数

0年代国际中学生数学竞赛试题详解

湖南教育出版社

80年代国际中学生数学竞赛试题详解

石华　卫成编

湖南教育出版社

80年代国际中学生数学竞赛试题详解
石 华 卫 成 编
责任编辑：阳 文

湖南教育出版社出版发行 （长沙展览馆路3号）
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：3.75 字数：90,000
1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷
印数：1—12,700

ISBN 7—5355—1087—6/G·1118

定 价：1.30元

编 者 的 话

在20世纪80年代的最后一年，我国中学生代表队在第30届国际中学生数学竞赛(*IMO*)中一举夺得了团体总分第一名。在90年代的第一年，又将在我国举办第31届国际中学生数学竞赛。在这双喜临门，继往开来的日子里，我们编辑了这本小册子，作为我们的《数学竞赛》丛刊的一个增辑，为关心数学竞赛的老师和同学们提供一本方便的资料。

本书收集了第22届至第30届共9届的*IMO*试题(1980年由于众所周知的原因未能举行国际数学竞赛)，每一试题都作了详细的解答。其中的半数还给出了两种不同思路的解答。限于篇幅，还有许多好的解法未能收入，并且，为了便于中学生学习理解，对某些试题我们还有意选择了符合正常思路但技巧并不算最高或者不算最简洁的解法。

在收集和解答试题的过程中，我们参阅了许多散见于各种中等数学杂志上有关同志的文章，初稿写成之后，张垚同志审读了原稿，提出了一些宝贵的意见，我们在此表示总的感谢。由于编者水平不高，难免考虑不周的错误，我们希望能得到广大读者的批评指正。

编　者

1989年12月

目　　录

第22届国际中学生数学竞赛试题及解答

（1981年7月13～14日于华盛顿）

1．P为$\triangle ABC$内一点，D、E、F分别为P到BC、CA、AB各边所引垂线的垂足，求所有使$\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$为最小的$P$点。

解一　连接PA、PB、PC。并设$\angle PBC=\alpha$，$\angle PCA=\beta$，$\angle PAB=\gamma$。则有

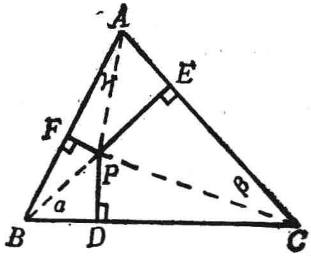
$$BD=PD\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$DC=PD\operatorname{ctg}(C-\beta),$$

从而　$$BC=PD[\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(C-\beta)]$$

所以

$$\frac{BC}{PD}=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(C-\beta)$$



第1题图

同理可得

$$\frac{AC}{PE}=\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}(A-\gamma)$$

$$\frac{AB}{PF}=\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}(B-\alpha)$$

把以上三式相加，得

$$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

$$=[\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(B-\alpha)]+[\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}(C-\beta)]+[\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}(A-\gamma)]$$

$$=\frac{\sin B}{\sin\alpha\sin(B-\alpha)}+\frac{\sin C}{\sin\beta\sin(C-\beta)}+\frac{\sin A}{\sin\gamma\sin(A-\gamma)}$$

$$=\frac{2\sin B}{\cos(2\alpha-B)-\cos B}+\frac{2\sin C}{\cos(2\beta-C)-\cos C}$$

$$+\frac{2\sin A}{\cos(2\gamma-A)-\cos A}$$

上式中的$\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$, $\sin A$, $\cos A$均为定值，要和式$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$最小，只要令$\cos(2\alpha-B)$、$\cos(2\beta-C)$、$\cos(2\gamma-A)$都取最大值即可。显然，当$\alpha=\frac{B}{2}$，$\beta=\frac{C}{2}$，$\gamma=\frac{A}{2}$时，$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$取最小值。此时$P$点唯一确定，即$\triangle ABC$的内心。

解二 令$\triangle ABC$的周长与面积分别为l与s，因为

$$BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF=2s$$

根据柯西不等式，有

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)$$

$$\geqslant(BC+CA+AB)^2=l^2.$$

从而

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{l^2}{2s}\text{（定值）}.$$

上式中等号当且仅当$PD=PE=PF$时成立，即当P点为$\triangle ABC$的内心时，$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$取得最小值。

2.设$1\leqslant r\leqslant n$，考虑集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有r元子集及每一个这样的子集中最小的数，用$F(n, r)$表示这些最小数的算术平均数。

证明 $F(n, r)=\frac{n+1}{r+1}$

证一 集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的含r个元素的子集有C_n^r个，其中

最小数为k的子集有C_{n-k}^{r-1}个（$k=1, 2, \cdots, n-r+1$）。所以有

$$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}=C_n^r \tag{1}$$

这些子集中最小数的和为

$$S=C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+\cdots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1} \tag{2}$$

利用(1)式，可推得

$$\begin{aligned}
S=&(C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+C_{n-3}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1})\\
&+(C_{n-2}^{r-1}+C_{n-3}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1})\\
&+(C_{n-3}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1})\\
&+\cdots\cdots\\
&+C_{r-1}^{r-1}\\
=&C_n^r+C_{n-1}^r+\cdots+C_r^r\\
=&C_{n+1}^{r+1}.
\end{aligned}$$

所以

$$F(n,r)=\frac{S}{C_n^r}=\frac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r}=\frac{n+1}{r+1}.$$

证二 集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的r元子集共有C_n^r个，这些子集的最小数之和为$S=C_n^rF(n,r)$。

考虑另一集合$M=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$，它共有$n+1$个元素，从M中取一个$(r+1)$元子集，去掉其中的最小元素便得到集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个r元子集。这样便定义了一个由M的所有$(r+1)$元子集到$\{1, 2, \cdots, n\}$的r元子集之间的一个映射。

设A是$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个r元子集，如果它的最小元素为a，那么M的a个$(r+1)$元子集：

$$\{0\}\cup A,\ \{1\}\cup A,\ \cdots,\ \{a-1\}\cup A$$

在此映射下的像为A。这就是说，a恰好等于上述$(r+1)$元子集的个数。因此，集$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有r元子集的最小数之和S恰好等于M的一切$(r+1)$元子集的个数，即

$$C_n^rF(n,r)=C_{n+1}^{r+1}.$$

所以

$$F(n,r)=C_{n+1}^{r+1}/C_n^r=\frac{n+1}{r+1}.$$

3. 确定m^2+n^2的最大值。其中m，n为整数，且m，$n\in\{1, 2, \cdots, 1981\}$，$(n^2-nm-m^2)^2=1$。

解 设(m, n)是满足条件$(n^2-nm-m^2)^2=1$的一对自然数，则必有下述结论成立：

(1) 若$m=n$，则$m=n=1$；若$m\neq n$，则有$n>m$。

(2) 若$n>m$，则$[(m+n)^2-(m+n)n-n^2]^2=1$且$[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2=1$。

事实上，因$n^2-nm-m^2=\pm1$，或$n^2=m^2+nm\pm1$，因n,m均为自然数，故必$n^2\geqslant m^2$，等号当且仅当$n=m=1$时才能成立。即(1) 成立。

又$(n^2-mn-m^2)^2=(m^2+mn-n^2)^2=[(m+n)^2-mn-2n^2]^2=[(m+n)^2-(m+n)n-n^2]^2=1$，且$(n^2-mn-m^2)=(m^2+mn-n^2)^2=[2m^2-nm-(m-n)^2]^2=[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2=1$，故(2) 成立。

因此，若从$(m, n)=(1, 1)$出发，利用(2)中第一式可推出斐波纳奇数列（$u_1=u_2=1$，$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$）：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ u_k,\ u_{k+1},\ \cdots$$

中任何两个相邻的项u_k，u_{k+1}都满足条件：

$$({u_{k+1}}^2-u_{k+1}u_k-{u_k}^2)^2=1.$$

反过来，任何满足条件$(n^2-nm-m^2)^2=1$的自然数对(m, n)，若$(m, n)\neq(1, 1)$，则根据(2)中第二式，$(n-m, m)$也满足条件。若$(n-m, m)\neq(1, 1)$，则再利用(2)式，$(m-(n-m), n-m)$也满足上述条件，依此类推。由于这个过程是有限的，进行有限步后必得到$(1,1)$。逆其过程，即知m,n必是费波纳奇数列中相邻的两项。

在$\{1, 2, \cdots, 1981\}$中的费波纳奇数有1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597。取其中

最大的相邻两项为m，n，得m^2+n^2的最大值为：

$$m^2+n^2=987^2+1597^2=3524578.$$

4．(a) 对于什么样的$n>2$的整数，有一个由n个连续的正整数组成的集合，集合中最大的一个数是其余的$n-1$个数的最小公倍数的约数。

(b) 对于什么样的$n>2$的整数，仅有一个 集 合 具 有上述性质。

解一 考虑n个连续正整数 的 集合：$\{k+1, k+2, \cdots, k+(n-1), k+n\}$。记$k+1, k+2, \cdots, k+n$的最大公约数与最小公倍数分别为 $(k+1, k+2, \cdots, k+n)$ 和$[k+1, k+2, \cdots, k+n]$。则有

$$\begin{aligned}&([k+1, k+2, \cdots, k+n-1], k+n)\\ =&[(k+1, k+n), (k+2, k+n), \cdots, (k+(n-1), k+n)]\\ =&[(n-1, k+n), (n-2, k+n), \cdots, (1, k+n)]\\ =&([n-1, n-2, \cdots, 2, 1], k+n)\end{aligned}$$

所以

$$(k+n)\mid[k+1, k+2, \cdots, k+(n-1)] \qquad (1)$$

的充要条件是

$$(k+n)\mid[1, 2, \cdots, n-1] \qquad (2)$$

验证(2) 式成立的情况。

(1) 当$n=3$，$(k+3)\nmid[1, 2]=2$，(2) 式不成立。

(2) 当$n=4$，$(k+4)\mid[1, 2, 3]=6$，当且仅当$k=2$时成立。

(3) 当$n\geqslant5$，因为$(n-1, n-2)=1$，$(n-2, n-3)=1$，故必

$$(n-1)(n-2)\mid[1, 2, \cdots, n-1]$$

$$(n-2)(n-3)\mid[1, 2, \cdots, n-1]$$

令

$$k+n=(n-1)(n-2),\ 得k_1=n(n-4)+2>0,$$

$$k+n=(n-2)(n-3),\ 得k_2=(n-3)^2-3>0.$$

所以，当$n\geqslant5$时，至少有两个以上的集合满足题设的条件并且当$n=5$时，恰有二解，$k=1$和$k=3$。

解二 设n个连续正整数的集合为$\{k+1, k+2, \cdots, k+n\}$。

先证当$n=3$时，本题无解。事实上，因$[k+1, k+2]=(k+1)(k+2)=k^2+3k+2$，若$k+3\mid[k+1, k+2]$，则$k+3\mid2$。与$k$为正整数矛盾。

考虑$n>3$的情形。

(1) 若n为偶数$n=2m$ ($m\geqslant2$)，取n个连续正整数的集合：

$$A=\{n-1, n, n+1, \cdots, 2n-2\}$$

即合所求。

因$2n-2=2(n-1)$，$n-1$为奇数，$2\nmid(n-1)$，$2\mid n$。故必$(2n-2)\mid[n-1, n, n+1, \cdots, 2n-3]$。

(2) 若n为奇数$n=2m+1$ ($m\geqslant2$)，根据(1)对偶数$n-1$取$n-1$个连续正整数的集合：

$$A'=\{n-2, n-1, n, \cdots, 2n-4\}$$

则 $$2n-4\mid[n-2, n-1, n, \cdots, 2n-4]$$

在A'中加上一个$n-3$，得集合

$$B=\{n-3, n-2, n-1, n, \cdots, 2n-4\}$$

则n个连续正整数的集合B即合所求。

现在来讨论问题 (b)：

(1) 当$n=4$时，由$(k+4)\mid[k+1, k+2, k+3]$推出$(k+4)\mid(k+1)(k+2)(k+3)=(k+4)(k^2+2k+3)-6$，得$k+4\mid6$，从而$k=2$，故只有唯一的适合题设条件的集合$\{3, 4, 5, 6\}$。

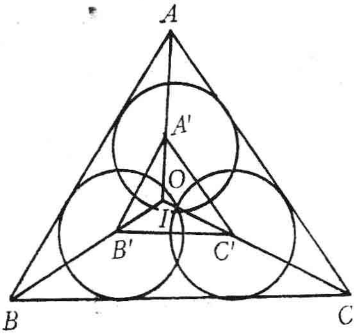
(2) 当$n=5$时，集合$A_1=\{2, 3, 4, 5, 6\}$和$A_2=\{8, 9, 10, 11, 12\}$都适合题设条件。

(3) 当$n>5$时，若$n=2m$为偶数，可取$A_1=\{n-1, n, \cdots, 2n-2\}$或$A_2=\{n-5, n-4, \cdots, 2n-6\}$都合所求。

若$n=2m+1$为奇数，则可取$B_1=\{n-3,\ n-2,\ \cdots,\ 2n-4\}$或$B_2=\{n-5,\ n-4,\ \cdots,\ 2n-6\}$都合所求。

故当$n\geqslant 5$时，都至少有两个集合适合题设条件。

5．三个全等的圆有一公共点O，并且都在一个已知三角形内。每一个圆与三角形的两边相切。证明：这个三角形的内心、外心和O三点共线。



第5题图

证 如图，因为$\odot B'$和$\odot C'$都与BC相切，故B'、C'到BC的距离相等，即$B'C'\parallel BC$。同理可证$C'A'\parallel CA$，$A'B'\parallel AB$。所以

$$\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$$

因为$\odot A'$与AB、AC相切，故AA'平分$\angle A$。同理BB'平分$\angle B$，CC'平分$\angle C$。因此AA'、BB'、CC'相交于$\triangle ABC$的内心I。

故I为$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的位似中心。

从而$\triangle ABC$的外心K、$\triangle A'B'C'$的外心K'也与位似中心I共线。

因$OA'=OB'=OC'$，故O即为$\triangle A'B'C'$的外心K'。所以，$\triangle ABC$的外心K，内心I与O共线。

6．函数$f(x,y)$对所有的非负整数x，y，满足：

(1)$f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,\ 1)$,

(3)$f(x+1,\ y+1)=f(x,\ f(x+1,\ y))$。

试确定$f(4,\ 1981)$。

解 $f(1,0)\overset{(2)}{=}f(0,1)\overset{(1)}{=}1+1=2 \qquad (4)$

设$f(1,\ k)$为非负整数，则$f(1,k+1)\overset{(3)}{=}f(0,f(1,k))\overset{(1)}{=}f(1+k)+1$为非负整数，故对非负整数$y$，$f(1,y)$为非 负整数。同理可证$f(2,y)$、$f(3,y)$，$f(4,y)$ 均为非负整数

$$\begin{aligned}f(1,y)&\overset{(3)}{=}f(0,f(1,\ y-1))\overset{(1)}{=}f(1,y-1)+1\\&=f(1,\ y-2)+2\\&=\cdots\cdots\\&=f(1,\ 0)+y\overset{(4)}{=}y+2\end{aligned}\qquad(5)$$

$$f(2,0)\overset{(2)}{=}f(1,1)\overset{(5)}{=}1+2=3\qquad(6)$$

$$\begin{aligned}f(2,y)&\overset{(3)}{=}f(1,f(2,y-1))\overset{(5)}{=}f(2,y-1)+2\\&=f(2,y-2)+4\\&=\cdots\cdots\\&=f(2,0)+2y\overset{(6)}{=}3+2y\end{aligned}\qquad(7)$$

$$f(3,0)\overset{(2)}{=}f(2,1)\overset{(7)}{=}3+2\times1=5\qquad(8)$$

$$\begin{aligned}f(3,y)&\overset{(3)}{=}f(2,\ f(3,\ y-1))\overset{(7)}{=}3+2f(3,y-1)\\&=3+3\cdot2+2^2f(3,y-2)\\&=\cdots\cdots\\&=3+3\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+3\cdot2^{y-1}+2^yf(3,0)\\&\overset{(8)}{=}3(2^y-1)+5\cdot2^y=2^{y+3}-3\end{aligned}\qquad(9)$$

$$f(4,0) \overset{(2)}{=} f(3,1) \overset{(9)}{=} 2^{1+3}-3=13 \tag{10}$$

$$f(4,y) \overset{(2)}{=} f(3,f(4,y-1)) \overset{(9)}{=} 2^{3+f(4,y-1)}-3$$

$$=2^{2^{3+f(4,y-2)}}-3=\cdots\cdots$$

$$=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3 \quad (y+3\text{个}2) \tag{11}$$

所以

$$f(4,1981)=-3+2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}(1984\text{个}2).$$

第23届国际中学生数学竞赛试题及解答

（1982年7月9日～10日于布达佩斯）

1. 设$f(n)$是定义在所有正整数n上并取非负整数值的函数，并且满足：对于所有的m和n，

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0\text{或}1$$

又已知$f(2)=0$，$f(3)>0$，以及$f(9999)=3333$，求$f(1982)$。

解 记$\delta=0$或1，则由

$$f(2)-f(1)-f(1)=0-2f(1)=\delta\geqslant 0$$

因$f(1)$为非负数，故$f(1)=0$。

$$f(3)=f(2)+f(1)+\delta=\delta$$

因$f(3)>0$，故$f(3)=1$。

又对一切自然数n，有

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+\delta=f(n)+\delta\geqslant f(n)$$

故$f(n)$对一切自然数n为非减函数。

设$n=3k$是不大于9999的自然数，则

$$\begin{aligned}f(n)=f(3k)&\geqslant f(3k-3)+f(3)\\&\geqslant f(3k-6)+2f(3)\\&\geqslant\cdots\cdots\\&\geqslant f(3)+(k-1)f(3)=kf(3)=k.\end{aligned}$$

另一方面，若上式中不等号成立，即$f(3k)>k$，则

$$\begin{aligned}f(9999)&\geqslant f(3k)+f(9999-3k)\\&=f(3k)+f[3(3333-k)]\\&>k+(3333-k)=3333.\end{aligned}$$

与题设条件$f(9999)=3333$矛盾。故$f(3k)=k$。

由于　$3\times660<1982<3\times661$

所以　$f(3\times660)\leqslant f(1982)\leqslant f(3\times661)$

即有　　$660\leqslant f(1982)\leqslant661$

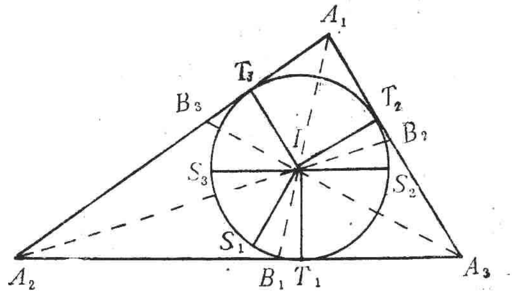
若$f(1982)=661$，则由

$$
\begin{aligned}
f(9999)&=f(5\times1982+89)\\
&\geqslant5f(1982)+f(89)\\
&\geqslant5\times661+f(3\times29)\\
&=3305+29=3334
\end{aligned}
$$

与题设矛盾，所以$f(1982)=660$。

2．设$A_1A_2A_3$为一个给定的不等边三角形，其三边为a_1，a_2，a_3（a_i为与A_i相对的边），对于$i=1$，2，3，设M_i是边a_i的中点，T_i是三角形的内切圆与边a_i相切的切点，又T_i在A_i的内角平分线内的反射点是S_i。求证：直线M_1S_1，M_2S_2，和M_3S_3共点。

证　如图，设三内角平分线为A_1B_1、A_2B_2和A_3B_3。则显然S_1、S_2、S_3都在$\triangle A_1A_2A_3$的内切圆上。于是



第2题图

$$\angle T_3IT_1=\pi-A_2,$$

$$\angle T_3B_3A_3=A_2+\frac{1}{2}A_3,$$

$$\angle T_3IB_3=\frac{\pi}{2}-\left(A_2+\frac{1}{2}A_3\right),$$

$$\angle T_3IS_3 = 2\angle T_3IB_3 = \pi - (2A_2 + A_3),$$
$$\angle S_3IT_1 = \angle T_3IT_1 - \angle T_3IS_3 = A_2 + A_3.$$

同理可得

$$\angle S_2IT_1 = A_2 + A_3$$

因此IT_1是$\angle S_2IS_3$的平分线，因而$IT_1 \perp S_2S_3$，但$IT_1 \perp A_2A_3$，所以$S_2S_3 \parallel A_2A_3$。同理可证，$S_1S_3 \parallel A_1A_3$，$S_1S_2 \parallel A_1A_2$。

因为M_1、M_2、M_3为三边中点，故$M_2M_3 \parallel A_2A_3$，$M_1M_3 \parallel A_1A_3$，$M_1M_2 \parallel A_1A_2$。即$\triangle M_1M_2M_3$与$\triangle S_1S_2S_3$的对应边相互平行，但不全等(因外接圆不等)。所以，$\triangle S_1S_2S_3$与$\triangle M_1M_2M_3$为位似图形，其对应顶点的连线S_1M_1、S_2M_2、S_3M_3必通过它们的位似中心。

3. 考虑具有下述性质的正实数无穷序列$\{x_n\}$

$x_0 = 1$；对于所有$i \geqslant 0$，$x_{i+1} \leqslant x_i$。

1)证明：对于所有这样的序列，存在一个$n \geqslant 1$，使得

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3.999.$$

2)求这样的序列，对所有的n，满足

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

解一 1)分两种情况讨论：

(a) 若$\{x_n\}$不以0为极限，必存在某一正数$\delta > 0$，使得对所有的i，$x_i \geqslant \delta$。于是

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant \frac{\delta^2}{x_{i+1}} \geqslant \delta^2$$

只要取n，使$n\delta^2 \geqslant 3.999$即可。

(b) 若$x_n \to 0$，因为

$$(x_i - 2x_{i+1})^2 = x_i^2 - 4x_ix_{i+1} + 4x_{i+1}^2 \geqslant 0$$

所以$\dfrac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant 4(x_i - x_{i+1})$，