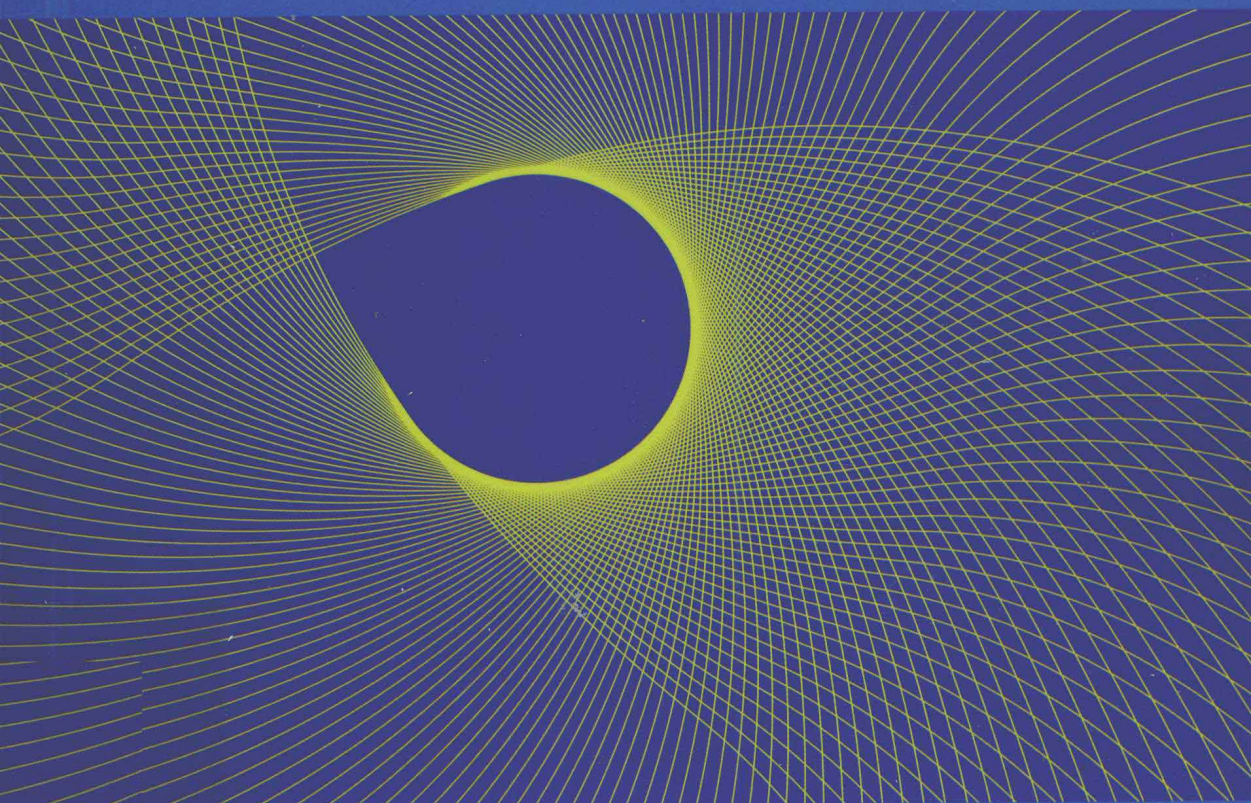


普通高等院校卓越工程师教育系列

高等数学

(上册)

曾金平 张忠志 主编



科学出版社

普通高等院校卓越工程师教育系列

高等数学(上册)

曾金平 张忠志 主编

科学出版社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本系列书是大学(理)工科本科生的教材. 本书为《高等数学》上册, 主要介绍函数、极限与连续, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 定积分与不定积分, 定积分的应用等内容. 每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题, 可帮助学生理解和掌握相应的教学内容; 每章配有较难的综合练习题, 可进一步加深学生对教材内容的理解; 每章还提供了适当的阅读材料, 可增强学生用数学的意识.

本书可供普通高等院校理工科各专业使用, 也可作为经管类相应专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 曾金平, 张忠志主编. —北京: 科学出版社, 2011. 8

(普通高等院校卓越工程师教育系列)

ISBN 978-7-03-032146-6

I. ①高… II. ①曾… ②张… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 170314 号

责任编辑: 杨瑰玉 冯桂层 / 责任校对: 安 凌
责任印制: 彭 超 / 封面设计: 苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1 000)
2011 年 8 月第一次印刷 印张: 18 1/2
印数: 1—4 000 字数: 360 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，教育部联合有关部门和行业协会共同在有关高校中组织实施“卓越工程师教育培养计划”。2010年6月，我校作为第一批实施高校参与了该计划。依据我校卓越工程师培养计划的标准，遵循工程的集成与创新特征，以强化工程实践能力、工程设计能力与工程创新能力为核心，重构课程体系和教学内容，着力推动基于问题的学习、基于项目的学习、基于案例的学习等多种研究性学习方法，加强学生创新能力的训练，加强跨专业、跨学科的复合型人才培养。

“高等数学”是理工科学生的一门重要的基础课程。本系列教材的编写，正是立足于“卓越工程师教育培养计划”，着眼于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力，对传统的“高等数学”的教学内容进行了优化，淡化了理论证明和技巧性计算。每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题，可帮助学生理解和掌握相应的教学内容；每章配有较难的综合练习题，可进一步加深学生对教材内容的理解。为开拓学生视野，培养其创新能力，每章提供了适当的阅读材料。通过阅读这些内容，可增强学生用数学的意识。

本书为《高等数学》上册，由曾金平、张忠志担任主编，并有关力(第1章)、贾继红(第2,4章)、余晋昌(第3,5章)等多位老师参加编写。主要介绍函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，定积分的应用等内容。本书可供普通高等院校理工科各专业使用，也可作为经管类相应专业的教材或参考书。

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，还望广大读者和老师批评指正！

编 者

2011年7月

目 录

前言	i
第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 实数与实数集合	2
1.1.2 函数及其图形	4
1.1.3 反函数、复合函数与初等函数	11
习题 1.1	15
1.2 极限的定义与性质	17
1.2.1 自变量趋向有限数的极限	17
1.2.2 单侧极限	20
1.2.3 函数在无穷大的极限	21
1.2.4 无穷极限	22
1.2.5 极限的性质	24
习题 1.2	25
1.3 极限的运算法则	26
1.3.1 极限的四则运算法则	26
1.3.2 复合函数的极限	30
1.3.3 夹逼定理	31
习题 1.3	34
1.4 函数的连续与间断	35
1.4.1 连续函数的定义	36
1.4.2 函数间断点的类型	38
1.4.3 连续函数的运算及初等函数的连续性	39
1.4.4 在闭区间上连续函数的性质	40
习题 1.4	42
小结	43
练习一	46
阅读材料 1 极限的历史回顾及其严格定义	49

阅读材料 2 自然常数 e 与极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	54
--	----

第 2 章 导数与微分	57
2.1 导数的概念	57
2.1.1 引例	57
2.1.2 导数的定义	60
2.1.3 单侧导数	63
2.1.4 导数的几何意义	65
2.1.5 函数的可导性与连续性的关系	66
习题 2.1	67
2.2 函数的求导法则	68
2.2.1 导数的四则运算法则	68
2.2.2 反函数的求导法则	70
2.2.3 复合函数的求导法则	72
2.2.4 初等函数的求导问题	75
习题 2.2	76
2.3 高阶导数	79
2.3.1 高阶导数的概念	79
2.3.2 高阶导数的运算	81
习题 2.3	81
2.4 隐函数及由参数方程确定的函数的导数	82
2.4.1 隐函数的导数	82
2.4.2 由参数方程确定的函数的导数	87
习题 2.4	90
2.5 微分	91
2.5.1 微分的概念	91
2.5.2 基本微分公式与微分运算法则	94
2.5.3* 微分在近似计算中的应用	96
习题 2.5	98
小结	99
练习二	100
阅读材料 1 导数与微分的几个问题	102
阅读材料 2 狐兔模型与导数	104

第3章 中值定理与导数的应用	107
3.1 中值定理	107
3.1.1 罗尔定理	107
3.1.2 拉格朗日中值定理	110
3.1.3 柯西中值定理	113
习题 3.1	114
3.2 洛必达法则	115
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	115
3.2.2 其他类型的未定式($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0)	119
习题 3.2	124
3.3 函数的单调性与曲线凹凸性	124
3.3.1 函数的单调性	124
3.3.2 曲线的凹凸性	128
习题 3.3	133
3.4 函数的极值与最大值、最小值	133
3.4.1 函数的极值	133
3.4.2 函数的最大值和最小值	139
习题 3.4	144
3.5 函数图形的描绘	145
3.5.1 渐近线	145
3.5.2 函数图形的描绘	147
习题 3.5	152
3.6 导数在经济学中的应用	152
3.6.1 常用经济函数	152
3.6.2 最大值和最小值在经济问题中的应用举例	155
3.6.3 导数在经济分析中的应用	156
习题 3.6	160
小结	160
练习三	163
阅读材料 1 曲线的曲率	165
阅读材料 2 $\sqrt{2}$ 的计算与牛顿切线法	169
第4章 函数的积分	172
4.1 定积分的概念与性质	172

● 高等数学(上册).....

4.1.1 定积分问题的实例	172
4.1.2 定积分的概念.....	174
4.1.3 定积分的性质.....	176
习题 4.1	178
4.2 微积分基本定理	178
4.2.1 不定积分的概念.....	178
4.2.2 积分上限的函数及其导数	178
4.2.3 原函数	181
4.2.4 牛顿-莱布尼茨公式	182
习题 4.2	184
4.3 不定积分	185
4.3.1 不定积分的概念.....	185
4.3.2 不定积分的性质.....	186
4.3.3 基本积分公式.....	186
4.3.4 直接积分法	187
习题 4.3	189
4.4 基本积分法(一)——换元积分法	189
4.4.1 第一类换元积分法	190
4.4.2 第二类换元积分法	196
4.4.3 定积分的换元法.....	200
习题 4.4	203
4.5 基本积分法(二)——分部积分法	204
4.5.1 不定积分的分部积分法	204
4.5.2 定积分的分部积分法	208
习题 4.5	212
4.6 广义积分	212
4.6.1 无穷限的广义积分的定义	213
4.6.2 无穷限的广义积分的计算	215
习题 4.6	216
小结.....	217
练习四.....	220
阅读材料 1 两种特殊类型的函数的积分	222
阅读材料 2 定积分的数值积分法	226

第 5 章 定积分的应用	229
5.1 定积分的微元法	229
5.2 定积分在几何上的应用	231
5.2.1 平面图形的面积	231
5.2.2 体积计算	237
5.2.3 平面曲线的弧长	243
习题 5.2	246
5.3 定积分在经济分析中的应用	247
5.3.1 由边际函数求原经济函数	247
5.3.2 由边际函数求最优问题	251
5.3.3 积分在其他经济问题中的应用	252
习题 5.3	254
5.4 定积分在物理上的应用	255
5.4.1 变力沿直线所做的功	255
5.4.2 液体的静压力	257
5.4.3 引力	258
5.4.4 矩与质心	259
习题 5.4	261
小结	262
练习五	265
阅读材料 1 平均值	267
阅读材料 2 洛伦兹曲线与基尼系数	269
阅读材料 3 悬链线	270
参考答案	274

第 1 章

函数、极限与连续

函数的功能就是人类的思维

函数的概念不但在数学、物理等诸多学科中得到了应用,还渗透到了人们的日常生活之中.的确,存在着许多由简单的函数所表示出来的事物与现象.如心脏形状可用函数 $r = a \cos n\theta$ 表示;鸚鵡螺外壳呈现的美丽螺线可用函数 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 表示;高塔之间的电线受重力和张力的作用下形成的“悬链线”可用函数 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 表示;真空中飞行体的轨迹形成的“抛物线”可用一元二次多项式函数表示.再如大自然中,每隔 76.02 年绕太阳一周的哈雷彗星轨道可表示为椭圆函数(隐函数),而无法回归地球的彗星可沿“抛物线”(显函数)或“双曲函数”(隐函数)轨道离开地球.复杂的人声和乐器声均可视为纯音合成的波形,它们可用函数表示为无限个正弦和余弦函数的迭加,也就是我们常说的傅里叶级数展开……

其实,还有许许多多,你能发现身边的函数吗?

函数是将实际问题数学化的基本工具,它是学习微积分的基础.极限概念是微积分的理论基础.微积分中的许多概念(如连续、导数、定积分、级数的收敛与发散等概念)都离不开极限.同时,极限方法是微积分的基本分析方法,也是微积分与初等数学的本质区别所在.用极限方法可以解决许多初等数学无法解决的问题(如求瞬时速度、曲线弧长、平面曲边图形面积、空间立体体积等问题).因此,掌握并运用好极限方法是学好微积分的关键.而连续是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法,为今后的学习打下必要的基础.

1.1 函 数

函数是现代数学中最基本的概念之一,是学习微积分学的基础.本节将介绍函数、反函数及复合函数的基本概念.同时,本节还将考察微积分学中主要涉及的一些基本函数类型,如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等,以及在工程中经常碰到的几类分段函数.

1.1.1 实数与实数集合

1. 几类常用数集

无论是在初等数学还是在高等数学中,实数都扮演着非常重要的角色.那么什么是实数?实数又是如何产生的呢?为了回答这个问题,我们从最简单的自然数1, 2, 3, ...说起.自然数是人类大脑对客观事物进行抽象思维的产物.利用自然数,人类可以计数,如多少头野兽,多少本书,多少个人等.自然数(natural number)的全体构成**自然数集**,本书用大写字母 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,即

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

如果在自然数集中引入新的元素0, -1, -2, -3, ...,即将零和自然数的负数加进来,则得到全体整数..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... 整数的全体构成**整数集**,本书用大写字母 $\mathbf{Z}$ (源于德语单词 zahlen)表示,即

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

如果我们度量长度、重量、体积等,仅仅用整数是不够用的,由此产生了有理数.有理数可简单地理解为整数的商(其中分母不为零).我们知道,任何两个整数相加、相减或相乘,所得的结果仍然是整数(数学上称之为整数对加法、减法和乘法运算封闭),然而,当两个整数作商运算时,其结果不一定是整数.由此便产生了分数.古埃及人大约在公元前17世纪已开始使用分数,中国《九章算术》中也有有关分数的各种运算.有理数(rational number)的全体构成**有理数集**,本书用大写字母 $\mathbf{Q}$ (商的英文单词 quotient 的首写字母)表示.为了便于理解有理数集的表示法,先考察下面几个整数的商的表示形式:

$$\frac{-3}{-1} = \frac{3}{1}, \quad \frac{3}{-1} = \frac{-3}{1}, \quad \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

由此可见,任何有理数都可以表示为互质的整数与自然数的商.因此,有理数集可定义为

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, (p, q) = 1 \right\}.$$

其中,记号 $p \in \mathbf{Z}$ 表示 p 是集合 $\mathbf{Z}$ 中的元素, $(p, q) = 1$ 表示 p 和 q 的最大公约数是1,也称 p 和 q 互质.易知有理数集对于四则运算均封闭(由此称有理数集为一个**数域**).在十进制中,有理数可用有限小数或无限循环小数表示.

有理数是否足以度量所有的长度呢?回答是否定的.这个事实早在公元前5世纪就由古希腊人发现了.当时,毕达哥拉斯学派的一个名叫希帕索斯的学生发现,边长为1的正方形的对角线的长度 $\sqrt{2}$ 不是有理数.事实上,若 $\sqrt{2}$ 是有理数,则存

在两个互质的自然数 p, q , 使得 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, 即 $p \times p = p^2 = 2q^2$. 因此, 2 是 p 的约数, 即存在自然数 k , 使得 $p = 2k$, 故而 $q \times q = q^2 = 2k^2$, 也即 2 也是 q 的约数. 因此, 2 是 p 和 q 的一个公约数, 这与 p, q 互质矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 在数学的发展过程中, 更多的非有理数不断被发现, 如 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ 等. 在十进制中, 这些数都是无限不循环小数, 称这些数为无理数. 有理数和无理数统称为实数. 实数 (real number) 的全体构成实数集, 本书用大写字母 $\mathbf{R}$ 表示. 和有理数集一样, 实数集对于四则运算也封闭, 即实数集也构成一个数域.

显然, 上述集合有下列包含关系: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$, 其中 $\subseteq$ 表示包含关系, 即 $A \subseteq B$ 表示集合 A 中的元素全部在集合 B 中.

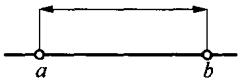
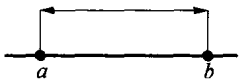
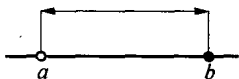
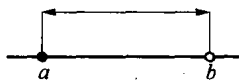
如果在一条直线 (通常画成水平直线) 上确定一点 O 作为原点, 指定一个方向为正向 (通常把指向右方的方向规定为正向), 并规定一个单位长度, 则称此直线为**数轴**. 任意一个实数 x 都对应数轴上唯一的一点 P (如果 $x > 0$, 则点 P 在原点右侧; 如果 $x < 0$, 则点 P 在原点左侧), 使得 $|OP| = |x|$, 其中 $|OP|$ 表示点 O 和 P 之间的距离; 反之, 以同样的方式, 数轴上的每一点 P 也唯一地对应一个实数 x . 于是, 实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点一一对应. 因此, 人们常把“实数 a ”等同于“数轴上的点 a ”.

2. 区间和邻域

在实数域中, 区间和邻域是经常用到的子集.

在描述连续变量的变化范围时, 常常用区间表示. 在数轴上, 区间表示介于某两点之间的线段上点的全体. 表 1-1 给出了有限区间的所有类型.

表 1-1 有限区间及其表示 ($a < b$)

区间名称	区间记号	区间所表示的集合	区间在数轴上的表示
开区间	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
闭区间	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
半开区间 (左开右闭)	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
半开区间 (左闭右开)	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	

除以上有限区间外, 还有下面无限区间:

$$\begin{aligned}
 [a, +\infty) &= \{x \mid a \leq x < +\infty\}, & (-\infty, b] &= \{x \mid -\infty < x \leq b\}, \\
 (a, +\infty) &= \{x \mid a < x < +\infty\}, & (-\infty, b) &= \{x \mid -\infty < x < b\}
 \end{aligned}$$

及

$$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

在描述某点附近变量的变化趋势时,我们还常常用到邻域的概念. 设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 如下关于点 x_0 的对称开区间

$$N(x_0, \delta) \triangleq (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域. 在数轴上, 该邻域表示以 x_0 为中心, δ 为半径的线段上点的集合(如图 1.1 所示). 易知当 $\delta_1 \leq \delta_2$ 时, 包含关系 $N(x_0, \delta_1) \subseteq N(x_0, \delta_2)$ 成立.

显然, 点 x_0 的 δ 邻域也可表示为

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

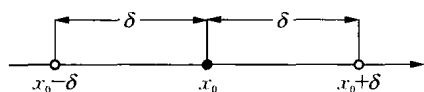


图 1.1 x_0 的 δ 邻域

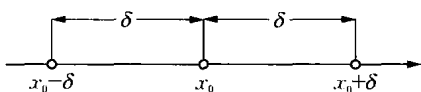


图 1.2 x_0 的去心 δ 邻域

在集合 $N(x_0, \delta)$ 中去掉中心点 x_0 , 则得到点 x_0 的去心 δ 邻域(如图 1.2 所示):

$$\begin{aligned} \dot{N}(x_0, \delta) &\triangleq (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \\ &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ 且 } x \neq x_0\} \\ &= \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}. \end{aligned}$$

类似地, 区间

$$(x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

称为 x_0 的右 δ 邻域, 区间

$$(x_0 - \delta, x_0) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\}$$

称为 x_0 的左 δ 邻域.

1.1.2 函数及其图形

1. 函数的概念

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于任意 $x \in D$, 变量 x 按照一定法则总有唯一确定数值 y 和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in D$.

在定义 1.1 中,称 x 为自变量, y 为因变量,因变量 y 与自变量 x 的对应关系为函数关系. 此外,称数集 D 为函数 $y = f(x)$ 的定义域,通常也记为 D_f ,即 $D_f = D$. 当 x 取遍 D 中所有的元素时, $f(x)$ 的所有值构成的集合称为函数的值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$. 对于任意给定的 $x_0 \in D$,称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

通常,函数可用公式表达. 例如,设圆的半径为 r ,则该圆的面积可表示为 $S = \pi r^2$. 换句话说,面积 S 是半径 r 的函数. 显然,根据实际意义(半径只能取正值),该函数的定义域为 $D_f = \{x \mid x > 0\}$. 在本书中,如无特别说明,函数的定义域是指它的自然定义域,也即当函数用公式表达时,使得公式有意义的所有 x 的取值构成的集合. 在这个意义上,函数 $S = \pi r^2$ 的(自然)定义域是 $\mathbf{R}$.

例 1.1 求函数 $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域.

解 要使函数 $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 有意义,自变量必须满足 $\frac{1+x}{1-x} > 0$, 即

$$\begin{cases} 1+x > 0, \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1+x < 0, \\ 1-x < 0. \end{cases}$$

解之得 $-1 < x < 1$. 所以函数的定义域为

$$D_f = \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

2. 函数的图形

设函数 f 的定义域为 D ,则它的图形是在笛卡儿坐标平面内,由以 $(x, f(x))$ 为坐标的点的全体构成的集合,即集合 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$.

例 1.2 函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 称为绝对值函数,试画出该函数的图形.

解 显然,绝对值函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $R_f = [0, +\infty)$,它的图形如图 1.3 所示.

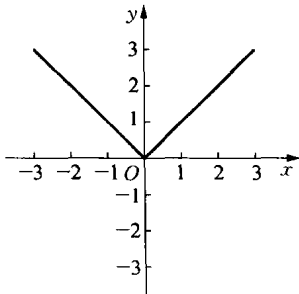


图 1.3 函数 $y = |x|$ 的图形

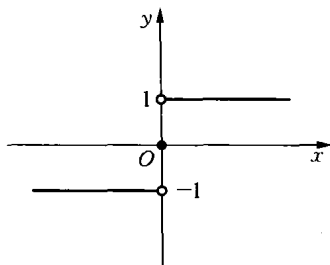


图 1.4 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 的图形

例 1.3 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 试画出该函数的图形.

解 显然, 该符号函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域由三个点组成, 即 $R_f = \{-1, 0, 1\}$. 它的图形如图 1.4 所示.

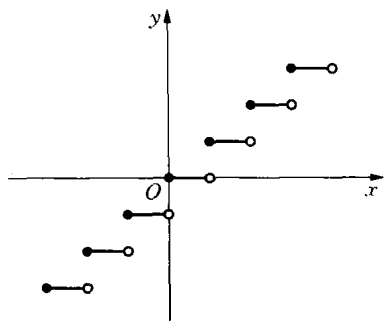


图 1.5 取整函数 $y = [x]$ 的图形

例 1.4 设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 例如, $[2.9] = 2$, $[1.3] = 1$, $[0] = 0$, $[2] = 2$, $[-2.9] = -3$, $[-1.3] = -2$. 它的图形如图 1.5 所示.

上面几个例子中的函数在工程中有着广泛的应用. 在这些例子中, 函数对于其定义域内的不同自变量的取值, 具有不同的解析表达式. 称这样的函数为分段函数.

例 1.5 已知分段函数 $\varphi(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 令 $u = x+1$, 则 $x = u-1$. 因此,

$$\varphi(u) = \begin{cases} (u-1)^2, & 0 \leq u-1 \leq 1, \\ 2(u-1), & 1 < u-1 \leq 2, \end{cases}$$

即

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

因此, 函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[1, 2] \cup (2, 3] = [1, 3]$.

3. 函数的几种特性

(1) 有界性. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在一个正数 M , 使得对于所有的 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数. 此时, 在 X 上函数的图形介于两直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间 (如图 1.6 所示). 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

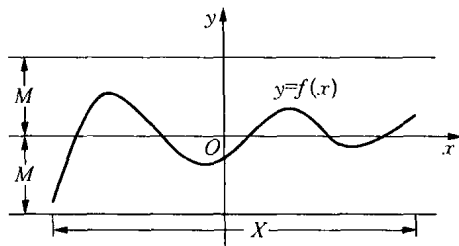
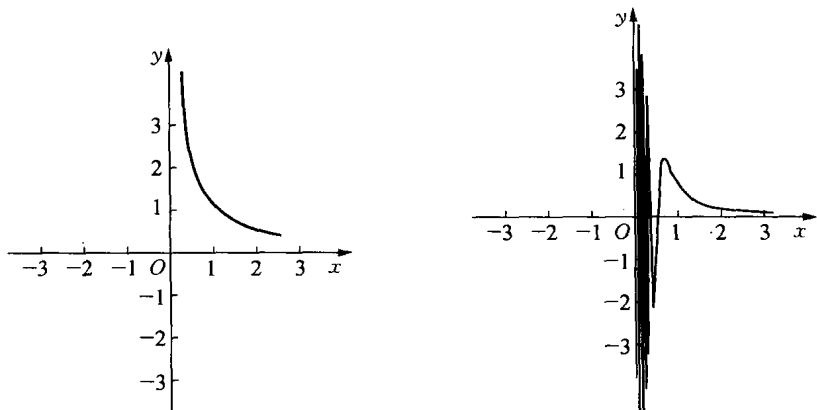


图 1.6 函数的有界性

例如, 如图 1.7(a) 所示, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界, 但对于任意正实数

$\varepsilon < 1$, 该函数在区间 $(\varepsilon, 1)$ 上有界. 又如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, \pi)$ 上无界 (如图 1.7(b) 所示).



(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界 (b) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ 在区间 $(0, \pi)$ 内无界

图 1.7 函数的无界性

值得一提的是, 对于定义在 X 上的无界函数, 它在 X 上每一点处的函数值仍然是一个有界值. 此外, 函数在闭区间上也可能是无界的. 例如, 下面函数在区间 $[-1, 1]$ 上无界 (如图 1.8 所示):

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

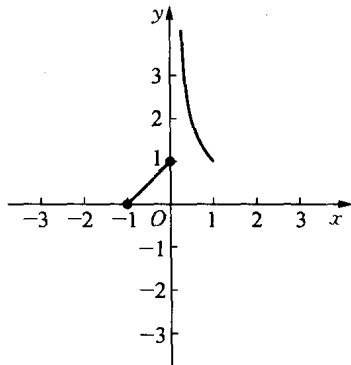


图 1.8 闭区间上无界的函数

与函数的有界性类似, 还可以给出函数有上界或有下界的定义. 作为例子, 图 1.8 中的函数虽然在区间 $[-1, 1]$ 上无界, 但有下界. 有兴趣的读者可据此写出相关的定义.

(2) 单调性. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 任取两点 $x_1 \in I$, $x_2 \in I$. 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增; 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递减. 在区间 I 上单调递增或单调递减的函数都称为在区间 I 上的单调函数.

从图形上看, 单调递增函数的图形左低右高, 而单调递减函数的图形左高右低

(如图 1.9 所示).

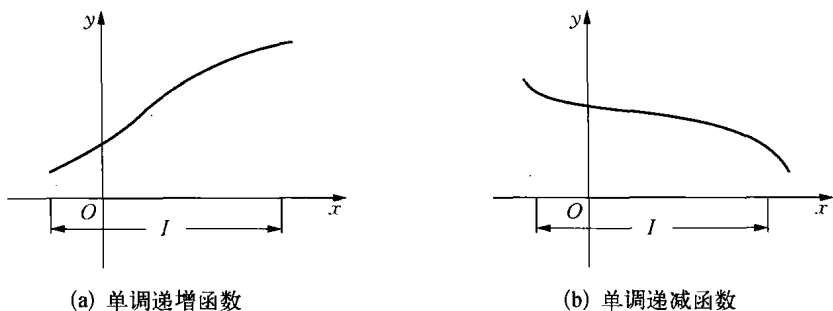


图 1.9 函数的单调性

例 1.6 证明函数 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调递增的函数.

证明 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 并满足 $x_1 < x_2$. 经计算得

$$\begin{aligned}
 f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 + \ln x_2) - (x_1 + \ln x_1) \\
 &= (x_2 - x_1) + (\ln x_2 - \ln x_1) \\
 &= (x_2 - x_1) + \ln \frac{x_2}{x_1}.
 \end{aligned}$$

由于 $0 < x_1 < x_2$, $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 故 $\ln \frac{x_2}{x_1} > 0$. 因此, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$. 所以, 函数 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(3) 奇偶性. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$ 关于原点对称. 若对于任何 $x \in I$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的偶函数; 若对于任何 $x \in I$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的奇函数.

如图 1.10 所示, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 而奇函数的图形关于原点对称.

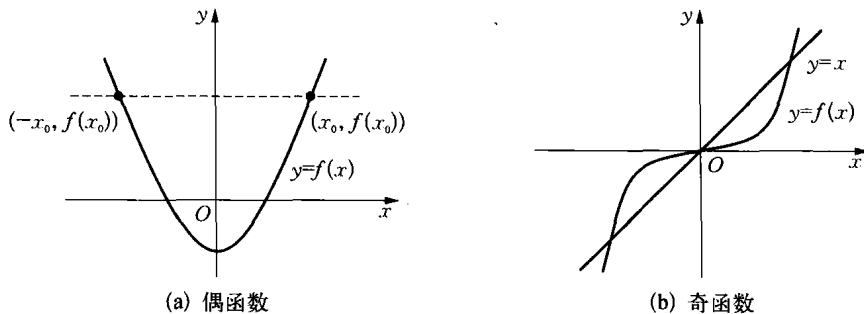


图 1.10 函数的奇偶性