SHIJI GAOZHI GAOZHUAN SHIYONG JIAOCAI XILIE

世纪高职高专实用教材 系列

SHIJI GAOZHI GAOZHUAN SHIYONG JIAOCAI XILIE

于德明 张圣勤 主编

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

SHIJI GAOZHI GAOZHUAN SHIYONG JIAOCAI XILIE

上海教育出版社

世纪高职高专实用教材系列

高等数学

（下册）

于德明　张圣勤　主编

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　太仓市印刷厂有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 15.5　字数 280,000

2006年9月第1版　2007年1月第2次印刷

ISBN 978-7-5444-0715-1/G·0566　　定价:27.00元

（如发生质量问题，读者可向工厂调换　电话:0512-53522239）

“世纪高职高专实用教材系列”
编写指导委员会

出版说明

高等职业教育的迅速发展是世纪之交我国高等教育大众化进程中的一个亮点.目前人们已就高职教育发展达成了一个基本共识,即由规模扩张转向内涵发展.后者的任务其实更为艰巨.而高职内涵发展的核心是课程建设,只有有了一套能体现高职教育规律,符合高职学生学习特点,与用人单位岗位能力要求相匹配的课程体系,才能有效地整合和利用各种资源,实现高职作为一种特殊类型高等教育的经济与社会价值,以及人的发展价值.

然而,目前高职课程仍然存在许多问题.现有的高职课程无论是结构还是内容,基本上是大学课程的压缩,理论性、学术性比较强,高职特色体现得不够.但是,高职并不是低层次的高等教育,尽管目前的高职主要局限于大专层次,但高职更多的是有别于科学教育、工程教育的另一种类型的高等教育,是一种培养以工艺设计、设备维护、现场管理为主要工作内容的技术型人才的教育.技术型人才在能力结构上与工程型人才、理论型人才有着本质区别,这就决定了高职课程不能仅仅在内容上浅于大学课程,而是必须形成自己特有的课程模式与内容体系.

这将是一条漫长而又非常艰难的道路.我们出版这套教材的目的,便是期望能为高职现代课程体系的建设做出一点贡献,进而推动高职人才培养模式的改革.为了使得这套教材尽量科学、符合高职实际,在教材开发过程中,我们采取了职教课程专家、高职院校骨干教师、出版社密切合作的工作模式.首先,教材是课程的物化.教材不仅仅是知识的表达,更重要的是课程理论的体现.只有有了科学的高职课程理论,才能开发出科学的高职教材.为此,我们华东师大职成教所组织课程专家,深入地介入了这次教材开发的全过程.这一工作虽然非常辛苦,但看到我们的理论能真正地转化为实际成果,我们仍然感到非常欣慰.其次,必须有高职教师的参与.以往的许多高职教材是由大学教师开发的.大学教师虽然对专业的理论体系非常熟悉,但对高职学生的学习特点以及高职教育的特色往往认识不深,使得开发出来的教材普遍偏深、偏难,也不够实用,影响了高职教育质量的提高.事实上,真正了解高职学生的还是高职院校的教师.并且,许多高职教师已自发地在课程改革方面进行了不少探索,积累了许多有价值的经验,汇聚他们的这些经验,能够大大加快新教材的开发工作.为此,我们这次教材的具体编写工作基本上由高职教师

完成．再次，为了使得新教材在形式上更为活泼，更加符合教材开发的技术要求，我们也充分吸收了上海教育出版社的研究力量．

考虑到教材开发的复杂性，我们这次的工作暂从通用性较强的高职普通文化课程入手，以后再逐步过渡到专业课程的教材开发．也正因为此，这次的教材开发没有邀请行业专家参与．这套教材命名为“世纪高职高专实用教材系列”，首批出版的教材包括：《马克思主义与当代中国》、《职业道德与法律》、《职业生涯规划》、《体育与健康》、《汉语读写教程》等．这些课程是在专家们共同研讨的基础上，遵照教育部的有关要求确定的．在课程内容的选择上力图体现出生活性、浅显性、实用性原则，要求课程内容与高职学生的现实生活密切结合，并服务于高职学生的专业学习，浅显易懂，充分利用案例和图解的方式来表达一些比较复杂的理论．

总之，我们已为这套教材的出版做了大量的前期理论研究．但限于能力等多种因素，定有许多不能如意之处，恳请读者批评指正，以使之更加完善．同时，我们也期望能有更多富有特色的高职教材出版，共同推动高职教育事业的发展．

石伟平

2005 年 7 月于上海

前　　言

欢迎使用这本高职数学教材.本教材是根据教育部现行普通高级中学数学教学大纲和高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求,组织部分高等职业技术院校的资深数学教师编写的.本教材是教育部高教司《二年制高职普通文化课开发研究暨二年制高职高专教育教学改革》项目内容之一.主要适用于招收高中毕业生或中等职业教育毕业生的高职高专工科学校,也可作为一般工程技术人员的参考书.

在本教材的编写过程中,作者本着为我国的高职高专教育构建一套适合于21世纪工科高职教育的公共课程体系的指导思想,以"符合大纲要求,紧跟科技发展,加强实际应用,增加知识容量,优化结构体系"为原则,以新世纪社会主义市场经济对人才素质的要求为前提,以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础,在内容上删去了一些繁琐的推理和证明,比传统数学教材增加了一些实际应用的内容,力求把数学内容讲得简单易懂,重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯;在习题的编排上加入了大量的例题和习题,力求做到习题难易搭配适当,知识与应用结合紧密,掌握理论与培养能力相得益彰;在结构的处理上注意与现行高中及中职教学内容的衔接,同时注意吸收国内外高职教材的优点,照顾到高职各专业的特点和需要,适当精简结构,使之更趋合理.为跟上当今计算机应用的发展步伐,本书特意增加了 Matlab 软件的应用和数学建模的内容.书中带有 * 号的内容为选学的内容.

本教材共分上、下两册.本册是本教材的下册,共分八个模块,分别介绍了无穷级数,常微分方程,拉普拉斯变换,线性代数,线性规划初步,概率统计,数学建模,数学实验等内容.

本册教材由浙江机电职业学院于德明、上海电机技术高等专科学校张圣勤二位副教授担任主编,并由于德明负责最后统稿,由南通纺织职业技术学院钱黎明、常州机电职业技术学院周伟、江苏财经职业技术学院刘必立、浙江机电职业学院王珍娥四位副教授担任副主编.参加本教材各章编写的有浙江机电职业学院于德明、王珍娥、戎笑,南通纺织职业技术学院钱黎明,常州机电职业技术学院周伟,江苏财经职业技术学院刘必立,上海电机技术高等专科学校张圣勤、赵宁军、戚民驹,常州纺织服装职业技术学院杨晓春,郑州职业技术学院巴玉强,兰州职业技术学院杜军、杨汉芳,新疆机电职业技术学院聂华,浙江湖州职业技术学院马萍,内蒙古呼伦贝尔学院万阿英,福建工业学校刘春佳,云南工业职业技术学院黄勇林等.

在本书的编写过程中,得到了各参编院校的各级领导的关心和支持并提供方便,参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢.由于时间仓促,加之水平有限,教材中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本教材的师生多提意见和建议,以便于再版时更正.

编　者

2006 年 2 月

目　　录

模块一　无 穷 级 数

无穷级数是表示函数、进行数值计算的一个重要工具.在自然科学与工程技术中无穷级数都有着广泛的应用.在这一模块里,我们首先介绍无穷级数的基本概念、性质,给出了几个判别级数收敛与发散的常用方法,然后讨论了如何将一般函数展开成幂级数与三角级数.

M1-1　常数项级数

一、无穷级数的概念

1. 无穷级数的概念

定义 1.1.1　设有数列$\{a_n\}$:$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$,则我们将表示式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1-1-1}$$

称为**无穷级数**,简称**级数**. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$都称为**级数的项**;其中第 n 项 a_n 称为级数的**一般项**或**通项**.当级数的各项均为常数时,又称级数为**常数项级数**,简称**数项级数**.

例如:(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$

等都是数项级数.

2. 级数的收敛与发散

一般地,级数的前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的前 n 项部分和.当 n 依次取 1, 2, …时,得到一个数列$\{S_n\}$,称为部分和数列.

定义 1.1.2　如果级数 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的部分和数列$\{S_n\}$存在极限 S,即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,那么称该级数**收敛**,$S$ 称为**级数的和**,记作 $\sum_{i=1}^{n} a_i = S$. 如果部分和数列$\{S_n\}$不存在极限,那么称该

级数**发散**.

当级数收敛时,

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为**级数的余项**. 用 S_n 代替 S 所产生的误差是 $|r_n|$,显然,级数收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

例 1 讨论几何级数(等比级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ 的收敛性. ($a \neq 0$, q 叫做级数的公比)

解 当 $q \neq 1$ 时,前 n 项部分和 $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$;

当 $q = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$;

当 $q = -1$ 时, $S_n = a + (-a) + a + \cdots + (-1)^{n-1}a = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ a, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

所以,几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{当 } |q| < 1 \text{ 时}, \\ \text{发散}, & \text{当 } |q| \geqslant 1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{1-1-2}$$

由例 1 的结论知道,前面的例如中,(1)是收敛的,(4)是发散的.

例 2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 的收敛性.

解 因为 $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$, 所以

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

因此部分和

$$\begin{aligned} S_n &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 收敛,其和为 2,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = 2.$$

例 3 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

证明 因为当 $x > 0$ 时,有 $x > \ln(1+x)$,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前 n 项部分和

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$,所以调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

二、数项级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

例如:因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \pm \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 \pm \frac{1}{2}$.

注意:性质 1 的逆命题是不成立的,例如:

$$[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots+[1+(-1)]+\cdots = 0,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1) = \infty$.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,k 为任意常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 也收敛,且 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$k \neq 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 也发散.

例如:因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} = 1 \times 5 = 5$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$ 发散.

性质 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 加减或改变有限项,则其收敛与发散性质不变;但对于收敛的级数,其和的值要改变.

例如:因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$,所以 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+7}$ 也发散.

性质 4(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = S$，则 $\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}S_{n-1} = S$. 由于 $S_n = S_{n-1} + a_n$，即 $a_n = S_n - S_{n-1}$，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}S_n - \lim_{n\to\infty}S_{n-1} = 0$.

例如：若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 0$.

注意：$\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ 并不是级数收敛的充分条件，如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是发散的.

推论 如果级数的通项不趋于零，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必定发散.

例如：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，因为 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

例 4 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

解 (1) 由等比级数的敛散性知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 均收敛，再由性质 1 与性质 2 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$，所以由性质 4 推论知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$ 发散.

(3) 因为 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1} \neq 0$，所以由性质 4 推论知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ 发散.

习题 1-1

1. 写出下列级数的前五项部分和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n^3}\right)$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

2. 用定义判别下列级数的敛散性.

(1) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n}+\cdots$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

3. 用性质判别下列级数的敛散性；若收敛，求出其和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3+5n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\times 2^n-2\times 3^n}{6^n}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

M1-2 数项级数的审敛法

根据定义或性质判断级数是否收敛，一般是比较困难的，因此需要建立判断级数敛散性的新方法. 在本节中，先讨论正项级数的审敛法，然后再讨论一般数项级数的审敛法.

一、正项级数及其审敛法

1. 正项级数

定义 1.2.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项满足 $a_n \geqslant 0\ (n=1, 2, \cdots)$，则称该级数为**正项级数**.

由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的，即：$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \cdots$，显然有两种可能性. 如果 $\{S_n\}$ 无上界，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，此时级数发散；如果 $\{S_n\}$ 有上界，那么由于单调有界数列必有极限，知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，于是级数收敛；反之，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 有界.

因此，正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

2. 正项级数审敛法

定理 1.2.1(比较判别法) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数，且 $a_n \leqslant b_n (n=1, 2, \cdots)$，则

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例 1 讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性(p 是常数).

解 当 $p \leqslant 1$ 时，因为 $\dfrac{1}{n^p} \geqslant \dfrac{1}{n}\ (n=1, 2, \cdots)$，且调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 也发散.

当 $p > 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}_{\text{二项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)}_{\text{四项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)}_{\text{八项}} + \cdots$$

$$\leqslant 1 + \left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots.$$

由于公比 $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}$ 收敛. 由定理 1 知，当 $p>1$ 时，p 级数收敛.

综合上述讨论可知，p 级数当 $p\leqslant 1$ 时发散，$p>1$ 时收敛.

例 2 判别下列级数的敛散性.

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+100}$.

解 (1) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$p=\frac{1}{2}<1$，所以原级数发散.

(2) 因为 $0<\frac{1}{3^n+100}<\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛，由比较判别法知原级数收敛.

定理 1.2.2（比值判别法一） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$ $(0<l<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性.

例 3 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^5+2}}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n^5+2}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=2$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^5+2}}$ 收敛.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法知，所给级数收敛.

运用比较判别法与比值判别法一的关键是，要找出一个已知级数，用已知级数的通项与要判别的级数的通项进行比较或求比值的极限，从而判别级数的敛散性，几何级数与 p 级数是两个最常用的比较级数.

定理 1.2.3（达朗贝尔（d'Alembert）比值判别法二） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$，则

(1) 当 $0<\rho<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.（证明从略.）

例 4 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\dfrac{10^n}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=+\infty.$

由比值判别法二知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{2}<1.$

由比值判别法二知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ 收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\dfrac{\ln(1+n)}{\ln(2+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1.$

此时比值判别法二失效,需采用其他方法.

因为 $\ln(1+n)<n$, 从而 $\dfrac{1}{\ln(1+n)}>\dfrac{1}{n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$ 发散.

二、交错级数及其审敛法

定义 1.2.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$$

称为**交错级数**.

定理 1.2.4(莱布尼兹审敛法) 如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

(1) $a_n\geqslant a_{n+1}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

那么交错级数收敛,且其和 $|S|\leqslant a_1$.

例 5 讨论交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $a_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 由定理1.2.4知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛.

三、绝对收敛与条件收敛

定义 1.2.3 对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (u_n 是任意常数),若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为**绝对收敛**;若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛的,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为**条件收敛**.

定理 1.2.5 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

例 6 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}$.

解 (1) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛.

(2) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}$ 条件收敛.

定理 1.2.6(任意项级数的比值审敛法) 若任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, 则当 $0<\rho<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;当 $\rho>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

习题 1-2

1. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-5}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2(n+1)}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n}$.

2. 用比值判别法二判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n}$.

3. 判别下列交错级数是否收敛.如果收敛,指出是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{5n+3}$.

M1-3 幂　级　数

一、函数项级数的概念

定义 1.3.1 如果 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$是定义在同一数集 X 上的函数列,那么

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1-3-1}$$

称为**函数项级数**,简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, X 称为它的定义域.

例如:
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx+\cdots$$
等都是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数.

如果将函数项级数定义域中的某个值 x_0 代入级数中,那么得到一个数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots. \tag{1-3-2}$$