

# 工程塑性力学

庄懋年 马晓士 蒋潞 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

# 工程塑性力学

庄懋年 马晓士 蒋 潞 编

高等教育出版社

本书是一本比较简明扼要的塑性力学教材。全书共八章，内容包括：绪论，应力及应变状态，基本方程，简单的弹塑性问题，滑移线场理论，杆系结构的塑性分析和极限设计，极限分析定理，板的极限分析等。每章后均附有习题和参考书目，以便于读者练习和深入钻研。书后印有习题答案及选解。在附录中给出了“求和约定和张量概念简介”。

本书可供土建、机械各专业 30-60 学时的塑性力学课程使用，亦可供有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

## 工程塑性力学

庄懋年 马晓士 蒋 璐 编

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 250,000

1983年8月第1版 1984年3月第1次印刷

印数 00,001—6,060

书号 15010·0516 定价 1.25 元

# 前 言

自弹塑性断裂力学及结构弹塑性有限元分析广泛应用于工程实际以来,塑性力学日益成为机械、动力、土建、结构等专业的学生和工程技术人员所必不可少的知识。近年来,根据我们的教学体会,为了满足有关专业的学生、研究生以及工程技术人员的需要,有必要编写一本比较简明扼要的塑性力学教材,其内容要具有本门学科比较完整的概念,既可作为塑性力学入门,也能为今后进一步深入研究打下一定的基础。本书就是本着这样的目的编写的。

在本书编写过程中主要参考了1957年王仁教授在北大数学力学系使用的塑性力学讲义,以及他与熊祝华教授和黄文彬副教授所著的塑性力学专著。本书初稿经过多次教学实践和修改,可供土建、机械等有关专业塑性力学课程30~60学时使用。

为便于教学,本书内容安排力求主次分明,而将某些枝节及较为深入的问题,穿插安排于习题中;内容叙述注意引导学生进行分析和概括总结,以求培养学生科学思维能力。限于本书篇幅,对于未作深入阐述的问题则尽可能指出参考资料,以引导读者进一步独立钻研。

本书第一、二、三章是塑性理论的基础知识,是本门课程的基本内容。第四章是第三章的具体应用,其中各节有一定的独立性,教学时可与第三章穿插进行,内容可根据不同专业要求灵活取舍。第七章是理想塑性体极限分析定理及结合土建、锻压等专业的应用举例。第五章是针对锻压专业的需要而编写的,而六、八两章则可供土建专业使用。其他如化工容器、动力转盘等则在第四章及

有关习题中作了适当反映,以供选用。

所选习题大致可分为三类:一类是为后继教学内容作准备的,通过做这类习题,希望有助于启发学生学习主动性,引导思考,以期缩短讲授过程;一类是为了巩固所学的概念和理论;另一类则是偏深偏难的,可供学有余力的学生选做。其中部分适用于不同专业。书后附有答案和部分题解,可作讲课、习题课或课外阅读材料使用。

考虑到目前书籍和文献中已广泛使用张量符号,为此,编写了“求和约定和张量概念简介”作为附录印在正文之后。

熊祝华教授是本书稿的主审人,先后两次提出了很多重要的修改意见。黄文彬副教授审阅了书稿第七章。在本书编写过程中,受到王仁教授多次指导,1981年2月承他审阅过原稿,提出不少宝贵意见。徐芝纶教授、杨桂通教授给过编者热情鼓励,西安冶金建筑学院黄义副教授也曾对本书稿提出过很好意见。在此,编者表示衷心感谢。此外我校肖迈侯同志校阅了部分书稿并解算了大部分习题,锻压教研室领导和同志们对编写本书曾给予热情支持,在此也一并致谢。

由于编者学识水平所限,书中错误和不妥之处在所难免,我们热忱期望读者批评指正。

编 者

一九八三年二月于西安交通大学

# 目 录

主要字符表	1
第一章 绪论	1
§ 1-1 塑性力学的任务及与其他课程的关系	1
§ 1-2 金属材料的试验结果	2
§ 1-3 简化模型	9
§ 1-4 结构的弹塑性问题	12
习题	15
参考书	16
第二章 应力状态和应变状态	17
§ 2-1 应力张量及其分解	17
§ 2-2 等斜面(八面体面)上的应力及等效应力	20
§ 2-3 三向应力圆与 Lode 应力参数	22
§ 2-4 Haigh-Westergaard 应力空间	25
§ 2-5 应变张量及其分解	28
§ 2-6 应变率张量及应变分量的增量	33
习题	35
参考书	38
第三章 基本方程	39
§ 3-1 复杂应力状态下塑性变形的试验研究, 简单加载与复杂加载	39
§ 3-2 屈服条件(塑性条件)	41
§ 3-3 强化条件(加载条件)及加载、卸载准则	55
§ 3-4 几种简化的加载曲面(强化面)	58
§ 3-5 Drucker 公设	61
§ 3-6 增量理论(塑性流动理论)——塑性位势理论	65

§ 3-7 全量理论(塑性形变理论)·····	73
§ 3-8 岩土力学中的 Coulomb 剪破条件和流动法则·····	77
习题·····	81
参考书·····	84
<b>第四章 简单的弹塑性问题</b> ·····	<b>85</b>
§ 4-1 弹性力学中的边值问题·····	85
§ 4-2 梁的弯曲·····	88
§ 4-3 柱体扭转·····	97
§ 4-4 厚壁圆筒·····	109
§ 4-5 旋转圆盘·····	124
习题·····	129
参考书·····	132
<b>第五章 理想刚塑性平面应变问题——滑移线场理论</b> ·····	<b>134</b>
§ 5-1 引言·····	134
§ 5-2 平面应变问题的基本方程·····	135
§ 5-3 滑移线·····	138
§ 5-4 滑移线的几何性质·····	144
§ 5-5 边界条件·····	149
§ 5-6 刚性平头冲模的压入·····	154
§ 5-7 几种边值问题及数值计算方法·····	161
§ 5-8 两刚性平板之间的压缩层·····	166
§ 5-9 定常的塑性流动问题·····	173
§ 5-10 具有几何相似的不定常塑性流动问题的简介·····	178
习题·····	181
参考书·····	185
<b>第六章 杆系结构的塑性分析和极限设计</b> ·····	<b>186</b>
§ 6-1 概述·····	186
§ 6-2 塑性铰和极限载荷·····	188
§ 6-3 超静定梁和刚架的极限载荷·····	190
§ 6-4 杆系结构极限分析的上、下限定理·····	196
§ 6-5 上、下限定理的应用·····	199
§ 6-6 两个独立载荷系统作用下的交互作用图·····	208

§ 6-7 最轻结构的极限设计	211
§ 6-8 变值加载下的塑性破损与安定状态	216
§ 6-9 安定定理	224
§ 6-10 轴向力对极限弯矩的影响	230
习题	234
参考书	237
<b>第七章 极限分析定理</b>	<b>238</b>
§ 7-1 引言	238
§ 7-2 有间断场时的虚功率原理	240
§ 7-3 极限分析定理	243
§ 7-4 上限定理的应用	245
§ 7-5 下限定理的应用	254
习题	259
参考书	261
<b>第八章 板的极限分析</b>	<b>262</b>
§ 8-1 板的基本假设和基本方程	262
§ 8-2 用机动法求非圆板的极限载荷的上限	265
§ 8-3 圆板的极限分析	271
§ 8-4 正交各向异性圆板的极限载荷	277
§ 8-5 钢筋混凝土板试验	280
§ 8-6 钢筋混凝土板的屈服条件和流动法则	282
§ 8-7 Johansen 铰线理论——机动法	285
§ 8-8 静力法	292
习题	295
参考书	297
<b>习题答案及选解</b>	<b>299</b>
<b>附录 求和约定和张量概念简介</b>	<b>319</b>



# 第一章 绪 论

本章将介绍塑性力学课程的任务、建立理论的试验基础和材料性质的简化。最后通过简单结构的弹塑性问题的分析,使初学者对本课程有一概貌的了解。

## § 1-1 塑性力学的任务及与其他课程的关系

塑性力学是变形固体力学的一个分支。根据变形的特点,变形固体在受载过程中可分为两个阶段。当外力小于某一值时,在卸除外力后,固体能完全恢复原有的形状,这种能恢复的变形称为弹性变形,固体只产生弹性变形的阶段称为弹性阶段。当外力增加到超过某一限度时,物体内部有的地方的应力超过弹性极限,这时再卸除外力,则固体的变形就不能完全恢复,将遗留下一部分不能消失的残余变形,这一阶段称为塑性阶段。塑性力学的主要任务是研究变形固体在塑性阶段的应力分布和应变分布规律。具体地说,它研究下列两方面的问题:

(1) 根据试验结果,建立塑性本构关系(即应力-应变等关系),这种关系要求既能与实验较好地符合,而又便于计算。

(2) 寻求数学计算方法来求解给定的边值问题。这些问题大致可分为两类。第一类,出于机械加工工艺的需要,要求材料发生永久变形,以得到一定形状的零件,如金属压延、拉拔等。这类问题的塑性变形较大,需要研究怎样的加载方式最为有利,使能最好地发挥材料塑性变形的特性。另一类问题如机器或结构等,在受

载过程中,由于应力分布的不均匀性,虽然局部地方的应力已超过弹性极限,产生一定的塑性变形,但整个结构仍具有承载能力。这类问题需要探讨如何充分利用材料的潜力,以求最大限度提高结构的承载能力。

学习塑性力学除需要有一定的数学、物理及力学的基础外,还需要有金属物理的知识,这样才能把宏观与微观的研究结合起来。而塑性力学又是金属压力加工、结构极限设计、高温蠕变、爆炸力学、断裂力学以及弹塑性有限元等课程必不可少的基础。

本课程着重讨论金属材料的塑性性能,不考虑时间、加载速度等因素对材料力学性质的影响,所得结果可部分地应用于解决土壤、岩石、高分子化合物等的力学问题。

塑性力学从 1864 年 Tresca 在冲压和挤压试验中提出最大剪应力屈服条件以来,已有一百多年,它的发展简史可查阅有关书籍。值得指出的是,第二次世界大战以来,由于生产实际提出的种种新问题,要求进一步挖掘材料潜力,因而推动了极限设计的发展。特别是近年来计算机被广泛使用,为早已建立但难以实施的增量理论在应用于实践方面开辟了新的途径。而弹塑性有限元的迅速发展又使复杂的边值问题获得了较为满意的解决。但是,塑性力学目前仍是一门需要继续深入研究和探索的学科。

## § 1-2 金属材料的试验结果

实践是建立理论的基础。在建立塑性理论和进行结构弹塑性分析之前,必须着重研究材料在塑性阶段的力学性质和变形规律。从单向拉伸(压缩)以及薄壁管扭转试验所得到的应力-应变曲线是塑性理论最基本的试验资料。由于扭转试验所得的曲线与拉伸曲线近似,而拉伸试验容易实现,因此只介绍单向拉伸(或压缩)的某些试验结果。此外,还将介绍与塑性理论密切相关的静水压力

试验。

## (一) 简单拉伸(压缩)试验

### (1) 应力-应变曲线

通过材料力学试验, 我们已经得到具有代表性的软钢拉伸时的应力-应变曲线, 如图 1-1 所示。它反映了常温、静载下, 材料在受力过程中应力-应变关系的全貌, 显示了材料固有的力学性能。

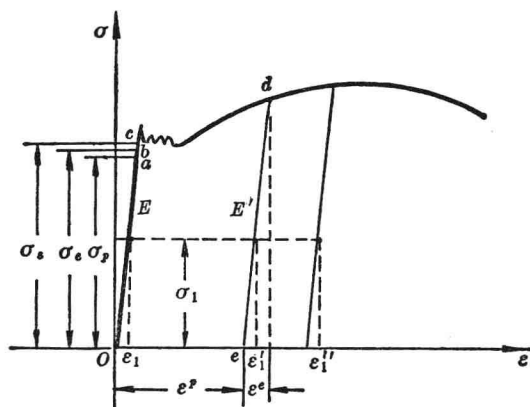


图 1-1 单向拉伸时的  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线

#### i) 初始弹性阶段

在拉伸的初始阶段, 应力和应变成正比,  $Oa$  为直线。 $a$  点所对应的应力为比例极限, 以  $\sigma_p$  表示。超过比例极限后, 应力-应变之间不再保持线性关系。但从  $a$  点到  $b$  点, 变形仍是弹性的。即卸除载荷后, 变形将完全恢复。这是弹性的基本特征。 $b$  点所对应的应力为弹性极限, 以  $\sigma_e$  表示。由于  $a$ 、 $b$  两点非常接近, 因此工程上对它们一般不严加区分。通常认为, 应力低于弹性极限时, 应力与应变成正比, 材料服从虎克定律。 $Oa$  称为初始弹性阶段。

#### ii) 屈服(流动)阶段

应力超过  $b$  点后, 将出现一个应力不变而应变显著增加的屈

服(流动)阶段。一般金属材料根据其塑性变形性能的不同可分为两类:第一类有明显的屈服阶段,如低碳钢、铸钢、某些合金钢等,它们的流动阶段是较长的,其中有的材料应变甚至可达弹性应变的10~15倍。通常称初始屈服时的应力为屈服极限,以 $\sigma_s$ 表示。退火软钢及某些铝合金有上、下屈服点。因上屈服点一般不稳定,对实验条件很敏感,故采用下屈服点所对应的应力作为 $\sigma_s$ ,如图1-1中的c点。另一类没有明显的屈服阶段,如中碳钢、某些高强度合金钢及某些有色金属等,则规定与产生0.2%的残余应变所对应的应力作为条件屈服极限,以 $\sigma_{0.2}$ 表示。

### iii) 强化阶段和加载、卸载规律

经过屈服阶段,材料又恢复了抵抗变形的能力。必须增加载荷才能继续产生变形,这种现象称为材料强化(或硬化)。如应力到达d点后卸除载荷,应力-应变关系将不按加载时的图线退回原点,而沿一条与Oa大致平行的de线变化,直到应力降为零。也就是说,卸载按弹性规律。弹性模量 $E' = E$ ,如图1-1所示。这时留下一段不能恢复的变形,这部分变形称为塑性变形。而变形的不可恢复性正是塑性的基本特征。综上所述可见,弹性和塑性的主要差别在于看它卸载后是否存在不可恢复的永久变形,而不在于它的应力-应变关系是否线性。

如果从e点开始重新加载(略去滞迴效应),应力-应变关系基本上按ed线变化。当应力超过d点后,才会产生新的塑性变形,所以d点是从弹性变形再次进入塑性屈服的分界点,因此与它相应的应力称为相继屈服应力,有时也称为加载应力。试验指出,经过塑性变形后,加载应力比初始屈服应力为高,其提高程度与塑性变形的历史有关。

由图1-1可见,d点的应变由弹性应变 $e^e$ 和塑性应变 $e^p$ 两部分组成,即

$$e = e^e + e^p \quad (1-1)$$

从上述试验结果可见，塑性变形阶段的最基本特征是加载和卸载时的应力-应变规律不同，从而使塑性变形阶段具有下列特性：

i) 在弹性变形阶段，加载和卸载服从同一个应力-应变规律，因之卸载后无残余变形。在塑性变形阶段，由于加载和卸载规律的不同，卸载后就必然存在着残余变形。

ii) 由于加载和卸载规律的不同，引起塑性阶段应力与应变的多值关系。在弹性阶段，若已知应力，就可唯一地确定相应的应变；而在塑性阶段则不存在这种一一对应的关系。由图 1-1 可见，对应于应力  $\sigma_1$  的应变，可以是  $e_1$  或  $e'_1$ ，也可以是  $e''_1$ ，它与加载历史有关。顺便指出尽管应力和应变之间不再存在单值关系，但对于某一瞬时，应力增量和应变增量之间的关系仍是确定的。

iii) 因为塑性变形不可恢复，所以外力所做的塑性功不可逆。设材料从某一应力状态  $\sigma_0$  开始加载，应力-应变关系按线性规律由  $d_0$  达到  $d$  点，如图 1-2 所示。这时如给出应力增量  $d\sigma$ ，它将引

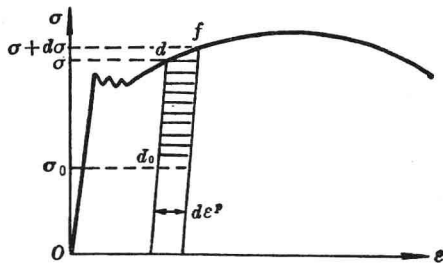


图 1-2 塑性功不可逆

起一个新的塑性应变增量  $de^p$ 。在此变形过程中应变能有了增量。若从  $f$  点卸载，应力又降为  $\sigma_0$ 。这时弹性应变恢复，弹性应变能得到释放，而塑性应变被残留下来，相应的塑性应变能（即图 1-2

中阴影部分)被消耗了。这种不能重行释放的塑性应变能也称作耗散能,与此相应的功称塑性功,它被耗散而不可逆。所以在上述应力循环中外力功恒大于零。

## (2) 真应力-应变图

通常在材料试验中,应力 $\sigma$ 和应变 $e$ 均按试件的原始尺寸计算,这样得到的 $\sigma$ - $e$ 曲线称为名义应力-应变曲线,如图1-1所示。实际上,在变形过程中,试件的尺寸不断地在变化,因此, $\sigma$ - $e$ 曲线不能真实地反映瞬时应力-应变关系。若以瞬时断面及长度计算应力及应变,就可得真应力-应变图,如图1-3所示。在小变形阶

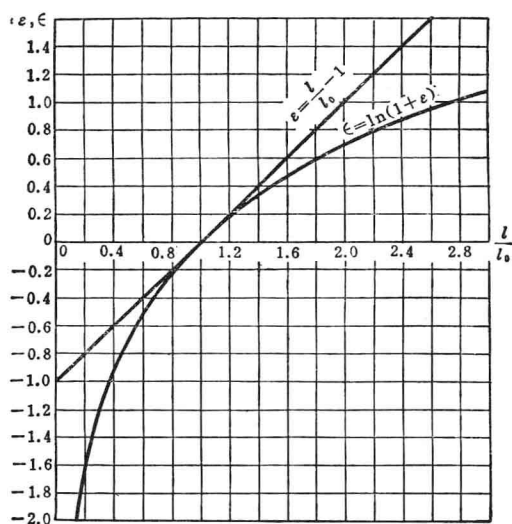


图1-3 条件应变和对数应变

段,两者基本上一致。当塑性变形较大时,两者才有明显差异。此时应以真应力-应变图来表示应力-应变关系。如研究金属压力加工时,就需要应用真应力-应变图。

Ludwik 于 1909 年提出了瞬时应变的概念。瞬时应变增量

$d\epsilon$  定义为

$$d\epsilon = \frac{dl}{l}$$

而瞬时应变

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + e) \quad (1-2)$$

其中,  $l_0$  为原始长度,  $l$  为瞬时长度,  $e = \frac{l-l_0}{l_0}$  为工程应变(条件应变),  $\epsilon$  也称对数应变或自然应变。

在小变形阶段,  $\epsilon$  和  $e$  几乎相等, 随着应变的增加, 两者差别越来越大, 如图 1-3 所示。

### (3) 拉伸与压缩试验

对于一般金属材料, 在小变形阶段, 拉伸与压缩试验的曲线基本重合(压缩曲线略高于拉伸曲线), 但在大变形阶段则有显著差别。一般在应变量不超过 1% 时可认为两者一致。但精确的试验发现, 某些高强度合金钢的屈服极限  $\sigma_s$  和弹性模量  $E$  在拉伸和压缩的情况下也有不同。因此对于一般金属材料, 在变形不大的情况下, 用拉伸试验代替压缩试验进行塑性分析是偏于安全的。但对拉伸与压缩曲线有明显差别的材料如铸铁、混凝土等, 则需另作专门研究。

### (4) Bauschinger 效应

材料在强化后卸载, 再进行反向加载(拉伸改为压缩)至屈服, 则可发现新的压缩屈服应力较未强化前的为低, 即  $\sigma''_s < \sigma'_s$  ( $\sigma''_s$  及  $\sigma'_s$  均指绝对值), 如图 1-4。这种材料在强化后反向屈服应力改变的现象为 Bauschinger 所发现, 所以称为 Bauschinger 效应。但并非所有材料都如此, 有些材料没有 Bauschinger 效应, 当由于拉伸而提高了屈服应力时, 反向加载后, 压缩的屈服应力也得到了同样的提高。这种强化特性称为各向同性强化。

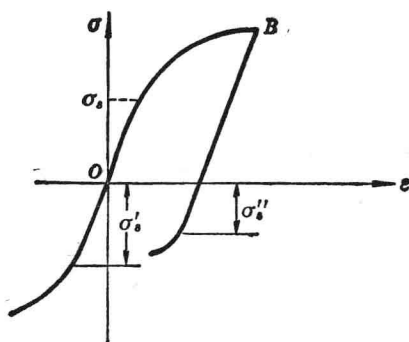


图 1-4 Bauschinger 效应

上面介绍了单向应力状态下的情况。当应力达到  $\sigma_s$  时，材料发生塑性变形。在复杂应力状态下，各应力分量怎样组合，达到什么数值时将发生塑性变形，这些都需要通过试验来确定。有关试验及其结果将在第三章中介绍。

## (二) 静水压力(各向均压)试验——Bridgman 试验

Bridgman 通过大量的高压(各向均压)试验发现：

(1) 静水压力与材料体积改变近似地服从线性弹性规律。若除去压力，体积变化可以恢复，没有残余的体积变形，因而可以认为各向均压时体积变化是弹性的。试验还表明，这种弹性的体积变形是很小的。例如弹簧钢在 10000 个大气压下体积缩小 2.2%。因此，对于一般应力状态下的金属材料，当发生较大的塑性变形时，可以忽略弹性的体积变化，而认为材料在塑性状态时的体积是不可压缩的。

(2) 材料的塑性变形与静水压力无关。Bridgman 用各种钢试件作出轴向拉伸时的应力-应变曲线及轴向拉伸与静水压力同时作用下的应力-应变曲线。两者加以比较，发现各向均压对初始屈服的影响很小，可以忽略不计。因而认为静水压力与塑性变形无关。但对于铸造金属、矿物、岩石及土壤等材料，则静水压力的



影响较为显著,不能忽略。

最后,值得指出的是,变形速度、应力作用时间的长短及温度等因素对应力-应变曲线都有影响。但这些影响只在一定条件下才比较明显,对金属材料在通常的变形速度及室温条件下影响不大,因而可以不予考虑。

### § 1-3 简化模型

在生产实际中应用的金属材料种类很多,它们的性质各有差异,为便于研究,在上节所述试验观察的基础上,忽略一些次要因素,根据材料的主要性质作出某些假设,将它抽象为理想的模型,以进一步建立理论。但由于材料在塑性状态下,应力-应变关系是非线性的,因此,即使建立了理想化的模型而问题仍很复杂。要解决具体问题,还需要根据不同的材料和应用范围建立简化的应力-应变关系。今将两种简化分述如下:

(1) 关于材料性质的基本假设

- i) 材料是均匀、连续的,并在初始屈服前为各向同性;
- ii) 对应于塑性变形部分的体积变化为零;
- iii) 一般情况下,静水应力不影响屈服;
- iv) 拉伸与压缩的初始屈服极限相等。

(2) 应力-应变曲线的简化

有的材料有明显的塑性流动阶段,且流动阶段较长或强化的程度较小,则可忽略强化的影响。这时可得到如图 1-5 所示的理想弹塑性模型的应力-应变曲线。线段  $OA$  是弹性阶段,  $AB$  为塑性阶段。应力-应变关系的数学表达式为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s \\ \sigma_s \text{sign} \varepsilon & |\varepsilon| > \varepsilon_s \end{cases} \quad (1-3)$$

式中