普通高等教育“十二五”规划教材

北京市精品课程配套教材

# 工科数学分析教程

## （上册）

杨小远 孙玉泉 薛玉梅 杨卓琴 编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

北京市精品课程配套教材

# 工科数学分析教程(上册)

杨小远　孙玉泉
薛玉梅　杨卓琴　编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书将微积分经典内容进行拓展与延伸，力求反映当代数学的发展趋势，为此引入了分支与混沌、分数阶傅里叶变换与小波变换等内容. 与传统的数学分析教材不同，本书设置了系列探索类问题，目的是培养学生的开放式思维和独立思考问题的能力. 根据信息化背景下对人才的要求，本书内容与计算机和信息技术相结合，增加了非线性方程数值方法、函数多项式插值逼近及外推算法、数值积分、非线性数值优化初步以及常微分方程数值求解等内容.

全书分上、下两册，本书为上册，内容包括：数列极限、函数极限与连续、函数的导数、Taylor 公式与函数插值逼近、不定积分、函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分初步、定积分的应用、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数.

本书可作为高等院校非数学专业的微积分教材，也可作为其他科研人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

工科数学分析教程(上册)/杨小远等编著. --北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材・北京市精品课程配套教材

ISBN 978-7-03-031816-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 163660 号

责任编辑：张中兴/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：北京蓝正广告设计有限公司

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011年8月第一次印刷 印张：21
印数：1—3 000 字数：445 000

**定价：36.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 序

微积分，不论叫做“高等数学”还是“数学分析”，都是大学数学最重要的基础课程.

如果问学生：为什么要学微积分？或者更具体一些，为什么要学微分、导数、定积分、原函数、泰勒展开？很多学生也许会回答：教材上写了这些内容，考试要考这些内容，学不好就考不及格，拿不到毕业证，找不到工作，我敢不学吗？

那么，牛顿、莱布尼茨为什么要发明微积分，也是因为有人要考他们吗？当然不是.当时别人都不会用原函数来计算定积分，只有他们会，谁能考他们呢？他们发明微积分，不是为了应付考试，而是为了解决问题，包括实际问题和科学理论问题.例如，天上行星的运动既不是匀速运动也不是直线运动，不能用以前计算常量和匀速变化的数学知识来计算和预测，只有牛顿和莱布尼茨发明的微积分理论和方法才能解决这个问题.

微积分是如此，其他科学知识也是如此，都是为了解决实际问题或科学理论问题而发明出来的.解决实际问题是为了人类的生产、生活和社会活动的需要.也许最初只是为了解决某个特定问题而发明出科学知识和方法，一旦发明出来之后，往往出乎意料地为解决更多更广泛的问题提供了强有力的武器.解决科学理论问题，也许最初只是为了满足人类探索自然奥秘的欲望，一旦解决了问题发明理论出来，不但完善了人类的知识体系，还出乎意料地为解决实际应用问题提供了强大的武器.这就是科学的威力.

人类发明科学知识是为了应用.学生学习科学知识也应当是为了应用，不仅是为了在以后的工作中直接应用这些知识解决具体的问题，也是为了在学习过程中提高自己的应用能力和创造能力，更是为了在以后的工作中创造性地获取和利用已有的知识资源为人类服务，并且能够发明创造出新的知识和方法为人类增添新的知识资源，更广泛而长久地造福人类.

然而，现在很多学生是被动的、被迫的为了应付考试而学习.考试是检验学习效果的一个必要环节，正如对食品的质量检测是食品生产和销售的重要环节一样.但是，食品生产的目的不是为了应付检测，而是为了给人吃.奶粉加了三聚氰胺可以制造蛋白质含量提高的假象，用来应付检测，但是人吃了要生病甚至丧命.将考试作为学习的唯一目的或者主要目的，考过关的也会有很多是三聚氰胺而不是蛋白质，对学生今后走上工作岗位是有害而无益的.为了解决这个问题，需要对考试(“检测仪器”)进行改革，更需要对教学过程(“生产过程”)进行改革，通过恰当的例子体现知识的应用，培养学生的应用意识和应用能力.

国内外的微积分教材已经有很多.杨小远教授等人编写的《工科数学分析教程》的一个重要特点，就是努力尝试通过适当的例子来体现知识的应用，引导学生在学到知识的同时加强应用意识，提高应用能力.例如，利用 Taylor 公式来提高导数的数值计算的

精确度，既有实用价值，又提高了学生对 Taylor 展开、无穷小的阶等数学思想的理解，提高了理论水平.教材作者杨小远教授等人都是科学研究和教学第一线上的骨干，她们在设计教学案例时，不是在各种教材中照抄现成的资料，而是从自己的科研实践中提取素材加以改造，发明出一些新的案例.这些“发明”在科学研究上也许不是新的，但要适合于教学，能够引起学生兴趣，引导学生通过这些案例正确体会基本的数学思想、掌握数学方法，必须将科学研究中的素材进行再创造，这确实是新发明、新创造.这样的发明是否成功，除了本身的科学性以外，还要在教学实践中去接受检验，看是否真正能达到教学目的.据我所知，该教材的作者除了在课堂教学中采用这些案例，还指导学生写出了一些科技论文，这说明已经取得了可喜的效果.依我看来，某些案例还需要改造得更自然、更“亲民”、更便于为学生接受，以达到“润物细无声”的境界.最好还能设计出更多好的案例.但是，无论如何，教材作者已经向正确的方向前进了第一步，值得鼓励和支持.因此我很高兴为该教材写了以上的话，作为序.

2011 年 6 月

# 前　言

微积分是大学一年级学生面临的一门重要基础课程，它的基本概念、思想和方法几乎渗透到大学四年以及后续研究生所有课程中，可以说无处不在.微积分对培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象力、科学计算能力起着重要作用.北京航空航天大学从 2003 年起开始在计算机学院、自动化学院、电子工程学院、航空科学与工程学院等开设“数学分析”课程，在多年的教学研究与实践的基础上，我们撰写了这本适合工科学生使用的数学分析教材.本书具有以下特点.

(1) 将微积分经典内容进行拓展与延伸，力求反映当代数学的发展趋势.

本书精炼了传统数学分析教材的经典内容，增加了数学的应用背景，力求为学生打开应用数学的窗口，让抽象的数学变得具体，同时注重数学分析经典内容与现代应用数学分支的联系，以开阔学生的视野.例如，在第 1 章“数列极限”中，增加了数列极限的应用实例，如自然界中的混沌现象，这使得学生在掌握极限基本理论的同时，了解了新的数学分支知识.在“函数极限与连续”一章中，介绍了连续函数的压缩映射原理.在此基础上介绍了不动点理论在非线性方程求根中的应用，同时介绍了非线性方程求根的几个基本理论问题——算法的收敛速度和局部与全局收敛问题，使学生对无穷小阶的运算有了全新的认识.Taylor 公式是微积分的经典内容，本书不是仅停留在介绍 Taylor 公式及其简单应用，而是通过对 Taylor 公式与导数数值计算的介绍，阐述了 Taylor 公式在科学计算中的应用，并且给出了更一般结论——Richardson 外推.同时，介绍了克服 Taylor 公式局部逼近的 Lagrange 插值以及误差分析和函数的最佳一致逼近问题，让学生对函数数值逼近领域有一个初步的认识，并激发他们进一步深入学习函数逼近的其他内容.在定积分部分，不仅介绍了 Riemann 可积的 Darboux 上和与下和定理，而且增加了 Lebesgue 定理与 Lebesgue 积分的介绍，加深了学生对 Riemann 积分的认识，同时了解了 Lebesgue 积分研究的意义，实际上 Lebesgue 积分在各个数学分支的应用成了现代数学的一个特征.在微分方程部分，特别强调了数学建模的思想，让学生学会用数学模型描述实际问题并求解.在介绍了几种经典的求解方法的基础上，增加了微分方程数值求解的基本方法和几个基本理论问题：数值解的收敛性和稳定性.在傅里叶级数部分，在介绍经典傅里叶级数和变换的基础上，分析了傅里叶变换的局限性，在此基础上介绍了小波变换和分数阶傅里叶变换基本思想及其在工程技术领域中的应用，实际上，傅里叶变换和小波变换几乎已被应用于所有工程技术领域.在多元函数极值问题部分，介绍了约束和非约束非线性优化的基本求解方法，使得学生对数值优化理论这一分支有初步的了解.总之，我们力求在有限的篇幅内，扩展教材的宽度，让学生有更多的发现，体会微积分在数学发展史上的作用.但是这些内容不是在理论上任意拔高，也

不是将高观点强加给学生，让学生不知所云，而是要遵循学生的认知规律. 我们的原则是利用数学分析知识中学生能够学懂的内容，重在强调方法和思想. 本书的编排力求从基本知识开始，让学生从不懂到懂，然后再逐步将数学问题引向深入，最后达到理解数学的一定高度的境地.

(2) 设置系列探索类问题，以引导学生思考、发现、探索新的数学问题，培养学生的开放式思维和创新能力.

著名科学家牛顿在被问到是什么使得他发现了万有引力定律时，回答非常简单："By thinking on it continually". 几乎所有的伟大发现都归功于不断的思考. 爱因斯坦说过："Imagination is more important than knowledge". 数学家韦尔斯(Andrew Wiles)十年磨一剑攻克费尔马大定理，就是从小就迷上了这个世界难题并不断思考.

培养创新人才是高等教育的首要任务，因此必须对学生从大学一年级开始进行适当的引导，激发他们思考问题和科学研究的意识，当思考变成习惯时，学生将收获创新能力. 而数学最富有吸引力、最本质的就是它的思想. 在教学过程中讲授新概念和新知识时，要强调这些知识的来源和数学家如何思考和解决问题的. 数学是一门高度抽象的学科，但是它不是人类精神纯粹自由创造和想象的，而是源于自然和工程等生活实际问题. 如果将教学仅仅看成是一般数学知识的传授，那么即使讲授再多的定理和公式，也难以发挥作用，而掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力. 对工科学生而言，所受的数学训练，所领会的数学思想和精神，将在未来的工作中时时刻刻发挥着积极的作用，成为研究取得成功的最重要因素. 本书努力创造一种环境，使同学身临其境地介入数学的发现或创造过程，鼓励并推动学生解决一些理论或实际的问题. 这些问题没有现成的答案，没有固定的方法，没有指定的参考书，甚至也没有成型的数学问题，主要靠学生独立思考、反复钻研并相互切磋，形成相应的数学问题，进而分析问题的特点，寻求解决问题的方法. 基于上述考虑，本书每一章都设置了系列探索类问题，分为基础研究、应用研究和实践类问题，目的是启发并培养学生独立思考和探索问题的能力. 本书没有选择数学分析中技巧性和难度过高的题目，而是注重基础性的题目，摆脱数学以做题为主的学习方式，要求学生将精力集中在对数学概念和本质问题的学习上，鼓励学生完成更多的探索类问题，体会数学的创造过程，以培养学生的开放式思维，引导学生通过数学公式看世界.

(3) 根据信息化背景下对人才的要求，将本书内容与计算机和信息技术相结合.

计算机技术的迅速发展改变了人们的思维方式和科学研究方式，极大促进了许多数学分支的迅速发展. 因此，本书中淡化了函数作图和过于复杂的积分计算等问题，增加了非线性方程数值方法及基本理论、函数多项式插值逼近问题及外推算法、数值积分、非线性数值优化初步及常微分方程数值求解的基本理论问题. 这些内容都依赖于计算机实现算法和进行分析，仔细阅读这些内容可提高学生利用计算机解决问题的能力. 在不定积分求解部分，介绍了计算机符号计算这一交叉学科，同时介绍了 MATLAB 软件，要求学生能够利用 MATLAB 绘图等，这样有助于重积分和曲线与曲面积分的计

算，可加深学生对许多数学问题的理解.

(4) 力求教材的可读性强.

数学不是一门描述性的学科，而是一门推理性的、高度抽象的学科. 数学起源于实际问题，其强大的生命力也在于它广泛的应用价值. 因此，我们不能把数学变成“玄学”. 基于这样的观点，应将数学建模的思想引入教材教会学生如何针对一个实际问题建立数学模型并求解，为此本书介绍了微积分在经济、物理、天文等领域的应用实例，例如书中介绍了如何利用向量函数微分学解释著名的 Kepler 三大定律，让学生体会微积分解决实际问题的强大功能. 数学分析内容十分庞大，可谓“洋洋大观，琳琅满目”，但是最本质最核心的内容并不多. 例如多元微积分就是一元微积分的推广，许多结论和证明方法几乎都是平行的. 因此必须让学生掌握微积分本质核心的问题，注意许多共性问题的学习，只有抓住精华才能学得精通. 在数学分析中，以 Cauchy 命名的定理很多，如数列极限收敛的 Cauchy 定理，函数极限存在的 Cauchy 定理，数项级数收敛的 Cauchy 定理，函数项级数一致收敛的 Cauchy 定理，广义积分收敛 Cauchy 定理，含参变量积分的一致收敛的 Cauchy 定理. 面对如此多的柯西定理，学生经常不知所措，本书引导学生把握这些定理的共性，虽然它们描述不同的数学问题，但实际上刻画问题的思想是一致的. 本书用同样的方法讨论了判断数项级数收敛、函数项级数一致收敛、广义积分收敛、含参变量积分的一致收敛定理的 Dirichlet 和 Abel 判别方法的共性问题，实际上他们都是相应问题 Cauchy 定理思想的延伸，刻画问题的思想是一致的. 数学分析中有几个概念学生理解起来十分困难，如函数的一致连续、函数项级数的一致收敛、含参积分一致收敛，本书通过大量的几何图形直观解释，同时强调刻画这些概念“一致”性的共同数学特征，以及为什么要引入这些概念，让学生抓住本质问题，使得数学学习变得自然轻松.

(5) 增加了许多伟大数学家的学术成就介绍，通过这些内容的阅读使学生对数学有一种仰慕和敬重，有一种向往和热爱.

从近代微积分思想的产生、发展到成熟，历经几百年，通过几代数学家坚持不懈的努力，微积分已形成了严格的理论和逻辑体系，同时对人类物质文明和精神文明发展起到了重要的作用. 牛顿(Newton, I. )、柯西(Cauchy, A. L. )、欧拉(Euler, L. )、魏尔斯特拉斯(Weierstrass, K. )，黎曼(Riemana, B. )、拉格朗日(Lagrange, J. L. )、泰勒(Taylor, B. )等伟大数学家都作出了杰出贡献，他们的人格魅力和追求真理、献身科学的精神是人类巨大的精神财富. 欧拉在失明之后 17 年，以惊人的毅力，口述完成了几本著作和 400 篇左右的论文. 数学家高斯曾说：“研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法.” 欧拉为了鼓励和培养年轻的拉格朗日，自己的研究成果不发表，让拉格朗日的论文发表，助其取得巨大的荣誉并获得成功. 这些伟大数学家的精神对学生是一种激励，也是一种陶冶，因此我们在本书中增加了这些数学家学术成就的介绍，让学生在学习微积分知识的同时，更感受到伟大数学家的思想境界.

本书第 1～4 章、第 12、13、16、17 章由杨小远和孙玉泉两位老师共同执笔，第 5～7

章、第 18、19 章由杨小远和杨卓琴两位老师共同执笔,第 8～10 章由杨小远和薛玉梅两位老师共同执笔,第 11 章由杨小远老师执笔,第 14、15 章由孙玉泉和薛玉梅两位老师共同执笔. 杨小远老师对全书内容进行了全面补充修正,并为本书设置了探索类问题. 完成上述工作以后,几位作者对本书反复多次进行了校对.

本书中的所有几何图形由陈刘河博士和段媛媛博士等绘制,在此对他们的辛勤工作表示感谢.

北京航空航天大学郑志明副校长对本书初稿提出了许多意见,多次进行指导,他渊博的知识和对问题的真知灼见开阔了我们的思路和视野. 在本书编写过程中得到了国家级教学名师李尚志教授的指导,他的创新思维和学术精神给了我们很多启发,使我们受益匪浅. 邢家省副教授为本书中一些问题提供了许多好的证明方法,并且对全书进行了校对,提出了许多非常有价值的意见,对他的无私奉献表示感谢.

数学与系统科学学院的孙善利教授、漆毅教授、王永革副教授和刘明菊副教授等对本书提出许多意见,在此对他们一并表示衷心的谢意.

囿于作者的水平和经验,书中缺点、错误和疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

作　者

2011 年 6 月

# 目　录

# 第1章

# 数列极限

微积分是微分学和积分学的统称.微积分从萌芽到发展经历了一个漫长的时期，是人类智慧的伟大结晶.数列极限问题是微积分课程的基础，本章将详细讨论数列极限的基本概念和理论，介绍数列及数列极限的应用.对自然界中混沌现象的介绍，会使你有更惊奇的发现，并能够认识和探索新的数学领域.本章最后的探索类习题，可以给学生提供更多的思考和探索的空间.

## 1.1 数列与数列极限基本定义

关于数列和数列极限的思想可以追溯到两千多年以前，当时中国和古希腊的数学家都从问题的不同方面阐述了极限的思想.

《庄子·天下篇》中有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."意思是一根长为一尺的木棒，每天截下它的一半，这样的过程永远也不会停止.

如果把每天剩下部分的长度列出可得：第一天剩下$\frac{1}{2}$，第二天剩下$\frac{1}{2^2}$，……，第$n$天剩下$\frac{1}{2^n}$，……这样就得到一个数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \text{ 或 } \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

古希腊的"穷竭法"也具有古朴的极限思想，其"化圆为方"求圆面积的思想如图1.1.1所示.

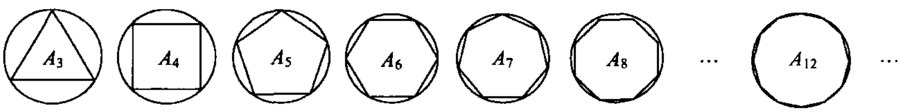


图 1.1.1 圆的面积求解示意图

在圆内作一内接正多边形，不断将其边数增加，希望得到一个与圆重合的正多边形$A_n$，从而来"穷竭"圆的面积.

上面问题的求解归结为分析一个数列的变化趋势.通常当数列的通项随$n$的增加

而趋近于某一常数时，就称该数列收敛. 显然对于上面的两个数列，当 $n$ 增加时，$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$逼近零，而$\{A_n\}$逼近圆的面积$A$，称数列$\{A_n\}$收敛于$A$.

下面给出数列和数列极限的严格定义.

**定义 1.1.1(数列定义)** 数列是指按正整数编号，并且有无穷多个数的一个排列：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

经常表示成$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$或$\{a_n\}$. $a_n$ 为通项，下标 $n$ 表示这一项在数列中的位置. 在本书中若无特别说明，数列中的数都是实数.

在数列研究中，主要关心数列的变化趋势，也就是当 $n$ 变得越来越大时，$a_n$ 会有什么变化趋势，是否会越来越接近于某一个常数 $a$.

**例 1.1.1** 观察数列的变化趋势：$a_n=\dfrac{n!}{n^n}, x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}, y_n=n\sin\dfrac{1}{n}, n=1,2,3,\cdots$.

从图 1.1.2 可以看出，随着 $n$ 的增大，数列变化都趋于平稳，逼近一个固定值. 如何精确刻画这种无限逼近的过程，是数列极限定义的本质问题. 下面举例说明.

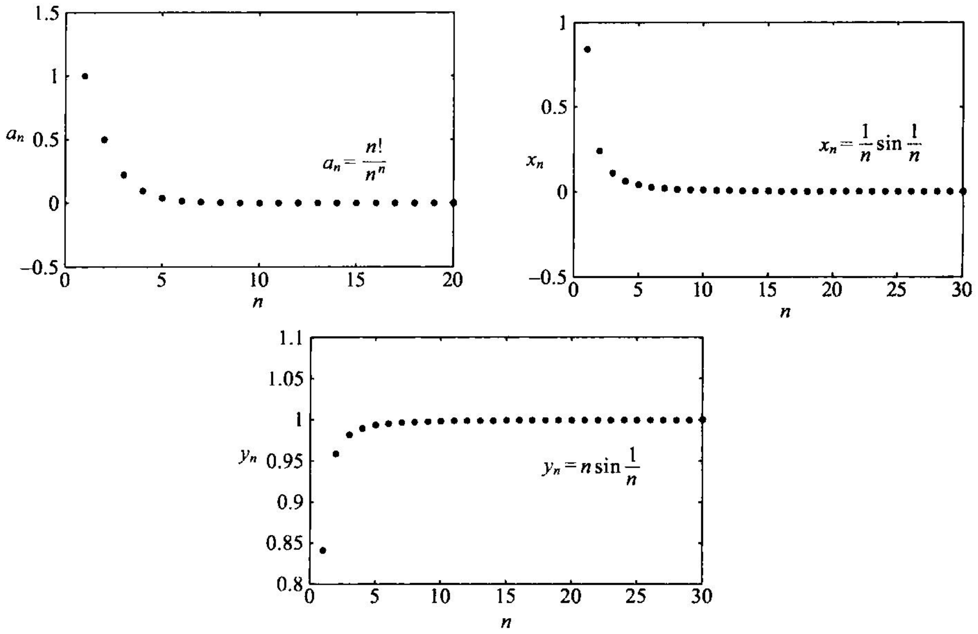


图 1.1.2 数列变化趋势示意图

**例 1.1.2** 研究数列 $x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}, n\to\infty$的变化规律.

**解** (1) 如果取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{2}.$$

当 $n>2$，即数列从第 3 项开始，都落在区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内，如图 1.1.3 所示.

(2) 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$，则

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{2^2}.$$

当 $n>2^2=4$，数列从第 5 项开始，都落在区间 $\left(-\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2}\right)$ 内，如图 1.1.3 所示.

(3) 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{2^4}$，则

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{2^4}.$$

当 $n>2^4=16$，数列从第 17 项开始，都落在区间 $\left(-\frac{1}{2^4},\frac{1}{2^4}\right)$ 内，如图 1.1.3 所示.

……

依次类推

(4) 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$，则

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{2^n}.$$

当 $n>2^n$，也即数列从 $2^n+1$ 项开始都落在区间 $\left(-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}\right)$.

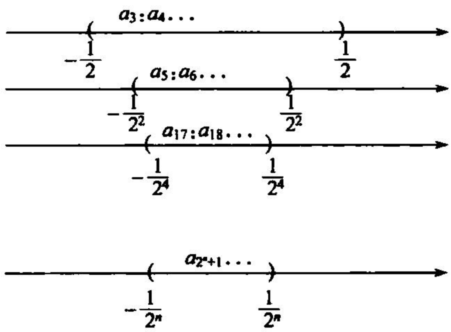


图 1.1.3 数列变化趋势示意图

通过以上分析，发现无论任给的 $\varepsilon$ 有多么小，都可以找到 $N$，使得数列 $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 第 $N+1$项以后与 0 的逼近程度都小于预先给定的 $\varepsilon$. 下面给出能精确刻画数列收敛的定义.

**定义 1.1.2(数列极限的定义)** 给定数列 $\{a_n\}$，$a$ 为定数，若 $\{a_n\}$ 满足对于任给 $\varepsilon>0$，都存在自然数 $N$，对于任意 $n>N$ 都有

$$|a_n-a|<\varepsilon \tag{1.1.1}$$

成立，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，或者 $\{a_n\}$ 以 $a$ 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，或者 $a_n\to a(n\to\infty)$.

为了表达上的方便，定义 1.1.2 可以用下述符号表示

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,\forall n>N:|x_n-a|<\varepsilon$$

这里符号 $\forall$ 表示任意选取，$\exists$ 表示存在，$\mathbf{N}^*$ 表示自然数集合.

定义 1.1.2 的几何意义如图 1.1.4 所示. 从图 1.1.4(a)可见,任给的 $\varepsilon$,都存在一个 $N$,使得数列中从第 $N+1$ 项开始所有的项都落在以 $a$ 为心,$\varepsilon$ 为半径的邻域 $U(a;\varepsilon)=\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}$ 内.

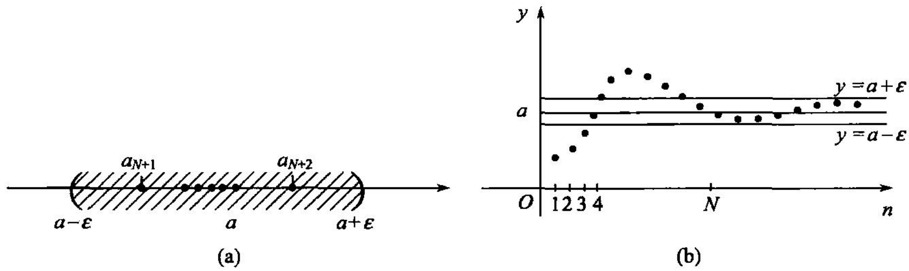


图 1.1.4 极限定义的邻域表示和函数表示

若将数列看做下标 $n$ 的函数,则从图 1.1.4(b)可以看出,当 $n>N$, $\{a_n\}$ 的图像位于 $y=a-\varepsilon$ 和 $y=a+\varepsilon$ 之间,一般来说 $\varepsilon$ 越小,$N$ 应越大. 定义 1.1.2 中,用任意小的正数 $\varepsilon$ 来刻画 $a_n$ 和 $a$ 的逼近程度. 下面举例说明如何运用定义 1.1.2 来验证数列的极限.

**例 1.1.3** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{3}{2}$.

**证明** 首先分析,由于

$$\left|\frac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{4\sqrt{n}-2}\right|<\frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

因此可以通过 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}-1}<\varepsilon$,解得 $n>\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right)\right]^2$,在此基础上反推得到 $N$.

由上面的分析可以得到,对于任意的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right)\right]^2\right]$,当 $n>N$ 有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

结论得证.

【注】 上面的方括号[ ]表示取整.

从例 1.1.3 可以看出,使用定义 1.1.2 证明数列极限存在的关键是求出 $N$. 由定义 1.1.2 知,对于 $N$ 仅强调它的存在性,不需要求出满足条件式(1.1.1)的最小 $N$. 因此可以通过适当的不等式放大来求解 $N$. 下面通过几个例题来说明.

**例 1.1.4** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$.

**证明** 由二项展开 $(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n$,得到 $n<2^n$.

如果$\left|\frac{n}{3^n}-0\right|<\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon$,将不等式两边取对数可得

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{2}{3}}.$$

因此,对任意$0<\varepsilon<1$,存在$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{2}{3}}\right]+1$,对任意的$n>N$,都有$\left|\frac{n}{3^n}\right|<\varepsilon$.

结论得证.

注意在例1.1.4中约定$0<\varepsilon<1$的目的是确保$N\in\mathbf{N}^*$.

**例 1.1.5** 证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,其中$|q|<1$.

**证明** 由于$\left|\frac{1}{q}\right|>1$,不妨设$\left|\frac{1}{q}\right|=1+\alpha,\alpha>0$,故通过二项展开有

$$|q^n|=\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n=\frac{1}{1+C_n^1\alpha+C_n^2\alpha^2+\cdots+C_n^n\alpha^n}<\frac{1}{n\alpha}.$$

要使$\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$,只需$n>\frac{1}{\varepsilon\alpha}$.

因此,对任意的$\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right]+1$,对任意的$n>N$,都有$|q^n|<\varepsilon$.

结论得证.

**例 1.1.6** 证明$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

**证明** 利用算术-几何不等式有

$$n^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{1\cdot1\cdot1\cdots\sqrt{n}\sqrt{n}}\leqslant\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<\frac{n+2\sqrt{n}}{n}.$$

因此,如果$|n^{\frac{1}{n}}-1|\leqslant\left|\frac{2}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$,则要求$n>\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$. 所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1,\forall n>N:|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon.$$

结论得证.

例1.1.4～例1.1.6讨论了如何利用数列极限的定义来证明数列极限存在. 本节最后我们给出数列$\{a_n\}$极限不是$a$的定义叙述.

**定义 1.1.3** 若$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N}^*,\exists n_0>N:|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$. 则称$\{a_n\}$不收敛于$a$,或者记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$.

任何一个定义的否定叙述都非常重要,读者应该仔细分析体会如何准确叙述一个定义的否定叙述. 下面举例说明.

**例 1.1.7** 证明数列$a_n=n^2$是发散的.

**证明** 在实数域上任取一个实数$a$,由于$|a_n-a|=|n^2-a|\geqslant|n^2|-|a|$,因此对