



文登教育

Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学基础 核心讲义

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

本书使用说明:

- ◆ 本书所提供的网络增值服务**全部免费**，密码无法登陆或无密码者均为盗版书籍。
- ◆ 答疑论坛说明及各复习阶段免费课件介绍详见封二、封三。
- ◆ 本书与教科书平行，又略有提高，**更适合第一轮复习。**
- ◆ 建议在使用“复习指南”之前研读本书，效果更佳！

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



文登教育

Wendeng Education

2013

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学基础 核心讲义

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 主 编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础核心讲义:经济类 / 陈文灯主编. —3 版. —北京:北京理工大学出版社,2012.1
(文登教育)

ISBN 978-7-5640-5423-6

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 269406 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 22.25

字 数 / 414 千字

版 次 / 2012 年 1 月第 3 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 42.00 元

责任校对/ 周瑞红

责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前言

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎科学。有人把学数学比喻成爬台阶,下面几级上不去,就无法再向上爬了,这很有道理。只有打好坚实的基础,才有可能掌握运算的方法和技巧。由于种种原因,有的同学还存在概念没吃透,理论没充分理解的欠缺。为此,我们根据几十年的教学和考研辅导经验,编写这本与“教科书”平行,又略有提高,着重于引领同学们深入理解概念和基础理论的书。本书特点如下。

1. 文字叙述通畅易懂,深入浅出,使同学们对基本概念和基本理论理解得更深入、更透彻。
2. 发掘出同学们认识和理解的死角和误区,通过例题的讲解,起到正本清源,拨乱反正的作用。
3. 为了引起同学们的注意,对有些概念、定理,还增加了注释,虽然只是寥寥数字,却有画龙点睛、开阔眼界、拓宽思路之功效。
4. 通过对精选例题的讲解做正面的引导,有时也举些反例,起到反面的警示。
5. 针对线性代数、概率与统计公式比较多,难记忆的特点,采用表格法,使之一目了然。

本书对考研学生打基础很有参考价值,对在读本科生、大专生也是良师诤友,本书中有些处理不当的地方请同仁批评指正。

编者

2012年1月

目 录

第 1 篇 微 积 分		第 3 章 微分中值定理和导数的应用 ... 46
第 1 章 函数、极限和连续 1		3.1 微分中值定理 46
1.1 函数 1		一、 罗尔定理 46
一、 函数的基本概念 1		二、 拉格朗日中值定理和柯西中值定理 49
二、 函数的基本性质 4		三、 泰勒定理 52
三、 反函数、隐函数和复合函数 7		3.2 洛必达法则 53
四、 分段函数 10		一、 $\frac{0}{0}$ 未定式 53
五、 初等函数 10		二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 54
1.2 极限 12		三、 其他未定式 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ 的计算 55
一、 数列的极限 12		3.3 导数的应用 56
二、 函数的极限 15		一、 过定点的曲线的切线和法线方程 56
三、 无穷小、无穷大和无穷小量阶的比 较 21		二、 函数单调性的判别 57
1.3 函数的连续性与间断点 24		三、 函数的极值和最值 58
一、 函数的连续性 24		四、 曲线的凹凸性和拐点 60
二、 间断点 26		五、 曲线的渐近线 61
三、 闭区间上连续函数的性质 27		六、 函数作图及函数图形与其导函数 图形的关系 62
习题一 29		习题三 64
第 2 章 导数与微分 32	第 4 章 不定积分 67	
2.1 导数与微分 32	4.1 不定积分的基本概念和性质 67	
一、 基本概念、性质和定理 32	一、 原函数和不定积分的概念 67	
二、 导数公式和运算法则 35	二、 基本积分公式 69	
三、 反函数、复合函数和隐函数的导数 法则 36	三、 不定积分的基本运算法则 70	
四、 微分 37	4.2 不定积分的计算方法 71	
五、 高阶导数 38	一、 不定积分的换元积分法 71	
2.2 各种函数的导数的解法 40	二、 不定积分的分部积分法 75	
一、 求幂指函数的导数 40	4.3 各种函数的不定积分 77	
二、 求函数表达式为若干因子连乘积 或商形式的函数的导数或微分 41	一、 有理函数的不定积分 77	
三、 分段函数的导数 41	二、 三角函数有理式 $\int R(\sin x, \cos x) dx$	
2.3 重要结论 42		
习题二 43		

的不定积分	78	第 7 章 二重积分	131
三、含无理式的不定积分	81	7.1 二重积分	131
四、分段函数的不定积分	83	一、二重积分的概念	131
五、复合函数的不定积分	84	二、二重积分的基本性质	132
习题四	84	三、二重积分的计算	134
第 5 章 定积分和反常积分	87	四、分段函数的二重积分	140
5.1 定积分的概念和性质	87	7.2 无界区域上的二重积分	141
一、定积分的概念	87	习题七	142
二、定积分的性质	88	第 8 章 无穷级数	144
5.2 定积分的计算	91	8.1 数项级数	144
一、微积分基本公式	91	一、级数的概念	144
二、定积分的换元法和分部积分法	93	二、正项级数收敛性的判别	147
三、定积分计算中的常用公式	95	三、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n > 0)$ 与莱布尼茨定理	149
四、分段函数的定积分	97	四、任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (u_n 可正、可负、可 0) 的绝对收敛和条件收敛	151
五、杂例	98	8.2 幂级数	153
5.3 反常积分及计算	99	一、函数项级数(大纲不要求)	153
一、无穷区间上的反常积分	99	二、幂级数	154
二、无界函数的反常积分(或瑕积分)	100	习题八	160
三、计算反常积分的步骤	101	第 9 章 常微分方程	162
5.4 定积分的应用	102	9.1 微分方程的基本概念	162
习题五	106	一、微分方程	162
第 6 章 多元函数微分学及应用	109	二、常微分方程的解	162
6.1 多元函数、极限和连续	109	9.2 一阶微分方程	163
一、多元函数的概念	109	一、可分离变量的微分方程	163
二、二元函数的极限和连续	110	二、齐次方程	163
6.2 二元函数偏导数、全微分	112	三、一阶线性微分方程	165
一、偏导数	112	9.3 二阶线性微分方程	167
二、全微分	114	一、线性微分方程解的性质和结构定理	167
6.3 多元复合函数求导法和隐函数求导法	118	二、常系数齐次和非齐次线性微分方程	168
一、多元复合函数的求导法	118	9.4 差分方程	172
二、多元隐函数求导法	122	习题九	174
6.4 多元函数的极值、条件极值和最值	124	第 10 章 微积分在经济中的应用	177
一、基本概念和定理	124	一、基本概念和公式	177
二、极值的求法	125	二、复利问题	183
习题六	128		

第2篇 线性代数

第1章 行列式	184
1.1 行列式的概念	184
一、排列与逆序	184
二、 n 阶行列式定义	185
三、特殊的行列式	185
1.2 行列式的性质和定理	186
一、行列式的性质	186
二、行列式按行(列)展开定理	187
1.3 行列式的计算	188
1.4 克莱姆法则	192
习题一	194
第2章 矩阵	197
2.1 矩阵的概念	197
一、矩阵的概念和运算	197
二、方阵的行列式	199
2.2 逆矩阵和伴随矩阵	200
一、逆矩阵	200
二、伴随矩阵	201
2.3 分块矩阵	202
2.4 初等变换	203
一、初等变换	203
二、初等矩阵	204
三、矩阵的秩	205
习题二	207
第3章 向量	212
3.1 向量	212
一、基本概念和运算法则	212
二、线性组合	213
三、线性相关和线性无关	213
四、向量组的等价	215
五、向量组相关性的重要结论	215
3.2 向量组的秩	215
一、极大线性无关组	215
二、向量组的秩	216
3.3 内积与 Schmidt 正交化方法	217
一、向量的内积,长度及正交	217
二、Schmidt 正交化方法	217

习题三	218
第4章 线性方程组	220
4.1 高斯消元法	220
一、基本概念	220
二、高斯消元法(用初等变换求线性方程组的解)	220
4.2 线性方程组解的结构、性质和判定	223
一、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的基础解系	223
二、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的解判定定理、性质和结构定理	225
三、非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = b$ 的解的判定定理、性质和结构定理	226
四、两个线性方程组解之间的关系	229
4.3 线性方程组在向量中的应用	230
一、向量的线性相关性	230
二、向量组的线性表示的问题	231
习题四	233
第5章 特征值与特征向量	236
5.1 特征值与特征向量	236
一、基本概念	236
二、基本性质	236
三、计算特征值与特征向量	237
5.2 相似矩阵与矩阵的对角化	239
一、基本概念和性质	239
二、矩阵的相似对角化的步骤	239
三、实对称矩阵的相似对角化	241
习题五	242
第6章 二次型	246
6.1 基本概念和性质	246
一、二次型的定义	246
二、合同变换和合同矩阵	247
三、二次型的标准形与规范型	248
四、矩阵的等价、相似和合同的结论	253
6.2 正定二次型	254
习题六	256

第3篇 概率论与数理统计

第1章 随机事件与概率	259	二、重要结论和公式	311
1.1 基本概念与性质	259	三、由随机试验给出的随机变量的数 字特征的计算	312
一、基本概念	259	4.2 二维(多维)随机变量的数字特征	313
二、事件的概率和性质	261	一、两个随机变量函数的数学期望	313
1.2 古典概率	263	二、协方差,相关系数和矩	313
一、古典概型	263	三、二维随机变量及其函数的数字特 征的计算	314
二、几何概型	265	四、利用(0-1)分布求多维随机变量 数字特征	321
1.3 条件概率和三个概率计算公式	266	习题四	322
一、条件概率	266	第5章 大数定律与中心极限定理	326
二、三个概率计算公式	267	5.1 大数定律	326
1.4 事件的独立性和贝努里概型 ..	269	一、切比雪夫不等式	326
一、事件的独立性	269	二、大数定律	327
二、贝努里(Bernoulli) 概型	271	5.2 中心极限定理	328
习题一	272	一、列维-林德伯格定理	328
第2章 随机变量及其分布	275	二、棣莫佛-拉普拉斯定理	329
2.1 基本概念和性质	275	习题五	331
一、随机变量和分布函数	275	第6章 样本与抽样分布	333
二、离散型随机变量	276	6.1 数理统计的基本概念和结论 ..	333
三、连续型随机变量	280	一、总体与样本	333
2.2 随机变量函数的分布	282	二、统计量	334
一、离散型随机变量函数的分布 ..	282	三、分位数	335
二、连续型随机变量函数的分布 ..	283	6.2 三个常用统计量分布, χ^2 分布, t 分 布和 F 分布	335
习题二	285	一、 χ^2 分布	335
第3章 多维随机变量及其分布	289	二、 t 分布	335
3.1 基本概念	289	三、 F 分布	336
一、二维随机变量的分布	289	四、正态总体的抽样分布	336
二、边缘分布	290	五、统计量的数字特征	338
3.2 二维随机变量	290	习题六	340
一、二维离散型随机变量	290	第7章 参数估计	342
二、二维连续型随机变量	294	一、基本概念	342
三、相互独立的随机变量	297	二、矩估计法	342
3.3 随机变量的函数分布 $Z = g(X, Y)$	300	三、最大似然估计法	343
习题三	304	习题七	345
第4章 随机变量的数字特征	309		
4.1 一维随机变量的数字特征	309		
一、数学期望和方差	309		

第 1 篇 微 积 分

第 1 章 函数、极限和连续

基础知识与规律总结

1.1 函 数

一、函数的基本概念

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量, D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意的 $x \in D$, 变量 y 按照对应法则 f 总有一个确定的实数值与之对应, 则称 y 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 为自变量, y 为因变量, D 称为函数的定义域, 有时记为 D_f .

全体函数值的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

① 函数是一个变量对另一个变量的依赖关系, 如函数 $y = x^2, y = \sin x + 1, y = \ln x, y = \ln x^2$ 等.

② $y = c$ (c 为常数) 称为常函数.

2. 函数的定义域的求解

(1) 若函数是用解析式表示的, 则其定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合.

(2) 若是根据实际问题建立的函数, 则其定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

常用函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{定义域为 } x \neq 0.$$

$$y = \sqrt[n]{x} \ (n \in \mathbf{N}), \text{定义域为 } x \geq 0.$$

$$y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1), \text{定义域为 } x > 0.$$

$$y = \sin x \text{ 或 } y = \cos x, \text{定义域为 } (-\infty, +\infty).$$

$$y = \tan x, \text{定义域为 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$y = \cot x, \text{定义域为 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$y = \arcsin x$ 或 $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$.

【例 1.1】 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \log_{x-1}(9-x^2); \quad (2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}.$$

【解】 (1) 函数若有意义, 必满足以下条件.

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}, \text{ 故函数的定义域为 } \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$$

(2) 函数若有意义, 必满足以下条件.

$$\begin{cases} \arcsin x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ 故函数的定义域为 } \left\{x \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

一般给出函数表达式时, 并不写出它的定义域, 但是隐含了定义域, 如给出函数 $y = \frac{1}{x}$, 就隐含了 $x \neq 0$.

3. 函数的值域的求解

(1) 由多项式表达的函数, 一般用配方法或判别式法求函数的值域.

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 有实数解 $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则 $f(x)$ 无实数解.

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域.

(3) 若含三角函数, 可利用某些三角函数的有界性.

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域. (1.3 节讲)

【例 1.2】 求下列函数的值域.

$$\begin{aligned} (1) y &= 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9}; & (2) y &= \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2}; \\ (3) y &= \frac{x+1}{x+2}; & (4) y &= 3 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); \\ (5) y &= \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}. \end{aligned}$$

【解】 (1) 应用配方法, 则 $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 5}$,

故函数的值域为 $(-\infty, 3 - \sqrt{5}]$.

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \frac{4}{\sin x + 2}, \text{ 而 } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq 1,$$

$$\text{即 } -3 \leq y \leq -\frac{1}{3}, \text{ 故函数的值域为 } \left[-3, -\frac{1}{3}\right].$$

$$(3) \text{ 当 } x \neq -2 \text{ 时, 由原式可得 } x = \frac{1-2y}{y-1}, \text{ 即 } y \neq 1.$$

故函数的值域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(4) 由原式可得 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$, 因为 $\left| \frac{3-y}{2} \right| \leq 1$, 所以函数的值域为: $[1, 5]$.

(5) 变形为 $2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$, 则

$$\Delta = 16y^2 - 8y(3y - 5) \geq 0 \Rightarrow y(y - 5) \leq 0 \Rightarrow 0 < y \leq 5.$$

4. 函数概念的两个要素: 定义域和对应法则

(1) 定义域: 自变量 x 的取值范围. 例如, $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 不是函数, 因为 $x^2 + 2 > 1$.

(2) 对应法则: 给定 x 值, 求 y 值的方法.

① 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时, 两个函数才表示同一个函数 (或称两个函数等价), 否则表示两个不同的函数.

② 函数的表示法只与定义域和对应法则有关, 而与用什么字母表示无关, 这称为函数表示的无关特性. 此法常用来求函数的表达式.

【例 1.3】 在下列各组函数中, 找出两个函数等价的一组.

$$(1) y = x^0 \text{ 与 } y = 1; \quad (2) y = (\sqrt{x})^2 \text{ 与 } y = \sqrt{x^2};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} \text{ 与 } y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}; (4) y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}} \text{ 与 } y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}.$$

【解】 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \neq 0\}$; $y = 1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$, 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \geq 0\}$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$, 故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x \neq 0\}$, 且对应法则相同, 故该组的两个函数等价.

(4) 要使 $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义, 则要求 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3\}$; 要使 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$

有意义, 则要求 $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3 \text{ 或 } x < 2\}$, 故该组的两个函数不等价.

【例 1.4】 设 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$, 求 $f(x)$.

【分析】 对 $f(g(x)) = h(x)$, 一般令 $g(x) = t$, 求出 x 关于 t 的表达式, 代入 $h(x)$, 然后利用函数的表示无关特性求函数的表达式.

【解】 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x$, 令 $\tan x = t$, 有 $f(t) = 1 + 2t^2$.

于是 $f(x) = 1 + 2x^2$.

【例 1.5】 设 $f(\cos^2 x) = \cos 2x - \cot^2 x$, $0 < x < 1$, 求 $f(x)$.

【解】 $f(\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 - \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$,

令 $t = \cos^2 x$, 则 $f(t) = 2t - 1 - \frac{t}{1-t}$, $\cos^2 1 < t < 1$.

故 $f(x) = 2x - 1 - \frac{x}{1-x} = 2x - \frac{1}{1-x}$, $\cos^2 1 < x < 1$.

二、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x) \text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数(或奇函数).

① 奇偶性是函数的整体性质, 对整个定义域而言, 奇或(偶)函数的定义域一定关于原点对称, 如果一个函数的定义域不关于原点对称, 则这个函数一定不是奇(或偶)函数. 所以判断函数的奇偶性, 首先是检验其定义域是否关于原点对称, 然后再严格按照奇偶性的定义经过化简、整理, 再与 $f(x)$ 比较得出结论. 如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 因为其定义域关于原点不

对称, 它就不具有奇偶性.

② 偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.③ $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x = 0$ 处有定义, 则 $f(0) = 0$.④ $f(x) \equiv 0$ 既是奇函数又是偶函数. $f(x) \equiv c (c \neq 0)$ 是偶函数.

(2) 奇偶函数的运算性质.

① 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或任意多个偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数之积为奇函数.

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

④ 一个非零的奇函数和一个非零的偶函数的和是非奇非偶的.

常见的偶函数: 常函数 $y = c$, $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), e^{x^2} , $e^{|x|}$, $e^{\cos x}$...常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} (n 为正整数), $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{sgn} x$, ...

【例 1.6】判别下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(2) f(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x > 0 \\ x(1+x), & x < 0 \end{cases}$$

【解】(1) $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \text{ 令 } G(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(x) + G(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0.$$

所以 $G(x)$ 是奇函数, 又 $F(x)$ 是奇函数, 而偶数个奇函数的乘积是偶函数, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = -x[1 + (-x)] = -x(1 - x) = -f(x)$;

当 $x < 0$ 时, $f(-x) = -x[1 - (-x)] = -x(1 + x) = -f(x)$.

故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 1.7】证明: 定义在对称区间 $(-a, a)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证】设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内有定义, 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

因为 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$,

所以 $\varphi(x)$ 是奇函数, $\psi(x)$ 是偶函数, 而 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$,

故命题得证.

● 这个结论要记住, 以后用起来方便.

2. 周期性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D , 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

同样, $f(x - T) = f(x)$ 也是成立的.

(2) 周期函数的运算性质.

① 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是以 T_1 、 T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 一般是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的周期函数 (正弦函数与余弦函数的和或差不满足此性质, 如 $|\sin x| + |\cos x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$).

常见的周期函数:

$\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$; $\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

【例 1.8】求 $f(x) = x - [x]$ 的最小周期.

【解】设 $x = n + r$, m 为正整数, 则

$$\begin{aligned} f(x + m) &= f(m + n + r) = m + n + r - [m + n + r] \\ &= m + n + r - m - [n + r] = n + r - [n + r] = f(x), \end{aligned}$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期, 且最小周期为 1.

● 周期函数并不一定有最小周期, 如对于常函数, 任意正数都是它的周期; 对于狄利克莱函数, 任意正有理数都是该函数的周期, 所以常函数和狄利克莱函数都不存在最小正周期.

【例 1.9】设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a, x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】由题设, $f(a+x) = f(a-x)$, $f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad f(x) &= f[a+(x-a)] = f[a-(x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b+(2a-x-b)] = f[b-(2a-x-b)] \\ &= f[x+2(b-a)].\end{aligned}$$

故 $y = f(x)$ 是周期函数, 且周期 $T = 2(b-a)$.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义, 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界, 数 M 称为 $f(x)$ 的一个界; 若不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 M_1 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界, 且称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在 M_2 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界, 且称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

① 有界性是相对于某个区间而言的, 是局部概念.

如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上是无界的, 但在 $[0.01, 2]$ 上是有界的.

② 函数在 D 上有界的充分必要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

六个常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$|\arcsin x| \leq \pi/2; |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1]$$

$$|\arctan x| < \pi/2; |\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty).$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

① 函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相同, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0.$$

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相反, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0.$$

② 单调性也是相对于某个区间而言的, 是局部概念.

③ 单调函数的反函数仍单调, 且单调性相同.

④ 复合函数 $f(g(x))$ 的单调性有如下结论.

若 f, g 的单调性相同, 则 $f(g(x))$ 单调递增; 若 f, g 的单调性相反, 则 $f(g(x))$ 单调递减.

【例 1.10】设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【证】任意 $x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1 \in (0, a)$, $-x_2 \in (0, a)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 故 $f(-x_1) > f(-x_2)$,

又由于 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是奇函数, 则 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

奇函数若在某区间单调增加(或减少), 则在对称区间也是单调增加(或减少).

偶函数若在某区间单调增加(或减少), 则在对称区间是单调减少(或增加).

三、反函数、隐函数和复合函数

1. 反函数

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 Z_f , 若对任意 $y \in Z_f$, 有唯一确定的 $x \in D_f$ 满足 $y = f(x)$, 则称 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y) \text{ (或 } x = \varphi(y)),$$

并称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$, $x \in Z_f$.

① $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像重合; 而 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称(均是在同一坐标系).

② $y = f(x)$ 的定义域是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数. 定义域上单调的函数必有反函数. 若要求函数的反函数, 则只能求它的单调区间的反函数.

④ $y = f(f^{-1}(y)), x = f^{-1}(f(x))$.

⑤ 奇函数的反函数也是奇函数.

⑥ 函数与其反函数具有相同的单调性.

(2) 计算反函数.

步骤如下.

① 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出, 得到 $x = f^{-1}(y)$.

② 将刚才得到的表达式中的字母 x 与 y 对换, 即得所求函数的反函数 $y = f^{-1}(x)$, 要注意写出定义域.

若求分段函数的反函数, 只要求出各区间段的反函数及其定义域即可.

【例 1.11】 求 $y = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

【解】 当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, 原式变形为

$$y(\sqrt{2x+1}+1) = \sqrt{2x+1}-1, \text{ 即 } \sqrt{2x+1} = \frac{1+y}{1-y},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 - 1 \right] = \frac{2y}{(1-y)^2}, \text{ 且 } \frac{1+y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y < 1,$$

故反函数为 $y = \frac{2x}{(1-x)^2}$, 且 $-1 \leq x < 1$.

【例 1.12】 设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$, 求 $f^{-1}(x)$.

【解】由 $y = x, -\infty < x < 1$ 可得 $x = y, -\infty < y < 1$.

由 $y = x^2, 1 \leq x \leq 4$ 可得 $x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16$.

由 $y = 2^x, 4 < x < +\infty$ 可得 $x = \log_2 y, 16 < y < +\infty$.

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换, 则得到 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}.$$

2. 隐函数

前面我们看到的都是显函数, 即 y 等于含自变量 x 的式子, 如 $y = \ln(x+1)$ 等, 只要知道了 x 的值, 立刻就能得到 y 的值. 但有的函数方程不能这么表达, 即 y 不能用 x 的式子表示, x 也不能用 y 的式子表示. x 和 y 的对应关系由一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示.

如果变量 x, y 满足一个方程 $F(x, y) = 0$, 在一定条件下, 当 x 取某区间的任一值时, 相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在, 则说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

● 有的隐函数可以化成显函数, 如 $x - y^3 + 1 = 0$ 是一个隐函数, 它也可以化成显函数, 即 $x = y^3 - 1$ 或 $y = \sqrt[3]{x-1}$. 但有的隐函数不能表示成显函数的形式. 如隐函数 $e^x + e^y + xy = 0$.

3. 复合函数

(1) 定义.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $Z_\varphi \subset D_f$, 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

其中, x 为自变量, u 为中间变量, y 为因变量.

● 复合的条件: $Z_\varphi \subset D_f$, 即外层函数的定义域包含内层函数的值域.

如 $y = \arcsin u, u = x^2 + 2$ 不能复合为 x 的函数,

这是因为 $|u| \leq 1, x^2 + 2 \geq 2$, 所以 $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 无意义.

(2) 求复合函数的定义域.

已知 $f(x)$ 的定义域为 D_f , 求函数 $f(g(x))$ 的定义域只需求满足 $g(x) \in D_f$ 的 x 的集合.

【例 1.13】设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域.

(1) $f(\cos x)$;

(2) $f(x+a) + f(x-a), a > 0$.

【解】(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$,

所以 $0 \leq \cos x \leq 1$, 即 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

故定义域为 $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(2) 记 $F(x) = f(x+a) + f(x-a)$, 若 x 为 $F(x)$ 定义域内的点,

由 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 可得

$$\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases} \Rightarrow a \leq x \leq 1-a (a > 0).$$

因此, 当 $a < 1-a$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $[a, 1-a]$;

当 $a = 1-a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $\left\{x = \frac{1}{2}\right\}$;

当 $a > 1-a$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $\emptyset$.

(3) 求解复合函数的基本方法:直接代入法,分析法和图示法.

① 直接代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法,称之为代入法.该法适用于初等函数的复合.

② 分析法:所谓分析法就是根据最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法.该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

③ 图示法:所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法.该法适用于分段函数,尤其是两个均为分段函数的复合.具体解题程序为:

(a) 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像.

(b) 把 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出(是若干条平行于 x 轴的直线).

(c) 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间.

(d) 将(c)所得结果代入 $y = f(u)$ 中,便得到复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的表达式及相应的 x 的变化区间.

【例 1.14】 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f(f(x))$, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

【解】 利用直接代入法求解.

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{1}{1-(1-x^2)^2} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.15】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f(\varphi(x))$.

【解】 由题设知, $f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$, 下面根据外层函数的定义域包含内层函数的值域求具体表达式.

(1) 当 $\varphi(x) < 1$ 时.

若 $x < 0$, 且使 $\varphi(x) = x+2 < 1$, 即 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, 得 $x < -1$;

若 $x \geq 0$, 且使 $\varphi(x) = x^2-1 < 1$, 即 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases}$, 得 $0 \leq x < \sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时.

若 $x < 0$, 且使 $\varphi(x) = x+2 \geq 1$, 即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$, 得 $-1 \leq x < 0$;

若 $x \geq 0$, 且使 $\varphi(x) = x^2-1 \geq 1$, 即 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases}$, 得 $x \geq \sqrt{2}$.

$$\text{综上所述, 有 } f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

【例 1.16】 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f(f(x))$.