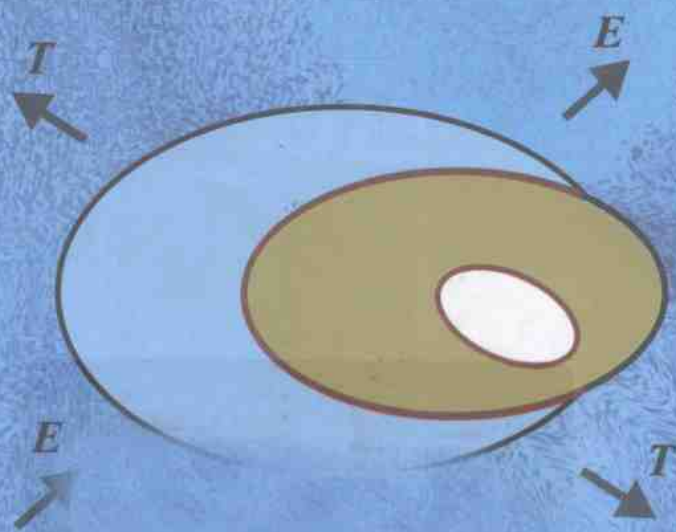




电弹性理论

匡震邦 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

电弹性理论

Theory of Electroelasticity

匡震邦 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书论述了压电材料和电致伸缩材料在机械和电载荷作用下的响应、强度、破坏和信号传播理论。全书共分 12 章,主要内容包括电弹性分析的基本理论和控制方程,均匀材料和裂纹体中的应力、应变、位移、电场、电位移、电势和温度的分布,应力波的传播等。

本书包括了作者及其合作者、部分国内学者和少数较重要的国外学者的工作成就,力争反映最新研究成果,有着明显的工程和社会意义。

本书可供力学、机械工程、智能控制和材料工程领域的研究人员和高校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

电弹性理论/匡震邦著. —上海:上海交通大学出版社,2011

ISBN 978-7-313-06324-3

I. ①电… II. ①匡… III. ①电动力学;弹性力学
IV. ①0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 039846 号

电弹性理论

匡震邦 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟市华通印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 29.5 字数: 745 千字

2011 年 4 月第 1 版 2011 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1~2030

ISBN 978-7-313-06324-3/O 定价: 98.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

1865年麦克斯韦提出了电磁场的基本方程,随后洛伦茨提出了电磁场作用在运动带电粒子上力的公式,结合牛顿定律建立了带电粒子完整的电磁-力学封闭方程组。这些理论都是建立在介质不变形的基础上的。另一方面,由压电、铁电晶体和高分子压电薄膜等制成的各种传感器、调制器、作动器、表面声波器件、红外探测器、超声换能器等,在国民经济和社会生活中的高科技领域得到广泛的应用,这些器件的功能和可靠性都和电磁场及力学分析密切相关。这些器件在使用中都会发生变形,许多情况下还和温度场耦合在一起。因此在变形介质中讨论电磁场、应力应变场和温度场,很有必要。这就需要建立一门新学科——电弹性分析或热电弹性分析。压电体的现象学理论是基于开尔文发表的热动力学原理建立的,1910年伏依格特对线性理论作了比较完整的讨论。目前,在电介质的非线性理论方面还存在一些不完善的地方,需进一步加以讨论。

本书旨在系统地研究变形电介质中的电场和机械力的作用,重点讨论含缺陷的电介质中的应力、应变、位移、电场、电位移、电势和温度的分布,应力波的传播等问题,以给电介质的破坏强度和信号传播分析提供可靠的理论基础。本书作者提出热力学第一定律本身包含了一个普适物理变分原理,同时遵循连续介质力学的研究方法,统一地从物理变分原理系统地导出这类材料的线性和非线性控制方程,且直接导出了麦克斯韦应力,这有助于解决以往文献中关于电学非线性理论中的一些不明确处;提出热释电材料的惯性熵理论,热扩散理论中的惯性浓度理论,极其简单地导出以有限速度传播的温度波动方程和浓度扩散方程;在压电和热释电材料波的反射和透射问题中,指出出现了一个新的表面波,使问题得到完善的解决;提出了电磁非线性薄板一阶近似的完整控制方程。本书系统地叙述了作者和他的合作者们的工作,讨论了国内学者的部分工作以及国际上的一些较为重要的工作,力求反应当前国内外研究的基本成果。目前在众多的有关压电介质的书中,尚缺少一本能严格按照连续介质力学的方法讨论的书,本书希望能弥补这一不足。由于电弹性理论综合研究力学、电学和热学的问题,因而也扩展了经典力学本身。

本书撰写由浅入深,为便于读者阅读,安排了电磁理论和不可逆热力学的基础知识,给出了一些必备的数学方法和弹性力学方程,力求物理概念清晰,数学推演严密,结合工程应用,可

作为电弹性分析领域的一本基础性著作。本书还适当地保留了杂志中论文的不同风格,以期读者能接触到各种风格和方法。希望能对力学、智能材料、控制工程、机械工程、电力工程、国防工程、材料工程等领域的科学研究人员,大学研究生和工程技术人员有所帮助。

文献中有关压电介质的论文数量很大,本书只能引用其中非常小的一部分,其他资料读者可从本书所引文献中查找。

本书得到国家自然科学基金重点基金(编号为 10132010)、面上基金(编号为 10072003, 10472069)资助,在此表示感谢。

由于电弹性问题比较复杂,公式推演和论文发表前的评审也较困难,因此所引部分文献中可能会存在一些问题。撰写本书时,因水平所限,仅对文献做过一些粗略的检查,故书中可能会出现某些不当和差错,希望以概念和方法为重,恳请读者和专家指正。

匡震邦

2010 年于上海

目 录

第 1 章 概论 基础知识	(1)
1.1 压电晶体的基本性质	(1)
1.2 弹性力学的基本方程与平面问题的复变函数解法	(4)
1.3 有限变形	(9)
1.4 方阵的本征值与本征矢量	(11)
1.5 电弹性力学中常用的几个函数和公式	(14)
1.6 Riemann - Hilbert(黎曼-希尔伯特)问题	(18)
1.7 Cauchy 核奇异积分方程	(26)
1.8 留数定理与某些积分的计算	(29)
1.9 国际单位制	(32)
第 2 章 经典电动力学基础	(33)
2.1 经典电动力学概述	(33)
2.2 经典电动力学的基本方程	(37)
2.3 空间准静态问题的几个典型解	(42)
2.4 电磁能量与电磁力	(45)
2.5 狭义相对论电动力学介绍	(54)
2.6 电磁场的微观理论	(60)
第 3 章 电弹性的基本理论与等温变分原理	(65)
3.1 经典热力学与物理变分原理	(65)
3.2 电弹性力学普适方程	(67)
3.3 电弹性本构关系	(69)
3.4 铁电体的基本物理性质	(74)
3.5 等温电介质中电 Gibbs(吉布斯)函数物理变分原理	(77)
3.6 等温电介质中的内能变分原理	(90)
3.7 等温电介质小变形时的守恒积分	(95)
第 4 章 广义二维线性电弹性问题	(104)
4.1 广义二维线性电弹性问题	(104)
4.2 等温齐次方程的广义位移解法	(105)
4.3 等温齐次方程的应力函数解法	(113)

4.4	横观各向同性压电体中有一椭圆孔的解	(118)
4.5	横观各向同性压电体中有一裂纹的解	(126)
4.6	横观各向同性压电体中有一刚性椭圆夹杂的解	(129)
4.7	压电体中存在一般椭圆夹杂的解法	(133)
4.8	含有裂纹的泛函梯度压电材料	(135)
第5章	均匀压电介质中的线性夹杂	(142)
5.1	均匀压电介质中夹杂尖端的渐近场	(142)
5.2	均匀压电体中的共线界面绝缘裂纹	(144)
5.3	部分传导、部分绝缘的裂纹问题	(149)
5.4	非理想裂纹	(159)
5.5	电学条形模型	(168)
5.6	表面电极	(171)
5.7	含平行边界裂纹的条形压电介质中的动态响应	(177)
5.8	用 Chebyshev 多项式数值求解一类奇异积分方程	(183)
第6章	双压电介质中的线性夹杂	(188)
6.1	双压电体中的共线界面绝缘裂纹	(188)
6.2	双压电体中的共线刚性夹杂	(194)
6.3	双压电体中的开路裂纹	(201)
6.4	双压电介质中的共线界面电极	(203)
6.5	双压电介质中裂纹的接触区域模型	(205)
6.6	圆形夹杂界面裂纹的Ⅲ型问题	(212)
6.7	Ⅲ型界面裂纹的条形区域模型	(220)
6.8	Ⅲ型 Yoffe 型运动裂纹	(225)
第7章	夹杂与奇点载荷的相互作用	(229)
7.1	等温压电体中的奇点载荷	(229)
7.2	界面裂纹与奇点载荷的相互作用	(233)
7.3	共线刚性夹杂和奇点载荷的相互作用	(237)
7.4	椭圆夹杂与奇点载荷的相互作用	(244)
7.5	压电体中的电偶极子	(250)
7.6	椭圆孔与副裂纹的相互作用	(254)
第8章	各向同性电致伸缩材料	(266)
8.1	无限电致伸缩材料板中的椭圆孔	(266)
8.2	无限电致伸缩材料板中的刚性椭圆导体	(276)
8.3	无限电致伸缩材料板中的一般椭圆夹杂	(280)
8.4	裂纹端部局部电饱和时的裂纹的解	(284)
8.5	电载荷作用下绝缘裂纹的渐近分析	(291)
8.6	关于电致伸缩材料理论的某些注记	(295)

第 9 章 压电介质中的弹性波	(300)
9.1 无限压电介质中的弹性波	(300)
9.2 表面波	(305)
9.3 非均匀压电层状介质中的 Love 波	(308)
9.4 存在偏应力时 $\text{ZnO}/\text{SiO}_2/\text{Si}$ 层压结构中的 Love 波	(311)
9.5 在偏应力作用下的 B-G 波	(321)
9.6 在偏电压作用下的 Lamb 波	(324)
9.7 存在偏应力时的 Rayleigh 波	(328)
9.8 一般情况下的界面动态断裂分析	(331)
第 10 章 热释电体	(341)
10.1 热释电体中静态问题的通解	(341)
10.2 界面绝缘裂纹	(342)
10.3 点热源引起的温度场	(349)
10.4 界面裂纹与点热源的相互作用	(355)
10.5 热释电体中的变分原理	(356)
10.6 热释电体中的均匀热-电-弹性平面波	(365)
10.7 热释电体中的非均匀热-电-弹性平面波	(370)
10.8 热释电体中的热扩散理论	(378)
第 11 章 三维问题与某些结构元件分析	(386)
11.1 横观各向同性压电体三维分析的势函数法	(386)
11.2 三维硬币(薄片)形裂纹	(391)
11.3 三维压电体中的椭球夹质和夹杂	(395)
11.4 层状压电板的弯曲与振动	(400)
11.5 中等厚度板的高阶近似方程	(402)
11.6 压电复合梁的近似方程	(408)
11.7 电磁非线性薄板的一阶近似理论	(413)
11.8 压电复合圆柱壳	(417)
第 12 章 压电体的破坏理论	(426)
12.1 实验研究	(426)
12.2 理论分析	(428)
12.3 本征模态理论	(434)
12.4 传导裂纹破坏的无电荷区模型	(441)
12.5 电介质的电击穿	(446)
参考文献	(450)

概论 基础知识

1.1 压电晶体的基本性质^[1, 2, 3]

1.1.1 概述

电介质材料可以是固体(晶体和非晶体)、液体和气体等,本书主要讨论固体。某些电介质物质,在沿一定方向受到外应力场作用变形时,内部会产生极化现象,或已有极化的变化,这种改变导致与极化方向垂直的两端面出现等量反号的束缚电荷变化,即产生表面电荷(或在其电极上产生电位差),谓之正压电效应。这和导电材料的电传导方式完全不同。Curie(居里)兄弟 1880 年首先发现了电气石(酒石酸钾钠)、石英等一些晶体的压电现象。这种压电效应现在已得到广泛的应用。根据正压电效应,可制成多种传感器。

一般讲来,极化有三种情况:①在外加电场作用下,组成原子的电子云相对于原子核发生位移而出现的电矩,称电子极化;②组成分子的正负离子发生位移而出现的电矩,称离子极化;③分子的固有电矩,在无外场作用时,因热运动而有序排列,并无合成电矩;但在外场作用下,倾向于沿电场方向排列,因而出现非零的电矩,称偶极子取向极化。

若在压电体两端施加电压,则产生伸缩变形,称为逆压电效应。通常在几百伏到上千伏的高压下,一片压电陶瓷片产生几微米的位移;利用逆压电效应可以设计自适应结构中的应变控制,以实现对结构振动或变形的控制;制造直接把电能转换成机械能输出的声马达是一个引人注目的新领域。

热释电效应指的是极化强度随温度改变而表现出的电荷释放现象,温度的改变会在材料的两端出现电压或产生电流,用它可制作热电传感器件而用于红外探测器中。

Rochelle(罗塞尔)盐是最早发现的铁电晶体,20 世纪 40 年代制造成功钛酸钡(BaTiO_3)铁电压电陶瓷,现在又制造出许多新型铁电压电陶瓷,如锆钛酸铅($\text{Pb}(\text{Ti}, \text{Zr})\text{O}_3 - \text{PZT}$), KDP, 钛酸钡 BaTiO_3 , 由铌镁酸铅 $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$ 和锆钛酸铅配比而成的 PMN-PZT 陶瓷等,多畴铁电单晶铌酸锂(LiNbO_3)、钽酸锂(LiTaO_3)等广泛地应用于表面声波器件,在光电、微声和激光等器件方面也都有重要应用。铁电体有与铁磁体的磁滞回线形状类似的电滞回线,这个回线是铁电体的标志。显然,铁电体是压电体中的一种。铁电陶瓷中虽存在自发极化,但各晶粒间自发极化方向的随机性使宏观上呈现无极性。但若预先经强直流电场作用的人工极化,使各电畴的自发极化方向都择优取向而成为有规则的排列,除去直流电场后,仍保留相当的剩余极化强度,宏观上便具有了极性,也就具有了压电性能。压电陶瓷的特点是:压电常数大,灵敏度高;通常压电陶瓷除有压电性外,还具有热释电性。20 世纪 70 年代以来,压电超声换能器在医学领域中也开始广泛应用。

半导体薄膜传感器,如硫化锌(ZnS)、碲化镉(CdTe)、氧化锌(ZnO)、硫化镉(CdS)等,既具有压电特性又具有半导体特性。压电聚合物,是某些合成高分子聚合物,经延展拉伸和电极化后具有压电性的高分子压电薄膜,如聚氟乙烯(PVF)等,或在高分子化合物中掺杂压电陶瓷 PZT 或 BaTiO₃ 粉末制成的高分子压电薄膜。

压电效应虽在 1880 年早已发现,但在最初几十年间并未引起人们的重视,第一次世界大战期间,对压电晶体的实用技术展开了研究,第二次世界大战后,在新型压电陶瓷材料的研制成功后,才获得了普遍应用。这说明生产需要对科学技术的推动。

1.1.2 晶体学中的晶轴和直角坐标系

为了研究晶体的物理性质,必须有一个参考的直角坐标系,规定单元晶胞的棱边或晶轴(a, b, c)在直角坐标系(x, y, z)中的位置(图 1-1)。我们按 IRE 标准的规定,分别来讨论 7 个不同的晶系。

(1) 三斜晶系。晶轴 c 取为 z 轴, y 轴垂直 a, c 轴组成的平面, x 轴位于晶轴 a, c 组成的平面并垂直于 c 轴。

(2) 单斜晶系。取垂直于镜像平面的轴为晶轴 b (唯一的二重轴),晶轴 a, c 都垂直晶轴 b ,且取 a, c 轴间的夹角 $\beta > 90^\circ$,晶轴 c 取为 z 轴,晶轴 b 取为 y 轴, x 按右螺旋规则选取,因而位于晶轴 a, c 组成的平面且在 β 角之内。

(3) 正交晶系。三个晶轴是相互垂直的,并取 $c < a < b$ 。晶轴 a, b, c 分别取为 x, y, z 轴。

(4) 四方晶系。晶轴 a, b, c 分别取为 x, y, z 轴,其中 c 为四重轴, $a = b$ 。

(5) 菱形晶系。三重轴取为晶轴 c ,并取作 z 轴。通常参照六方晶系处理。

(6) 六方晶系。六重轴取为晶轴 c ,并取作 z 轴。三个等效的晶轴 a_1, a_2, a_3 互成 120° ,其中的一个取作 x 轴,按右螺旋规则选取选取 y 轴。

(7) 立方晶系。等效的 a, b, c ($a = b = c$) 轴分别取为 x, y, z 轴。

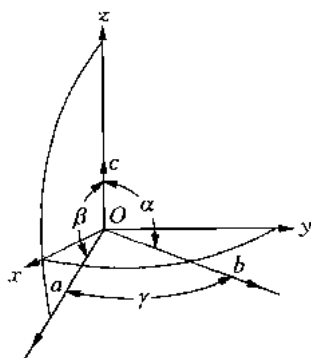


图 1-1 晶轴在直角坐标系中的位置

1.1.3 晶体的对称性

晶体结构的显著特点是具有周期性,是由结构单元(元胞)在空间周期性地重复排列而成。晶体的内部结构存在这样那样的对称性,在相应的对称操作下,晶体的外表维持不变。晶体的可能对称操作可归结为:旋转对称、中心反演对称,镜面对称和像转对称。其中像转对称操作是晶格绕某一轴旋转 $2\pi/n$ 角度后,再经过中心反演能自身重合的操作;以及包含空间平移构成的螺旋轴和滑移反映面。中心反演对称操作,国际符号记为 i ,镜面对称操作,国际符号记为 m 。上述种种对称操作可用张量变换矩阵 $[C_\sigma]$ 的数学形式表示。例如全等变换矩阵,中心反演矩阵,垂直 z 轴的镜面的反射矩阵和绕 z 轴的旋转变换矩阵为分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 θ 为 xy 平面内的矢径和 x 轴的夹角。要上式是一个对称操作,必须旋转后与原来的形状重合。绕 A 点旋转 θ 后, B 点旋转到 B' 点,如图 1-2 所示;按晶格的周期性, B 点应与 A 点等

价,因而绕 B 点旋转 $(-\theta)$ 后, A 点转到 A' 点,由几何关系知 $A'B' \parallel AB$,而这也应当是一个对称操作,从而 $A'B'$ 必为 AB 的整数倍,即有 $A'B' = AB(1 - 2\cos\theta)$,由此推出 $1 - 2\cos\theta = t$,其中 t 为整数,即 t 为 $-1, 0, 1, 2, 3$, 或 $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ 。因此当 $\theta = 2\pi/n$, $n = 1, 2, 3, 4, 6$ 时上述旋转变换构成对称操作。这一类转动对称轴称为 n 度旋转对称轴,相应于 $n = 1, 2, 3, 4, 6$, 分别称为 $1, 2, 3, 4, 6$ 度对称轴,在国际符号中分别记为 $1, 2, 3, 4, 6$ 。显然, 1 度对称轴相当于全等变换,即没有变化。像转轴是旋转对称轴和中心反演对称操作的复合操作,分别记为 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$ 。

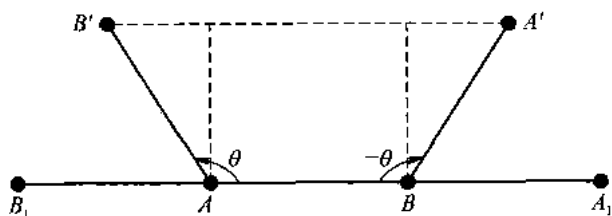


图 1-2 周期性对转动操作的限制

上述对称操作中,只有 8 种操作是独立的,他们是 $1, 2, 3, 4, 6, i, m$ 和 $\bar{4}$ 。事实上一度像转轴相当于中心反演, 2 度像转轴相当于镜面反演, 3 度像转轴相当于 3 度旋转对称轴和中心反演同时存在, 6 度像转轴相当于 3 度旋转对称轴和镜面反演同时存在。数学上把由对称要素组成的集合称为“群”,相对于一个不动点,由上述 8 种独立的对称要素共可组成 32 种点群。32 种点群分属 7 个晶系。点群通常用国际符号来表示,也有用熊夫利符号表示的,本处不去讨论。国际符号是按一定次序表出各种对称要素,一般情况下用三个符号来表示,也有两个和一个符号表示的。每个符号表示某一方向的对称要素;如某一方向既是对称轴,垂直此方向的面又是对称面,则将轴的符号写为分子,面的符号写为分母。对于不同的晶系,所取的方向是不同的。7 个晶系和 32 种点群的记号列于表 1-1。

表 1-1 7 个晶系和 32 种点群

晶系	三斜	单斜	正交	菱形	四方	六方	立方
点群符号	$1, \bar{1}$	$2, m, 2/m$	$222, 2mm, mmm$	$3, \bar{3}, 32, 3m, \bar{3}2/m$	$4, \bar{4}, 4/m, 422, 4mm, \bar{4}2m, \frac{4}{m}mm$	$6, \bar{6}, 6/m, 622, 6mm, \bar{6}m2, \frac{6}{m}mm$	$23, m\bar{3}, 432, \bar{4}3m, m\bar{3}m$
对称操作数	$1, 2$	$2, 2, 4$	$4, 4, 8$	$3, 6, 6, 6, 12$	$4, 4, 8, 8, 8, 8, 16$	$6, 6, 12, 12, 12, 12, 24$	$12, 24, 24, 24, 48$

注:表中某些记号的不同写法: $mm\bar{m}(\frac{2}{m}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m}), \bar{3}2(\bar{3}, m), \frac{4}{m}mm(\frac{4}{m}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m}), \frac{6}{m}mm(\frac{6}{m}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m}), m\bar{3}m(\frac{4}{m}, \bar{3}, \frac{2}{m})$ 。

电介质晶体的电学性质包括介电晶体(32 种),压电晶体(20 种),热释电晶体(10 种)。热释电晶体具有自发极化的性质,在外电场作用下,那些自发极化方向会随之改变的晶体呈现铁电性,谓之铁电体。具有对称中心的晶体不具有压电效应。1894 年,Voigt(伏依格特)根据压

电晶体的结构特征指出,在 32 种点群的晶体中,只有 20 种非中心对称点群的晶体才可能具有压电效应。这 20 种非中心对称点群是:1, 2, m , $2mm$, 4, $4mm$, 3, $3m$, 6, $6mm$ 和 222, 422 , $\bar{4}$, $42m$, 32, 622 , $\bar{6}$, $6m2$, 23, $\bar{4}3m$ 。

压电材料的主要特性参数有:①压电常数,通常压电系数的符号如下选取:在正的(拉应力或切应力)作用下,在轴的正方向产生正电荷;②弹性常数;③介电常数;④机电耦合系数;⑤电阻;⑥Curie 点等。

1.1.4 晶体切割^[2]

压电体是各向异性介质,因而不同切割方位的晶片,材料常数矩阵不同,因而需要根据压电元件的设计要求,选择合适的切型,晶片的切割方位按 IRE 标准的规定的切型符号来表示。切型符号的头两个字母是 x, y, z 中的两个,第一个字母表示晶片初始设定的厚度方向,第二个字母表示晶片初始设定的长度方向;再用 t, l, w 分别表示厚度,长度和宽度方向的旋转轴,它们都放在括号内,随后顺次写出旋转角,从轴的正方向的端点看向原点时,反时针方向的旋转角为正。如符号 $(yxlwt)\Phi/\Theta/\Psi$,表示晶片初始设定的厚度方向沿 y 轴,长度沿 x 轴,先绕它的 l 轴旋转 Φ 角,再绕它的 w 轴旋转 Θ 角,最后绕它的 t 轴旋转 Ψ 角。图 1-3 表示 GT-切割石英的例子^[2]: $(yxl t) - 51^\circ/45^\circ$, 其中 (yx) 是初始设定的平板,厚度平行于 y 轴,长度平行于 x 轴,初始的 l, t 轴和 $+x, +y$ 轴一致,晶片绕 l 轴转 -51° ,绕 t 轴转 45° ,图 1-3 中给出了这 3 个不同的位置。不同作者可能取用的符号不同。

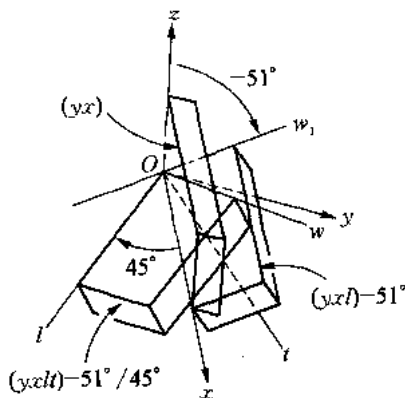


图 1-3 晶体的切割

1.2 弹性力学的基本方程与平面问题的复变函数解法

1.2.1 三维线弹性力学问题的基本方程^[4]

令介质的位移为 u , 应力 σ , 应变 ε , 单位体积的体积力密度 f , 则各向异性体中的弹性力学的基本方程为(采用常用的指标记法和张量符号法)

$$\text{几何方程} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + u \nabla)$$

$$\text{运动方程} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \nabla \sigma + f = \rho \ddot{u}$$

$$\text{本构方程} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma = C : \varepsilon \text{ (或简记为 } = C \varepsilon \text{)} \quad (1-1)$$

在上列诸方程中, C 为刚度系数。此外要给出合适的边界条件。

对各向同性介质, C 可表为

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1-2)$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker(克罗纳科)记号, λ, G 为 Lamé(拉梅)系数。

本书中还采用 Voigt(伏依格特)或紧缩记号,把应力和应变用六维矢量表示:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_3 &= \sigma_{33}, & \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \sigma_5 &= \sigma_{31}, & \sigma_6 &= \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, & \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{31}, & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{12}\end{aligned}\quad (1-3)$$

相应的本构关系写成

$$\varepsilon_i = s_{ij}\sigma_j, \quad \sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (1-4)$$

1.2.2 各向同性二维弹性力学问题的复变函数方法^[6]

寻求各向同性二维弹性力学问题的闭合解和以此为基础的数值解,复变函数方法是一个行之有效的方法。根据 Мусхелишвили(穆斯海里斯维里)等的理论,各向同性二维弹性力学问题可以化成在复平面上求解两个解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$, 且

$$\begin{aligned}2G(u_1 + iu_2) &= \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\overline{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\quad (1-5)$$

式中 $z = x_1 + ix_2$ 是复变数, $\overline{\phi(z)}$ 是 $\phi(z)$ 的共轭函数, $\phi'(z) = d\phi(z)/dz$ 。

在极坐标系中有

$$\begin{aligned}2G(u_r + iu_\theta) &= 2G(u_1 + iu_2)e^{-i\theta} = e^{-i\theta}[\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{2i\theta} = 2[\overline{z}\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta}\end{aligned}\quad (1-6)$$

设 AB 为物体的一段边界, $\mathbf{n}$ 为其单位外向法线; $\mathbf{s}$ 为单位切线, 沿运行方向, 运行时物体保持在左边。 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{s}$ 可表为(参见 1.5.4 节)

$$n_1 = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}_1) = dx_2/ds = s_2, \quad n_2 = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}_2) = -dx_1/ds = -s_1 \quad (1-7)$$

作用在 AB 段的合力和合力矩分别为

$$\begin{aligned}F &= \int_A^B (t_1 + it_2) ds = -i[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \\ M &= \int_A^B (x_1 t_2 - x_2 t_1) ds = \operatorname{Re} \left[\int \psi(z) dz - z\phi(z) - z\overline{z}\phi'(z) \right]_A^B\end{aligned}\quad (1-8)$$

1.2.3 各向异性广义二维弹性力学问题的复变函数方法^[6, 7, 8]

广义二维线性弹性问题是指位移, 应力, 应变等只依赖于 (x_1, x_2) 或 (x_1, x_3) , 而不依赖于 x_3 或 x_2 , 但位移可以有 3 个分量, 应力和应变可以有 6 个分量。求解广义二维各向异性线性弹性问题, 复变函数方法仍是一个强有力的方法, 但和各向同性问题有很大的差别, 需要采用多个复变数, 因而求解也较复杂。和通常弹性力学一样, 可以用位移和应力函数两种方法求解。首先 Лехницкий(列赫尼茨基)用应力函数方法, 较晚 Stroh(斯特劳)用位移法求解。本处用位移法说明求解的一般步骤, 更详细的讨论见第 4 章。不计体积力的静态问题, 用位移表示的齐次方程为

$$C_{ijk}u_{l,ik} = 0 \quad (1-9)$$

由于讨论的是广义平面问题,所以设其解为

$$U = af(z), U = [u_1, u_2, u_3]^T, a = [a_1, a_2, a_3]^T, \text{ 或 } u_i = a_i f(z), i = 1 \sim 3 \\ z = x_1 + \mu x_2, z_{,1} = 1, z_{,2} = \mu \quad (1-10)$$

式中右上角的字母“T”表示转置。把式(1-10)代入(1-9)使得

$$C_{ajig}a_l z_{,a} z_{,b} = 0 \quad (1-11)$$

式中小写英文字母取值 1~3,希腊字母取值 1 和 2。上式详细写出为

$$[C_{ik1} + \mu(C_{ik2} + C_{ik1}) + \mu^2 C_{ik2}]a_k = 0 \quad (1-12a)$$

要 a_k 有非零解,其前的系数行列式必须为零,即

$$|D(\mu)| = |C_{ik1} + \mu(C_{ik2} + C_{ik1}) + \mu^2 C_{ik2}| = 0 \quad (1-13a)$$

式中 $i = 1, 2, 3$ 组成三行, $k = 1, 2, 3$ 组成三列,所以上式是 3×3 阶的行列式,组成 μ 的 6 阶方程,故 μ 有 6 个根。如果引入 3×3 阶的方阵 Q, R, T

$$Q = [C_{ik1}], R = [C_{ik2}], T = [C_{ik2}] \quad (1-14)$$

则式(1-12a)和(1-13a)还可分别写成

$$D(\mu)a = [Q + \mu(R + R^T) + \mu^2 T]a = 0 \quad (1-12b)$$

$$|D(\mu)| = |Q + \mu(R + R^T) + \mu^2 T| = 0 \quad (1-13b)$$

由于系数 C_{ijk} 组成正定矩阵,故由上式知, μ 只能取共轭复根。不失一般性,取

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0; \mu_{k+3} = \bar{\mu}_k, k = 1, 2, 3 \quad (1-15)$$

由此可知,存在六个复变数

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2, z_{k,1} = 1, z_{k,2} = \mu_k, z_{k+3} = \bar{z}_k, k = 1, 2, 3 \quad (1-16)$$

对应每个 μ_k 值,由式(1-12)可求得一组 $a_k = [a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}]^T$ 和相应的 $f_k(z_k)$,引入

$$A = [a_1, a_2, a_3], f(z_*) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)]^T \quad (1-17)$$

式中 A 为 3×3 的矩阵,且 $A_{ij} = a_{ji}$, $f(z_*)$ 为有 3 个分量的矢量,且每个分量的自变量不同。利用线性叠加原理,计及 U 是实数,解可写成

$$U = [u_i]^T = 2\text{Re} \sum_{j=1}^3 a_j f_j(z_j) = 2\text{Re}[Af(z_*)] \quad (1-18)$$

上式中 $a_j f_j(z_j)$ 是一种矢量表示方式,表示 $\mu = \mu_j$ 时的解。由于上式中出现 3 个相同的指标,难以用通常的求和记号表示,所以仍引入记号 $\sum$ 。 $Af(z_*)$ 是一种矩阵表示方式。对于大多数工程问题,式(1-18)中的 $f_j(z_j)$ 可采用相同的形式,取成 $f_j(z_j) = f(z_j)q_i$, 式中 q 为常数矢量。因而式(1-18)又可写成

$$U = 2\text{Re}[A\langle f(z_*) \rangle q], \langle f(z_*) \rangle = \text{diag}[f(z_1), f(z_2), f(z_3)], q = [q_1, q_2, q_3]^T \quad (1-19)$$

引入广义应力函数 Φ , 使

$$\sigma_{i1} = -\Phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \Phi_{i,1} \quad (1-20)$$

则不计体积力时的静态问题, 力学平衡方程自动满足。由式(1-1)中的本构方程求出应力, 代入式(1-20)可得

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T = 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 b_j f_j(z_j) = 2\operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*)] \\ b_j &= (\mathbf{R}^T + \mu_j \mathbf{T})\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2, b_3] \end{aligned} \quad (1-21)$$

更严格地用多复变函数的数学理论来处理问题, 还需要深入探讨。

1.2.4 各向同性弹性体中裂纹端部的渐近场^[9]

无限各向同性弹性体中存在一椭圆孔洞的解是

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \Gamma R \left(\zeta - \frac{m}{\zeta} \right) - \bar{\Gamma}' R \frac{1}{\zeta} \\ \psi(\zeta) &= \Gamma' R \zeta - 2\Gamma R \frac{(1+m^2)}{\zeta^2 - m} \zeta - \bar{\Gamma}' R \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)} \end{aligned} \quad (1-22)$$

式中

$$\begin{aligned} z = \omega(\zeta) &= R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{2} \\ \Gamma &= \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) - 2i\sigma_{12}^\infty \end{aligned} \quad (1-23a)$$

a, b 分别为椭圆的半长轴和半短轴, $\omega(\zeta)$ 是把 z 平面上椭圆的外部保角变换到复平面 ζ 上单位圆周外部的变换函数; z 平面上的椭圆边界变换到 ζ 平面上的单位圆周。对于裂纹, 有

$$b = 0, \quad R = \frac{a}{2}, \quad m = 1, \quad z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (1-23b)$$

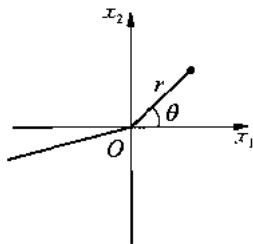


图 1-4 裂尖的局部坐标系

把解代入式(1-6), 可得应力场和位移场。把坐标原点 O 取在裂尖的局部坐标系中(图 1-4), 令 $z = re^{i\theta}$, 当 $r \rightarrow 0$ 时便得裂尖渐近场

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{13} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1-24)$$

和

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{E_1} T r \cos \theta \\ u_2 &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\nu_1}{E_1} T r \sin \theta \\ u_3 &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1-25)$$

式中 K_I , K_{II} , K_{III} 为三种裂纹变形类型的 I 型、II 型和 III 型应力强度因子, T 为常应力。上式表明, 平面问题的 I 型和 II 型是相互耦合的, 面外剪切是独立的。由式(1-24)推出

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \Big|_{\theta=0}, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} \Big|_{\theta=0}, \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23} \Big|_{\theta=0} \quad (1-26)$$

1.2.5 能量释放率^[9, 10]

对于线弹性或小范围屈服情况, 裂纹扩展的能量准则为

$$\tilde{G} = \tilde{R}, \quad \tilde{G} = -\frac{\partial(U-W)}{\partial a}, \quad \tilde{R} = \frac{d(\gamma_s + \gamma_p)}{da} \quad (1-27)$$

式中 $\tilde{G}$ 为能量释放率, $\tilde{R}$ 为裂纹扩展阻力, U 为弹性应变能, W 为外力所做的功, γ_s 为形成新裂纹所需的表面能, γ_p 为形成新裂纹所需的裂尖区塑性屈服功。计算 $\tilde{G}$ 时, 如局部坐标原点取在裂纹虚扩展后的裂尖处(图 1-5), 由式(1-24)、(1-25)和(1-27), 按下式计算得

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \Sigma_2^T(\Delta - r, 0) \cdot [u^+ - u^-] dr = \frac{1}{E_1} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \\ E_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\text{平面应变}), \quad E_1 = E (\text{平面应力}) \end{aligned} \quad (1-28a)$$

式中 Δ 为裂纹虚扩展的微长度, $\Sigma_2(\Delta - r, 0)$ 为裂纹虚扩展前裂尖前方 x_1 轴上的应力; $u^+ = u(r, \pi)$, $u^- = u(r, -\pi)$, $u^+ - u^-$ 为裂纹虚扩展后的裂尖后方上下表面的位移差。如果局部坐标原点取在裂纹虚扩展前的裂尖处, 则式(1-28a)应改为

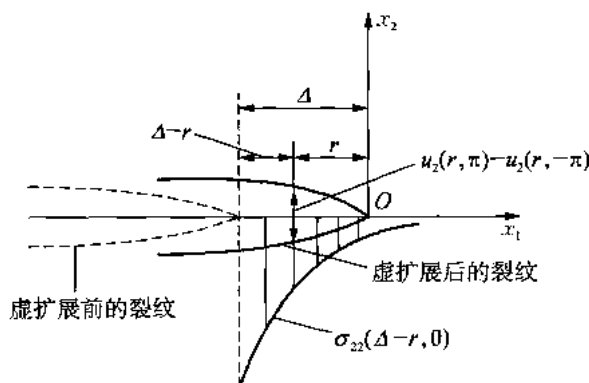


图 1-5 裂尖能量释放率的计算图

$$\tilde{G} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \boldsymbol{\Sigma}_2^T(r_1, 0) \cdot (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) dr_1 = \frac{1}{E_1} (K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2) + \frac{1}{2G} K_{\text{III}}^2 \quad (1-28b)$$

式中 $r_1 = \Delta - r$, $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(\Delta - r_1, \pi)$, $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}(\Delta - r_1, -\pi)$ 。

通常断裂力学中广泛引入与积分路线无关的围绕裂尖的 J 积分

$$J = \int_{\Gamma} (u n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds = \int_{\Gamma_0} (u n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds, \quad U = \int_a u da \quad (1-29)$$

式中 Γ 为任一条包围裂尖的围线, u 为应变能密度, Γ_0 为一无限接近裂尖的围线。在线弹性或小范围屈服情况的断裂力学中, 式(1-29)中的 J 积分值和式(1-28)中的 $\tilde{G}$ 值是相同的。事实上, 当裂纹相似扩展时, 如扩展前的解是 $u_i = u_i(K_i, x_1, x_2)$, 则扩展 Δa 后的解为 $u_i = u_i(K_i, x_1 - a, x_2)$, 故有 $\partial u_i / \partial a = -\partial u_i / \partial x_1$, 所以按式(1-27)有

$$\tilde{G} = \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} = \int_a \frac{\partial u}{\partial x_1} da - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \int_{\Gamma} (u n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds = J$$

1.3 有限变形^[4, 11]

关于有限变形的理论有许多参考文献, 本处只给出一些基本公式。

我们选取自然状态的物体构形为初始构形, 和它固结在一起的坐标系称作物质坐标系或 Lagrange(拉格朗日)坐标系, 坐标用大写的 X 表示, 其中的物理量用上方带一短横“—”的变量表示, 下标用大写字母表示; 选取变形后的物体构形为现时构形, 在和空间固结在一起的空间坐标系或 Euler(欧拉)坐标系中描写, 坐标用小写的 x 表示, 其中的物理量用上方不带短横“—”的变量表示, 下标用小写字母表示。如 ρ , ρ_e , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ 分别表示在现时构形中的质量密度、自由电荷密度、Euler 或 Cauchy(柯西)应力、小应变、电场强度和电位移, 而用字母上方带小横“—”的量 $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}_e$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{D}}$ 分别表示在初始构形中的相应量, 其中 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 分别为 Kirchhoff(克希霍夫)应力和 Green(格林)应变; 本书中物质坐标系和空间坐标系将取成同一个坐标系, 由于两种构形取同一坐标系, 故 $\mathbf{u}$, φ 在现时构形和初始构形中是相同的, 即 $\bar{u}_i = u_i$, $\bar{\varphi} = \varphi$ 。对于不带微分记号的量有 $X_i = X_i$, $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$ 等, 为了方便, 它们同时在本文中使用。但要注意变量对大、小写下标的微分是不同的, 如 $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_m \cdot \partial x_m / \partial X_j = u_{i,m} x_{m,j}$, $x_{i,j} = \partial x_i / \partial X_j$ 等。

现时构形中的位置矢量 $\mathbf{x}$ 由物质坐标系中的位置矢量 $\mathbf{X}$ 和时间 t 确定, 即

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (1-30)$$

式中 $\mathbf{u}$ 为位移。称 $\mathbf{F}$ 为变形梯度, 是两点张量, 是在初始和现时两种构形中描写的量

$$\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}, \quad F_{kL} = x_{k,L} = \delta_{kL} + u_{k,L}, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1-31)$$

称 $\bar{\mathbf{C}}$ 为 Green 变形张量, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为 Green 应变, 它们的表达式是

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \bar{C}_{KL} = F_{mK} F_{mL} = \delta_{KL} + u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{KL} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (x_{m,K} x_{m,L} - \delta_{KL}) = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}) \end{aligned} \quad (1-32)$$