与反常积分中的一些相关内容进行对比，可以降低难度；又比如，将通常在上册讲授的空间解析几何放在下册的开篇，使得相关的知识更容易与多元函数微分学的内容结合起来。这样做的结果可以使教学更加“顺畅”。

4. 对配套的练习册的习题按内容与难度做了分层，有利于各种水平学生进行选择性练习，尤其适合优秀学生进行全方位练习。

本教材第 1,2,3 章由柳重堪教授执笔；第 4,5,6,8 章由吴纪桃教授执笔；第 7,10,11 章由李翠萍教授执笔；第 9,12 章由魏光美副教授执笔，上册由吴纪桃教授修改；下册由魏光美副教授修改，全书由吴纪桃教授统稿。

尽管本书的作者中每一位都主讲本课程 20 年以上，但是，不妥和错误之处也在所难免，恳请读者给予批评指正，以便再版时修正。

作　者

2011 年 5 月于北航

前言

2003年北京航空航天大学高等数学课程获得北京市精品课程建设立项，由此，我们的课程建设和改革工作进入了一个新的阶段。本课程组认真总结了数十年来在教学理念、教学内容、教学方法和教学手段方面的认识、方法、经验和教训，对该课程再次进行了新的定位和规划。作为总结，继承，改革和发展的一个重要标志，我们组织编写了这套高等数学教材和习题集，以适应新形势、新目标下对教学的要求，更好地为后续课程提供必要的理论基础和知识准备，进一步为培养学生的创新意识和创新能力服务，从中体现“强化基础，突出实践，重在素质，面向创新”的本科生人才培养方针的精神。

与传统的高等数学教材相比，本教材有以下特点：

1. 把概念和定理的引出、建立与证明尽可能处理成一个“发现”的过程。这种处理方法将有利于学生创新意识和能力的培养。

2. 进一步强调一些重要的定义、定理和公式的物理或几何内涵。不但强调它们在数学上的作用，更要强调它们在物理或几何上的解释。这样做能使非数学专业的理工科学生认识到数学在作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学生学习数学的兴趣。

3. 在推导公式和应用公式来解决实际问题时采用数学建模的方法和观点。即强调“分析实际问题（抽象简化）——建立数学模型（化成数学问题）——获得数学解（应用公式和算法）——解释实际问题（讨论解的合理性）”的解题过程。例如介绍了为什么数字电子设备中常用二进制，再如在定积分的应用一章中，每一个例题都重复数学建模的过程。这样做将有利于提高学生关于数学的应用意识和应用能力。

4. 通过全书内容不断强调一些重要的数学思想。比如，在微分学中的“局部以直代曲”，在积分学中的“化整为零——局部以直代曲——积零为整”，泰勒公式和函数展成级数中的“以简单表示复杂”，“近似与估计”，求解非线性方程中的“迭代与逼近”等思想方法。这样做将有利于学生通过学习高等数学受到数学思想方法的熏陶，使思维品质得到提升。

5. 适当加强了一些典型素材的论述。例如对泰勒公式的理解和应用，增加了一些利用泰勒公式研究函数特性和求极限的例题和习题，这是因为泰勒公式能极大程度地揭示可导函数的本质。再如补充了关于凸函数的一些内容，这是因为凸函数是属性被研究得较为透彻的一类函数。

6. 本书的例题和习题在难度上跨度较大，这有利于训练学生的解题方法技巧，有利于提高学生的计算和推理能力。

本教材第 1,2,3 章由柳重堪教授执笔，第 4,5,6,7 章由吴纪桃教授执笔，第 8,12 章由魏光美副教授执笔，第 9,10,11 章由李翠萍教授执笔，全书由吴纪桃教授统稿。

虽然本书的每一位编者主讲本课程的教龄都在 20 年以上，但是不妥和错误之处在所难免，真诚地希望有关专家、读者给予批评指正，以便再版时修改。

作　者

2007 年 5 月于北航

目录

第1章 函数与极限

1.1 函数

1.1.1 实数

人们在幼童时期就学会了数东西，这是自然数的一种应用.此后，在记账时为了表示收入和支出，需要用正数和负数；在标明商品价格、测量物体长度和重量时要用小数或分数；边长为1m的正方形，由勾股弦定理知其对角线长为$\sqrt{2}$m，这就引出了无理数；在解二次方程$ax^2+bx+c=0$时，若$b^2-4ac<0$，则其解会出现复数.这种关于数的概念的逐步拓展，一方面是出于实践的需要，另一方面也完善了数的理论.

在“高等数学”这门课程中，一般我们只限制在实数范围内讨论，因此本书中凡是说到数，均指实数.但有时为了讨论方便，也会涉及复数，这时一定予以指明.实数包括有理数和无理数两类.有理数是能表示为两个整数相除的数，或者等价地，有理数就是有限小数或者无限循环小数，而无理数是无限不循环小数，它不能表示成两个整数相除，例如$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$，都是无理数.总之，我们可以把实数定义为无限小数.全体实数构成的集合称为**实数集**，或**实数域**，记为$\mathbb{R}$.几何上，实数域可用数轴来表示，因为任一实数与数轴上的点可以建立一一对应的关系.

实数域有着许多优良的性质，例如有序性(可以比较大小)，稠密性，连续性，可进行四则运算，等等.

1.1.2　区间

设 $a,b\in\mathbb{R}$(记号"$\in$"读作"属于")且 $a<b$,称集合$\{x|a<x<b\}$为**开区间**,记为(a,b)；称集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$为**闭区间**,记为$[a,b]$；集合$\{x|a<x\leqslant b\}$和$\{x|a\leqslant x<b\}$都称为**半开(半闭)区间**,分别记为$(a,b]$和$[a,b)$；此外还有

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\},$$
$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\},$$

其中符号$+\infty$和$-\infty$读作"正无穷大"和"负无穷大".显然

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}.$$

这五个区间都是"无穷区间".应注意,∞不是数,仅仅是一个记号.

对于给定的数 a 及小的正数 ε,区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$称为点 a 的 **ε 邻域**,记作$U(a,\varepsilon)$：

$$U(a,\varepsilon)=\{x\mid |x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon),$$

而点 a 的去心 ε 邻域 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$是指

$$\mathring{U}(a,\varepsilon)=\{x\mid 0<|x-a|<\varepsilon\}.$$

1.1.3　函数的概念

在对某个自然过程或社会过程进行定量描述和研究时,总要涉及两类基本的量：常量与变量.在所考察的过程或问题中,有些量的大小不发生变化,保持某一固定的数值,这种量称为**常量**.还有些量的大小是变化的,它们可在一定的范围内取不同的数值,这种量称为**变量**.例如,一个物体在离地面为 H 的高处下落,其初始速度为 v_0,则在开始下落至达到地面的过程中,该物体所下落的距离 s 与所经历的时间 t 有下列关系：

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.1.1}$$

显然,在这个下落过程中,$\frac{1}{2}$,v_0 和 g 是常量,而时间 t 和距离 s 是变量,而且 s 随 t 的变化而变化.变量 s 与变量 t 的这种依从关系在数学中称为函数关系.下面给出函数的确切定义.

定义 1.1.1　设 D 是一个非空数集.如果有一个对应规则 f,使得对每

一个 $x\in D$,都对应于唯一的一个数 y,则此对应规则 f 称为定义在集合 D 上的一个**函数**,并把数 x 与相应的数 y 之间的对应关系记为

$$y=f(x),$$

称 x 为该函数的**自变量**,y 为**函数值**或**因变量**,D 为**定义域**.

当自变量 x 取遍定义域 D 中数值时,相应的函数值 y 的取值集合

$$\mathbb{Z}=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

定义 1.1.2 若对于每一个 $y\in\mathbb{Z}=\{y=f(x),x\in D\}$,都有唯一的 $x\in D$ 与之对应,则称如此确定的 x 依赖于 y 的对应规则为函数 f 的反函数,记为 f^{-1},即

$$x=f^{-1}(y),$$

其定义域为$\mathbb{Z}$.

需要注意的是,习惯上常用 y 表示因变量,x 表示自变量.所以,也可以称函数 $y=f^{-1}(x)$是函数 $y=f(x)$的反函数.

例 1.1.1 设三角形的两边之长 a 和 b 为已知数,它们的夹角 γ 的取值可以变化,则此三角形的面积 A 与角 γ 之间的函数关系为

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma, \tag{1.1.2}$$

显然,γ 的取值范围是 $0<\gamma<\pi$,故此函数的定义域是开区间$(0,\pi)$.相应地,此函数的值域是半开区间$\left(0,\frac{1}{2}ab\right]$.

例 1.1.2 式(1.1.1)所示的物体下落运动中,t 是自变量,s 是因变量,该函数的定义域是区间$[0,T]$,值域是区间$[0,H]$.这里 H 是已知的物体初始高度,T 是物体从开始下落至达到地面所经历的时间.显然,T 满足二次方程

$$v_0T+\frac{1}{2}gT^2=H.$$

由此可解得

$$T=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2gH}}{g}. \tag{1.1.3}$$

因此,函数(1.1.1)的定义域为区间$[0,(\sqrt{v_0^2+2gH}-v_0)/g]$.

例 1.1.3 设某城市的出租车载客收费标准为:5km 以内的路程收费 10 元,此后按 2 元/km 收费.由此可知,出租车载客时的收费数 F 与行驶里程 s 的函数关系为

$$F=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 5,\\ 10+2(s-5), & s>5.\end{cases} \tag{1.1.4}$$

例如，出租车载乘客甲行驶 4.5km，则应收费 10 元；载乘客乙行驶 17.5km，则应收费为

$$F = 10 + 2\times(17.5 - 5) = 10 + 25 = 35\ \text{元}.$$

此函数的图像示于图 1.1.1.

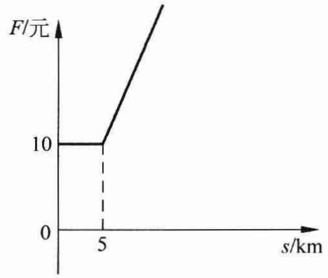

图 1.1.1

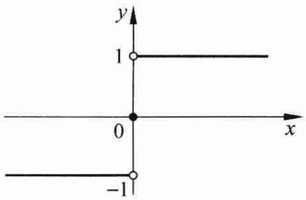

图 1.1.2

例 1.1.4　符号函数 $\operatorname{sgn}x$ 定义为

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

其图像如图 1.1.2 所示.

下面我们对函数定义中的有关问题作一些解释.

(1) 在函数记号

$$y = f(x)$$

中，f 表示函数，$f(x)$ 表示对应于 x 值的函数值，两者是有区别的. 但是研究函数一般都是通过研究函数值进行的，因此习惯上常把函数和函数值都称为函数. 基于这一点，有时也把表示因变量的字母与表示函数的字母写成相同的，例如

$$y = y(x),$$
$$s = s(t)$$

等，并常把 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$ 读作"y 是 x 的函数".

(2) 上述定义中的函数具有单值性. 也就是说，当自变量在定义域 D 中取定了一个数值时，与之对应的函数值是唯一的.

(3) 定义域是函数的一个组成部分. 给定一个函数，就意味着其定义域是同时给定的.

应该注意的是，如果两个函数的表达式在形式上相等，但定义域不同，则它们是两个不同的函数. 例如 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$，从形式上看似乎相