经纶学典

总主编◎李朝东

修订版

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

必修1

读者出版集团
DPGC.L
甘肃少年儿童出版社

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：李树政

人教A版

高中数学

必修 1

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材解析:人教版.高中数学.1:必修/李朝东主编.——兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.5

ISBN 978-7-5422-2949-6

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第075013号

责任编辑:伏文东

封面设计:杭永鸿

教材解析·高中数学

必修1 人教A版

李朝东 主编

甘肃少年儿童出版社出版发行

(730030 兰州市读者大道568号)

0931-8773255

皖南海峰印刷包装有限公司

开本 880毫米×1230毫米 1/16 印张 13 字数 260千

2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷

印数:1~5 000

ISBN 978-7-5422-2949-6 定价:24.00元

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编 者

QIANYAN

目录

MULU

第一章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

A 教材梳理

知识点一 集合的含义

在现实生活中,给某类事物以总称是很常见的,如水果、班委会、家用电器、家具、南海中学、高一(1)班等.在数学中,我们有时也把一组对象作为一个整体来考虑,如教材中提到的"到一个定点的距离等于定长的所有点的全体".一般地,我们把研究的对象统称为元素(element),把一些元素组成的总体叫做集合(set)(简称集).

我们看到,这种定义有别于我们以前学习过的数学定义严谨、简洁的特征,而是用了"一般地"这个词汇,即它是描述性的定义.这是因为集合是数学中最原始的定义,是一切数学理论的基石,正如平面几何中的公理,是不需证明的.

注意:(1)集合是一个"整体".

(2)构成集合的对象必须是"确定"的,其中"确定"是指构成集合的对象具有非常明确的特征,这个特征不是模棱两可的.

以上两条是判定某些对象能否构成集合的标准.一般地,判定一组对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 能否构成集合,就是要看给定对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是否具有一个确定的特征,如果有,就能构成集合;如果没有,就构不成集合.

如"全世界所有的高个子"这一组对象就构不成集合,因为"高个子"这个标准不明确.而"全世界身高1.75 m的所有人"这一组对象能构成集合,因为"身高1.75 m"是一个确定的标准.

(3)一般用花括号"{}"表示集合,也就是赋予了符号"{}"新的含义:表示"所有的""全部的",具有共同特征的研究对象都在花括号内.

例如:{负数}表示所有小于0的实数组成的集合.{圆}表示平面内所有到定点的距离等于定长的点的轨迹,即所有的圆.

但以下表示方法是错误的:$A=\{$所有的梯形$\}$,$B=\{$所有的纯虚数$\}$,因为符号"{}"已有"所有的"的含义.

知识点二 集合中元素的特性

1. 元素的确定性

研究对象的确定也即确定了区分的标准,换句话说,给定的集合,它的元素必须是确定的,任何一个元素在不在集合中是确定的,标准不能含混不清、模棱两可.如"高个子同学","高个子"便是一个含混不清的概念,具有相对性,多高才算高呢?170 cm,还是180 cm?再如"小的河流",这个"小"具体指的是什么呢?是流量还是长度,没有明确的标准.

2. 元素的互异性

即集合中的元素是互不相同的,不能重复出现.之所以这样也是因为研究对象标准的确定,如水果这个名称,我们定义其标准是不同的类,即苹果、香蕉、橘子、桃子、荔枝等,那么对于苹果而言,不同大小、不同颜色的苹果都只能算是苹果这个集合中的一个元素.

3. 元素的无序性

即集合中的元素是没有顺序的.这个性质主要是从集合表示方法的角度来强调的.如$\{1,2\}$,$\{2,1\}$都可以表示"方程$(x-1)(x-2)=0$的解集",就是说$\{1,2\}$,$\{2,1\}$表示同一个集合.

知识点三 集合与元素的符号

1. 集合通常用大写拉丁字母$A,B,C,\cdots$表示,元素用小写拉丁字母$a,b,c,\cdots$表示.

如果a是集合A中的元素,就说a属于(belong to)集合A,记作$a\in A$.

如果a不是集合A中的元素,就说a不属于(not belong to)集合A,记作$a\notin A$.

2. 数学中一些常用的数集及其记法如下：

全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbf{N}$；

所有正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$.

知识点四　元素与集合的关系

元素与集合有属于（$\in$）和不属于（$\notin$）两种关系；如果 a 是集合 A 的元素，则 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则 $a\notin A$.

注意：(1) $a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性，可知对任何 a 与 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2) 符号“$\in$”“$\notin$”是表示元素与集合之间的关系的，不能用来表示集合与集合之间的关系，这一点千万要记准.

知识点五　集合的表示法

集合的表示方法常见的有自然语言法、列举法、描述法.

1. 自然语言法

用文字叙述的形式描述集合的方法. 使用此方法要注意叙述清楚即可，如由所有正方形构成的集合，就是用自然语言表示的，不能叙述成“正方形”. 再如课本 P4 思考(1)，集合 $\{2,4,6,8\}$ 用自然语言叙述为：大于等于 2 且小于等于 8 的偶数构成的集合.

2. 列举法

研究一个集合当然是要去研究它的元素，那么表示一个集合，自然就是想着把它的元素交待清楚. 比如高一(1)班的全体同学，会有一个花名册，将每个成员的名字一一列出来，再如我们去酒楼或饭馆吃饭，会有一个菜谱将他们的菜式一一列出，像这样，将集合中的元素一一列举出来的方法就叫做列举法. 如元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集合，记为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

此外，值得一提的是，根据集合中元素的个数还可以将集合分为有限集和无限集. 当集合中元素的个数有限时，称之为有限集；反之，当集合中元素的个数无限时，则称之为无限集.

注意：(1) 适用条件：有限集或元素间存在明显规律的无限集. 需要说明的是，对于有限集，由于元素的无序性，如集合 $\{1,2,3,4\}$ 与 $\{2,1,4,3\}$ 表示同一集合，但对于具有一定规律的无限集 $\{1,2,3,4,\cdots\}$，就不能写成 $\{2,1,4,3,\cdots\}$.

(2) 元素与元素间用“,”分隔开.

(3) 集合中的元素必须是确定的（确定性）.

(4) 不必考虑元素出现的顺序（无序性）.

(5) 集合中的元素不能重复出现（互异性）.

(6) 集合中的元素可以代表任意具体的事物（任意性）.

(7) x 与 $\{x\}$ 的含义不尽相同，x 表示集合 $\{x\}$ 的元素，即 $x\in\{x\}$，而 $\{x\}$ 表示只含一个元素 x 的单元素集.

3. 描述法

并非所有的无限集都具有明显的规律，那么如何来表示这些集合呢？比如，杭州西湖里的鱼，黄山上的松树，我们不便一一将它们列出来，为此需要用另一种表示方法. 我们可以通过将集合中元素的也只有这个集合才有的共同特征描述出来，这种方法我们把它称为描述法. 用符号来表示便是 $\{x\in A\mid P(x)\}$，其中 x 表示集合中的代表元素，A 指的是代表元素 x 的范围；$P(x)$ 则是表示代表元素 x 的共同特征，其中“$\mid$”表示将代表元素与其特征分隔开来，使得意思明确.

注意：(1) 写清楚该集合中的代表元素的代号，如集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid x<1\}$ 不能写成 $\{x<1\}$.

(2) 集合与它的代表元素所采用的字母名称无关，只与代表元素的形式有关，如 $\{x\in\mathbf{R}\mid x<1\}$ 也可以写成 $\{y\in\mathbf{R}\mid y<1\}$，当然还可以写成 $\{a\in\mathbf{R}\mid a<1\}$.

(3) 多层描述时，应当准确使用“且”“或”等表示元素之间关系的词汇，如 $\{x\in\mathbf{R}\mid x<1$ 或 $x>2\}$ 等.

(4) 集合中不能出现未被说明的符号，如 $\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k\}$ 中的 k 未被说明，故此集合元素是不明确的.

(5) 所有描述的内容都要写在集合符号内，如 $\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k\}$，$k\in\mathbf{Z}$ 便不符合要求，应将 $k\in\mathbf{Z}$ 写进集合中去，即 $\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$.

(6) 如果从上下文的关系来看，表示代表元素的范围，如 $x\in\mathbf{R}$ 是明确的，$x\in\mathbf{R}$ 可以省略，以求简洁.

知识点六　集合相等

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的. 当已知两个集合相等时，这两个集合的元素是完全相同的：①个数相等；②对于其中一个集合的任一个元素，在另一个集合中也都可以找到这个元素. 例如，集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,-1,1\}$，则 $A=B$；集合 $A=\{x\mid -3x-2\leqslant 0\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant -\dfrac{2}{3}\right\}$，则 $A=B$.

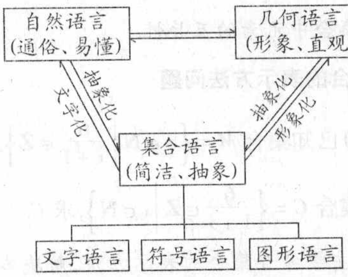
注意：(1) 两个集合是否相等，不能从集合的形式上看，而应该判断出这两个集合的所有元素，再根据集合相等的定义进行判断. 例如，集合 $A=\{x\mid x^2-4x-5=0\}$，$B=\{-1,5\}$，则 $A=B$.

(2) 集合相等是集合之间的一种关系，在后面还要进一步学习集合之间的其他关系.

B 教材拓展

拓展点一　集合语言

集合语言是现代数学的基本语言,也就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言.集合语言与其他语言的关系以及集合语言的构成如图所示:



集合的三种语言之间可进行相互转化,在解决集合问题时,一般是将集合符号语言转化为图形语言、文字语言,这样有助于弄清集合是由哪些元素构成的,有助于提高分析和解决问题的能力.

拓展点二　解决集合问题的关键

解决集合问题的关键是弄清集合是由哪些元素构成的.如何弄清呢?关键在于把抽象问题具体化、形象化.也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示,或用图形法来表示抽象的集合,或用数轴来表示这些集合;再如,当集合的元素为有序实数对时,可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等.

C 典型题解

▶问题一　集合的有关概念问题

例题 1　下列各组对象不能构成集合的是　　(　　)

A. 某校大于50岁的教师　　B. 某校30岁的教师

C. 某校的年轻教师　　D. 某校的女教师

[解析]　本题主要考查集合中元素的确定性,解题的关键是充分理解集合的概念.某校的任意一位教师,可以明确地判断是不是大于50岁,是不是30岁,是不是女教师,但是"年轻"没有明确的标准,某一位教师是否是年轻教师无法确定,因此"某校的年轻教师"不能构成集合.∴由集合元素必须满足确定性可知不能构成集合的为C.

[答案]　C

[点评]　在本题的判断中,要充分理解集合的概念,注意集合中元素的确定性.

例题 2　由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中,最多含有元素的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

[解析]　本题主要考查集合中元素的个数问题,解决本题的关键是从集合中元素的互异性入手考虑,若是相同的元素,在集合中只能用同一个元素表示.$\because \sqrt{x^2}=|x|,-\sqrt[3]{x^3}=-x$,故当 $x=0$ 时,这几个实数均为0;当 $x>0$ 时,它们分别是 $x,-x,x,x,-x$;当 $x<0$ 时,它们分别是 $x,-x,-x,-x,-x$,均最多表示两个不同的数.故集合中的元素最多为2个,故选A.

[答案]　A

[点评]　在解题过程中容易混淆 $|x|$ 与 x 及 $-x$,实际上 $|x|$ 只能为 x 与 $-x$ 其中之一.

▶问题二　集合中元素的特性问题

例题 3　判断下列说法是否正确,并说明理由.

(1)$1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,\frac{1}{2}$ 这些数组成的集合有五个元素;

(2)由 a、b、c 组成的集合与由 b、a、c 组成的集合是同一个集合.

[解析]　本题主要考查对集合的概念和集合中元素的性质的理解.解决本题的关键是看集合中的元素是否具有确定性和互异性.

[答案]　(1)不正确.对于一个给定的集合,它的元素必须是互异的,即集合中的任何两个元素都是不同的,此集合是由三个元素组成的集合.

(2)正确.集合中的元素相同,只是顺序不同.它们都表示同一个集合.

[点评]　解此类判断题,主要方法就是应用集合的概念和性质.

例题 4　已知 $x^2\in\{1,0,x\}$,求实数 x 的值.

[解析]　由确定性可知 $x^2=0,1$ 或 x,由互异性可知 $x\neq1,0$.

[答案]　若 $x^2=0$,则 $x=0$,此时集合为 $\{1,0,0\}$,不符合集合中元素的互异性,舍去.

若 $x^2=1$,则 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时,集合为 $\{1,0,1\}$,舍去.

当 $x=-1$ 时,集合为 $\{1,0,-1\}$,符合.

若 $x^2=x$,则 $x=0$ 或 $x=1$.由上可知,$x=0$ 和 $x=1$ 都舍去.

综上所述,$x=-1$.

[点评]　既要应用元素的确定性、互异性和无序性解题,又要利用它们检验解的正确与否,特别是互异性,最易被忽视,必须在学习中引起足够重视.

例题 5　含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$.求 $a^{2006}+b^{2007}$ 的值.

［解析］ 本题主要考查集合中元素的互异性，解题的关键是明确两个集合中的元素只是顺序不同，两个集合中的元素按照一定的对应是相等的.

［答案］ 由$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，得$a\neq1$，且$a\neq0$.

$\therefore\begin{cases}a^2=1,\\a=a+b,\\\frac{b}{a}=0\end{cases}$或$\begin{cases}a+b=1,\\a^2=a,\\\frac{b}{a}=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$（舍去）.

$\therefore a^{2006}+b^{2007}=(-1)^{2006}=1$.

［点评］ 两个集合相同只是元素的顺序不同，在解题过程中要注意$a\neq1$，且$a\neq0$.

▶问题三　元素与集合的关系问题

例题 6　给出下列关系：

①$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$；③$|-3|\notin\mathbf{N}^*$；④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

其中正确的个数为　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

［解析］ 本题主要考查元素与集合之间的关系问题. 解题的关键是弄清几个常见数集的表示方法. ①正确；②正确；③不正确；④不正确. 故选 B.

［答案］ B

［点评］ 研究数与数集的关系，应首先明确是什么数集，再判断数与数集的关系.

例题 7　设集合$A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$. 若$a\in A$，$b\in B$，试判断$a+b$与$A$，$B$的关系.

［解析］ $\because A$是偶数集，B是奇数集，$\therefore a$是偶数，b是奇数，从而$a+b$是奇数.

［答案］ $\because a\in A$，$\therefore a=2k_1(k_1\in\mathbf{Z})$.

$\because b\in B$，$\therefore b=2k_2+1(k_2\in\mathbf{Z})$.

$\therefore a+b=2(k_1+k_2)+1$.

又$\because k_1+k_2\in\mathbf{Z}$，$\therefore a+b\in B$. 从而$a+b\notin A$.

例题 8　数集A满足条件：若$a\in A$，则$\frac{1+a}{1-a}\in A(a\neq1)$. 若$\frac{1}{3}\in A$，求集合中的其他元素.

［解析］ 已知$\frac{1}{3}\in A$，$\frac{1+a}{1-a}\in A$，将$\frac{1}{3}$代入$\frac{1+a}{1-a}$即可求得集合中的另一个值，依次循环，可得集合中的其他元素的值.

［答案］ $\because\frac{1}{3}\in A$，$\therefore\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\in A$. $\therefore\frac{1+2}{1-2}=-3\in A$.

$\therefore\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}\in A$. $\therefore\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\in A$.

故当$\frac{1}{3}\in A$时，集合中的其他元素为2、-3、$-\frac{1}{2}$.

［点评］ (1)求集合中的元素就是求满足集合中元素的特征的值.

(2)注意集合中元素的互异性.

▶问题四　集合的表示方法问题

例题 9　(1)已知集合$M=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{6}{x+1}\in\mathbf{Z}\right\}$，求$M$；

(2)已知集合$C=\left\{\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\,\middle|\,x\in\mathbf{N}\right\}$，求$C$.

［解析］ 本题主要考查集合的表示方法，解决本题的关键是理清集合的代表元素和元素满足的特征. 集合M、C中元素的形式不一致，要正确认识. 集合M中的元素是自然数x，满足条件的$\frac{6}{x+1}$是整数；集合C中的元素是整数$\frac{6}{1+x}$，满足条件的x是自然数.

［答案］ (1)$\because x\in\mathbf{N}$，且$\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}$. $\therefore 1+x=1,2,3,6$.

$\therefore x=0,1,2,5$. $\therefore M=\{0,1,2,5\}$.

(2)结合(1)知，$\frac{6}{1+x}=6,3,2,1$. $\therefore C=\{6,3,2,1\}$.

［点评］ 对符号语言所表达含义的理解在数学中的要求是很高的，要逐步提高对符号语言的认识.

例题 10　下面三个集合：①$\{x|y=x^2+1\}$；②$\{y|y=x^2+1\}$；③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(1)它们是不是相同的集合？

(2)它们各自的含义是什么？

［解析］ 对于用描述法给出的集合，首先要清楚集合中的代表元素是什么，元素满足什么条件.

［答案］ (1)由于三个集合的代表元素互不相同，$\therefore$它们是互不相同的集合.

(2)集合①$\{x|y=x^2+1\}$的代表元素是x，满足条件$y=x^2+1$中的$x\in\mathbf{R}$，$\therefore\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$；

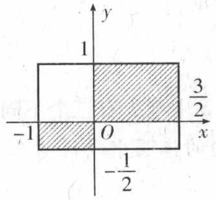
集合②$\{y|y=x^2+1\}$的代表元素是y，满足条件$y=x^2+1$的y的取值范围是$y\geqslant1$，$\therefore\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant1\}$；

集合③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$的代表元素是(x,y)，可以认为是满足$y=x^2+1$的数对(x,y)的集合. 也可以认为是坐标平面内的点(x,y)构成的集合，且这些点的坐标满足$y=x^2+1$，$\therefore\{(x,y)|y=x^2+1\}=\{P|P$是抛物线$y=x^2+1$上的点$\}$.

［点评］ 用描述法表示的集合，一要看集合的代表元素是什

么，它反映了集合元素的形式；二要看元素满足什么条件．数集和点集常常会混淆．用描述法表示数集时，其格式为$\{x|P(x)\}$，在竖线前面是一个字母，而表示点集时，其格式为$\{(x,y)|P(x,y)\}$，在竖线前面是一个有序数对；而用列举法表示数集时，集合中的元素是单个的数字，表示点集时，集合中的元素是有序数对，因此在处理与数集或点集有关的集合问题时，一定要先看集合中的元素的格式是数还是有序数对．

例题 11 用描述法表示如图所示阴影部分（含边界）的点的坐标的集合．



［解析］ 本题是用图形语言给出的问题，要求把图形语言转换为符号语言．

［答案］ 用描述法表示为（即用符号语言表示）：

$$\left\{(x,y)\;\middle|\; -1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\text{且 } xy\geqslant 0\right\}.$$

［点评］ 首先要注意此题的代表元素(x,y)是点的坐标形式，然后仔细分析横、纵坐标满足的条件．

▶问题五 创新、拓展、探究问题

例题 12 设P,Q为两个非空实数集合，定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若$P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则$P+Q$中元素的个数是 （　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

［解析］ 根据题意，P和Q均为有限集，求$P+Q$中元素的个数，只需把$P+Q$中所取到的每个元素列举出来即可．$\because P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，$\therefore$当$a=0$且$b=1,2,6$时，$a+b=1,2,6$；当$a=2$且$b=1,2,6$时，$a+b=3,4,8$；当$a=5$且$b=1,2,6$时，$a+b=6,7,11$．由上可知，只有一个相同的元素6，其他均不相同，故$P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$．其所含元素个数为8．

［答案］ B

［点评］ (1)当集合中的元素个数较少时采用列举法．

(2)会把数学语言与集合语言进行相互转化．

例题 13 非空集合G关于运算$\oplus$满足：(1)对任意$a,b\in G$，都有$a\oplus b\in G$；(2)存在$e\in G$，使得对于一切$a\in G$，都有$a\oplus e=e\oplus a=a$，则称G关于运算$\oplus$为"融洽集"．现给出下列集合与运算：

①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$为整数的加法；

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$为整数的乘法；

③$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$为多项式的加法．

其中G关于运算$\oplus$为"融洽集"的是______．（写出所有"融洽集"的序号）

［解析］ ①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$为整数的加法，满足任意$a,b\in G$，都有$a\oplus b\in G$，且令$e=0$，有$a\oplus 0=0\oplus a=a$，$\therefore$①符合要求；

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$为整数的乘法，若存在$e\in G$，使得$a\oplus e=e\oplus a=a$，则$e=1$，与$e\in G$矛盾，$\therefore$②不符合要求；

③$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$为多项式的加法，两个二次三项式相加得到的可能不是二次三项式，$\therefore$③不符合要求．

$\therefore G$关于运算$\oplus$为"融洽集"的是①．

［答案］ ①

［点评］ 本题主要考查元素与集合的关系，以及分析问题和解决问题的能力．

例题 14 已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$．

(1)若A中只有一个元素，求a的值；

(2)若A中最多有一个元素，求a的取值范围；

(3)若A中至少有一个元素，求a的取值范围．

［解析］ 本题主要考查集合中元素的个数问题，解决本题的关键是讨论方程$ax^2+2x+1=0$的实数根的个数，从而确定参数a的取值范围．

［答案］ (1)当$a=0$时，原方程变为$2x+1=0$，此时$x=-\frac{1}{2}$，符合题意；当$a\neq 0$时，方程$ax^2+2x+1=0$为一元二次方程，$\Delta=4-4a=0$，即当$a=1$时，原方程的解为$x=-1$，符合题意．

故当$a=0$或$a=1$时，原方程只有一个解，此时A中只有一个元素．

(2)A中最多含有一个元素，即A中有一个元素或A中没有元素．

当$\Delta=4-4a<0$，即$a>1$时，原方程无实数解．

结合(1)知，当$a=0$或$a\geqslant 1$时，A中最多有一个元素．

(3)A中至少有一个元素，即A中有一个或两个元素．由$\Delta>0$，得$a<1$，结合(1)可知，$a\leqslant 1$．

［点评］ "$a=0$"这种情况容易被忽视，对于方程"$ax^2+2x+1=0$"有两种情况：一是"$a=0$"，即它是一元一次方程；二是"$a\neq 0$"，即它是一元二次方程，也只有在这种情况下才能用判别式Δ来解决问题．

例题 15 若集合$A=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，$M=\{x|x=6n+3,n\in\mathbf{Z}\}$．

(1)若$m\in M$，问是否有$a\in A,b\in B$，使$m=a+b$？

(2)对于任意 $a\in A,b\in B$,是否一定有 $a+b=m$ 且 $m\in M$? 证明你的结论.

[解析] (1)由 $m\in M$,可写出 m 的表达式,再根据 A、B 中元素特征,寻找 a、b;(2)可先表示 a、b,然后找 $a+b$,最后观察 $a+b$ 的形式.

[答案] (1)由 $m=6k+3=3k+1+3k+2(k\in\mathbf{Z})$,

令 $a=3k+1,b=3k+2$,则 $m=a+b$. 故若 $m\in M$,一定有 $a\in A,b\in B$,使 $m=a+b$ 成立.

(2)设 $a=3k+1,b=3l+2,k,l\in\mathbf{Z}$,则 $a+b=3(k+l)+3$.

$\therefore$ 当 $k+l=2p(p\in\mathbf{Z})$ 时,$a+b=6p+3\in M$,此时有 $m\in M$,使 $a+b=m$ 成立;当 $k+l=2p+1(p\in\mathbf{Z})$ 时,$a+b=6p+6\notin M$,此时不存在 m 使 $a+b=m$ 成立.

[点评] 在探索过程中,要紧抓各集合元素的特征,利用构造法去寻找,同时注意分类讨论.

例题 16 设 S 是由满足下列条件的实数所构成的集合:①$1\notin S$;②若 $a\in S$,则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 请解答下列问题:

(1)若 $2\in S$,则 S 中必有另外两个数,求出这两个数;

(2)求证:若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$;

(3)在集合 S 中元素能否只有一个?请说明理由;

(4)求证:集合 S 中至少有三个不同的元素.

[解析] 本题主要考查利用所给集合满足的性质解决应用问题,解决本题的关键是运用转化思想,将问题等价转化.

[答案] (1)$\because 2\in S,2\neq1,\therefore \frac{1}{1-2}=-1\in S$.

$\because -1\in S,-1\neq1,\therefore \frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$.

$\because \frac{1}{2}\in S,\frac{1}{2}\neq1,\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$.

$\therefore -1,\frac{1}{2}\in S$,即集合 S 中另外两个数为 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)$\because a\in S,\therefore \frac{1}{1-a}\in S$.

$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in S$($a\neq0$,$\because$ 若 $a=0$,则 $\frac{1}{1-a}=1\in S$,不合题意).

(3)集合 S 中的元素不能只有一个.

理由:假设集合 S 中只有一个元素.

则根据题意知 $a=\frac{1}{1-a}$,即 $a^2-a+1=0$. 此方程无实数解,$\therefore a\neq\frac{1}{1-a}$. $\therefore$ 集合 S 中不能只有一个元素.

(4)由(2)知 $a\in S$ 时,$\frac{1}{1-a}\in S,1-\frac{1}{a}\in S$.

现证明 $a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a}$ 三个数互不相等.

①若 $a=\frac{1}{1-a}$,即 $a^2-a+1=0$,方程无解,$\therefore a\neq\frac{1}{1-a}$;

②若 $a=1-\frac{1}{a}$,即 $a^2-a+1=0$,方程无解,

$\therefore a\neq1-\frac{1}{a}$;

③若 $\frac{1}{1-a}=1-\frac{1}{a}$,即 $a^2-a+1=0$,方程无解,

$\therefore \frac{1}{1-a}\neq1-\frac{1}{a}$.

综上所述,集合 S 中至少有三个不同的元素.

[点评] 第(4)小题的证明中须说明三个数互不相等,否则证明欠严谨.

D 针对性练习

【基础题】

1. 给出以下五个对象,其中能构成集合的个数为 ( )

①你所在班中身高超过 1.75 m 的同学;②所有正三角形;③数学课本中的所有习题;④所有有理数;⑤2010 年高考试卷中的所有难题.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=1\end{cases}$ 的解组成的集合是 ( )

A. $\{2,1\}$ B. $(2,1)$

C. $\{(2,1)\}$ D. $\{-1,2\}$

3. 由 $a^2,2-a,4$ 组成一个集合 A,A 中含有 3 个元素,则实数 a 的取值可以是 ( )

A. 1 B. -2 C. 6 D. 2

4. 下列集合表示方法正确的是 ( )

A. $\{1,2,2\}$

B. {全体实数}

C. $\{3,5\}$

D. 不等式 $x^2-5>0$ 的解集为 $\{x^2-5>0\}$

5. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

0 ______ $\mathbf{N}$,0 ______ $\varnothing$,$-\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{Z}$,π ______ $\mathbf{Q}$,

$\sin30°$ ______ $\mathbf{Q}$,$\cos30°$ ______ $\mathbf{Q}$.

6. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid-2\leq x\leq2\}$,$B=\{x^2-1\mid x\in A\}$,则集合 B 用列举法可表示为______.

【综合提升题】

7. 定义集合运算:$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$,设集

合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为（　　）

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

8. 已知 x、y、z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合是 M，则下列判断正确的是（　　）

A. $0\notin M$　　B. $2\in M$

C. $-4\notin M$　　D. $4\in M$

9. 集合 $A=\{$一条边长为1，一个角为40°的等腰三角形$\}$中的元素的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 设集合 $A=\left\{x\left|x=\frac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}\right.\right\}$，若 $x_1\in A$，$x_2\in A$，则必有（　　）

A. $x_1+x_2\in A$　　B. $x_1x_2\in A$

C. $x_1-x_2\in A$　　D. $\frac{x_1}{x_2}\in A$

11. 已知集合 $M=\{m|m=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Q}\}$，则下列元素中属于集合 M 的元素的个数是（　　）

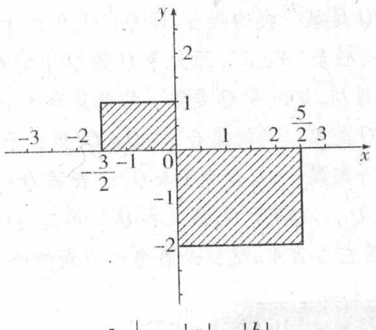
①$m=1+\sqrt{2}\pi$；　　②$m=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$；

③$m=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$；　　④$m=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,a\}$，当 $x\in A$ 时，若 $x-1\notin A$ 且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个“孤立”元素，现已知 A 中有一个“孤立”元素，试写出符合题意的 a 值________.（若有多个 a 值，则只写出其中的一个即可）

13. 用描述法表示图中阴影部分（含边界）的坐标的集合为__________________.



14. 用列举法表示集合：$\left\{x\left|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b},a、b\text{为非零实数}\right.\right\}$.

15. 已知集合 $A=\{x|y=x\text{且}y=x^2+ax+b\}$，是否存在这样的实数 a,b，使得 $-1\in A$ 与 $3\in A$ 同时成立？如果存在，求出 a,b 的值；如果不存在，请说明理由.

16. 集合 M 的元素为自然数，且满足：如果 $x\in M$，则 $8-x\in M$，试回答下列问题：

(1)写出只有一个元素的集合 M；

(2)写出元素个数为2的所有集合 M；

(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个？

[参考答案]

1. D　解析：由于①②③④项中的对象具备确定性，∴①②③④能构成集合，⑤项不符合集合中元素的确定性，“难题”无标准.

2. C　解析：先求出方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 再写成集合的形式，注意集合的元素是有序实数对(2,1)，故选C.

3. C　解析：由题设知，a^2，$2-a$，4互不相等，即 $\begin{cases}a^2\neq 2-a,\\a^2\neq 4,\\2-a\neq 4,\end{cases}$ 解得 $a\neq-2$，且 $a\neq 1$，且 $a\neq 2$，故实数 a 的取值可以是6，故选C.

4. C　解析：选项A违背了集合中元素的互异性，选项B中全体实数本身就是集合，不能再加花括号，选项D用描述法表示解的集合，无代表元素.

5. $\in$　$\notin$　$\notin$　$\notin$　$\in$　$\notin$

6. $\{3,0,-1\}$　解析：∵ $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，∴ $B=\{3,0,-1\}$.

7. D　解析：(1)当 $x=0$ 时，无论 y 为何值，都有 $z=0$；(2)当 $x=1$，$y=2$ 时，由题意 $z=6$；(3)当 $x=1$，$y=3$ 时，由题意 $z=12$，故集合 $A\odot B=\{0,6,12\}$，元素之和为 $6+12=18$，选D.

8. D　解析：当 x、y、z 都大于零时，代数式的值为4.

9. D　解析：包括顶角为40°，底边长为1；顶角为40°，腰长为1；底角为40°，腰长为1；底角为40°，底边为1这四种情形.

10. B　解析：设 $x_1=\frac{1}{3^{n_1}}$，$x_2=\frac{1}{3^{n_2}}$，$n_1,n_2\in\mathbf{N}$，则 $x_1x_2=\frac{1}{3^{n_1+n_2}}$.

$\because n_1,n_2\in\mathbf{N}$,则 $n_1+n_2\in\mathbf{N}$,$\therefore x_1x_2\in A$.

11. B　解析:只有③$m=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是正确的.

12. 5　解析:由集合中"孤立"元素的定义知,0,1,2,3 均不是A的"孤立"元素,故只有a是A的"孤立"元素.故a只要不取$-1,0,1,2,3,4$中的值即可.答案不唯一.

13. $\left\{(x,y)\left|-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2},-2\leqslant y\leqslant 1\right.,且\ xy\leqslant 0\right\}$

14. 解:首先根据绝对值的意义化简 $x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$,

当 $a>0,b>0$ 时,$x=2$;

当 $a<0,b<0$ 时,$x=-2$;

当 $a>0,b<0$,或 $a<0,b>0$ 时,$x=0$.

故用列举法表示为$\{-2,0,2\}$.

15. 解:$\because A=\{x|y=x$ 且 $y=x^2+ax+b\}$,即 $A=\{x|x=x^2+ax+b\}=\{x|x^2+(a-1)x+b=0\}$.又 $-1\in A,3\in A$,即 $-1,3$ 是一元二次方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 的两个根,

$\therefore\begin{cases}-(a-1)=-1+3,\\ b=-1\times3,\end{cases}$即$\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$$\therefore$ 存在这样的实数 $a=-1,b=-3$,使 $-1\in A$ 与 $3\in A$ 同时成立.

16. 解:(1)M中只有一个元素,根据已知必须满足 $x=8-x$,$\therefore x=4$.故含一个元素的集合 $M=\{4\}$.

(2)当M中只含两个元素时,其元素只能是x和$8-x$,从而含两个元素的集合M应为$\{0,8\},\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}$.

(3)满足条件的M是由集合$\{4\},\{0,8\},\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}$中的元素组成,它包括以下情况:①由1个组成的有$\{4\},\{0,8\},\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}$共5个;②由2个组成的有$\{4,0,8\},\{4,1,7\},\{4,2,6\},\{4,3,5\},\{0,8,1,7\},\{0,8,2,6\},\{0,8,3,5\},\{1,7,2,6\},\{1,7,3,5\},\{2,6,3,5\}$共10个;③由3个组成的有$\{4,0,8,1,7\},\{4,0,8,2,6\},\{4,0,8,3,5\},\{4,1,7,2,6\},\{4,1,7,3,5\},\{4,2,6,3,5\},\{0,8,1,7,2,6\},\{0,8,1,7,3,5\},\{1,7,2,6,3,5\},\{0,8,2,6,3,5\}$共10个;④由4个组成的有$\{4,0,8,1,7,2,6\},\{4,1,7,2,6,3,5\},\{4,0,8,2,6,3,5\},\{4,0,8,1,7,3,5\},\{0,8,1,7,2,6,3,5\}$共5个;⑤由5个组成的有$\{4,0,8,1,7,2,6,3,5\}$共1个.共有$5+10+10+5+1=31$(个).

E 课后答案点拨

[练习(第5页)]

1. (1)$\in$　$\notin$　$\in$　$\notin$

(2)$\notin$

(3)$\notin$

(4)$\in$

2. (1)$\{-3,3\}$　(2)$\{2,3,5,7\}$　(3)$\{(1,4)\}$

(4)$\{x|4x-5<3\}=\{x|x<2\}$.

F 拓展阅读

理发师的头谁剃?

一个村子里只有一个理发师,在这个村子里有一条不成文的规定:凡是自己不替自己剃头的人必须由这个理发师剃.现在要问:这个理发师的头由谁去剃?

从逻辑上讲,只有两种可能性,理发师的头由别人剃,或由自己剃.现在深入分析如下:

如果是第一种可能性,理发师的头由别人剃,这意味着理发师自己不替自己剃,按照规定,他的头就应该由理发师剃,这和第一种可能性矛盾.

如果是第二种可能性,理发师的头由自己剃,但是规定了只有自己不替自己剃头的人才由理发师剃,这也是矛盾的.

这样一来,便产生了一个悖论,理发师的头由谁剃呢?由别人剃,不行,自己剃,也不行,这真是左右为难了.同样,直观的集合概念也会产生这种左右为难的事情.

把所有的集合分成两类:对一个集合A,如果$A\in A$(即A本身是A的一个元素),我们就说A是第一类的集合;凡不是第一类的集合,就说它是第二类的集合.

现在,我们设Q是由所有第二类的集合所组成的集合,即$Q=\{A|A\notin A\}$.用通常的话来说就是:Q是由具有性质"$A\notin A$"的那些集合A所组成的.我们要问:Q是第一类还是第二类?从逻辑上讲,回答这个问题只有两种可能性:Q是第一类的,或者Q是第二类的.

如果Q是第一类的集合,即$Q\in Q$,但由于Q中的任何元素A都具有性质"$A\notin A$".而如今Q是Q中的元素,亦必有"$Q\notin Q$"这一性质.这就和Q是第一类的集合矛盾.

如果Q是第二类的集合,即$Q\notin Q$,但由于凡具有性质"$A\notin A$"的集合都属于Q,如今$Q\notin Q$,这表明Q不具有"$Q\in Q$"的性质,故Q应该属于Q,这又和Q是第二类的集合矛盾.

这真是左右为难,这就是著名的罗素悖论.

G 五年高考回放

1 (2008·江西)定义集合运算:$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$.设$A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合$A*B$的所有元素之和为　(　　)

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

[解析]　本题考查了集合的性质.

$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$，而 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，

$\therefore A*B=\{0,2,4\}$，所有元素之和为6，故选 D.

[答案] D

2 （2007·全国Ⅰ）设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a$ 等于 （ ）

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

[解析] 本题主要考查集合的性质以及两个集合相等的定义. 由题意知 $a\neq0$ 且 $b\neq0$，$\therefore a+b=0$，这时 $\dfrac{b}{a}=-1$. 又 $1\in\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，$\therefore b=1$，$a=-1$，$b-a=2$，故选 C.

[答案] C

3 （2007·江西）若集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant0$ 且 $x-2y-1\leqslant0,x,y\in M\}$，则 N 中元素的个数为 （ ）

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

[解析] 由题意得(1)当 $x=y$ 时，有 $\begin{cases}x-2x+1\geqslant0,\\x-2x-1\leqslant0,\end{cases}$ 即 $-1\leqslant x\leqslant1$. 又 $x\in M$，则有序实数对 (x,y) 有两对；(2)当 $x\neq y$ 时，若 $x=0$，则有 $\begin{cases}0-2y+1\geqslant0,\\0-2y-1\leqslant0,\end{cases}$ 即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$. 又 $y\in M$，则有序实数对 (x,y) 不存在；若 $x=1$，则有 $\begin{cases}1-2y+1\geqslant0,\\1-2y-1\leqslant0,\end{cases}$ 即 $0\leqslant y\leqslant1$. 又 $y\in M$，$\therefore y=0$，则有序实数对 (x,y) 有一对；若 $x=2$，则有 $\begin{cases}2-2y+1\geqslant0,\\2-2y-1\leqslant0,\end{cases}$ 即 $\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{3}{2}$. 又 $y\in M$，$\therefore y=1$，则有序实数对 (x,y) 有一对. 综上所述，集合 N 中元素的个数为4.

[答案] C

1.1.2 集合间的基本关系

A 教材梳理

知识点一 子集

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.

这时，我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

注意：(1)“A 是 B 的子集”的含义：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由任意 $x\in A$，能推出 $x\in B$；

例如：$\{-1,1\}\subseteq\{-1,0,1,2\}$；$\{x|x$ 为北京人$\}\subseteq\{x|x$ 为中国人$\}$.

(2)当 A 不是 B 的子集时，我们记作 $A\not\subseteq B$（或 $B\not\supseteq A$），读作“A 不包含于 B”（或“B 不包含 A”）；

例如：$A=\{1,2,3\}$ 不是 $B=\{1,3,4,5\}$ 的子集，因为 A 中的元素2不是集合 B 中的元素.

(3)任何一个集合是它本身的子集. 因为对于任何一个集合 A，它的任何一个元素都属于集合 A 本身，记作 $A\subseteq A$.

(4)我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$，并规定：空集是任何集合的子集，即对于任一集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.

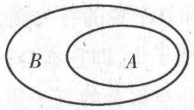
以上(3)(4)告诉我们，在求某一个集合的子集时，不要漏掉空集和它本身两种特殊情况.

(5)在子集的定义中，不能理解为子集 A 是 B 中的“部分元素”所组成的集合. 因为若 $A=\varnothing$，则 A 中不含任何元素；若 $A=B$，则 A 中含有 B 中的所有元素，但都说集合 A 是集合 B 的子集.

(6)子集的传递性：若 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集，即若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

知识点二 真子集

如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，就说集合 A 是集合 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$. 它可用下图表示.



注意：(1)空集是任何非空集合的真子集.

(2)对于集合 A、B、C，若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(3)两个集合 A、B 之间的关系如下：

$$\begin{cases}A\subseteq B\begin{cases}A=B\Rightarrow A\subseteq B\text{ 且 }B\subseteq A,\\A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B,\end{cases}\\A\not\subseteq B.\end{cases}$$

(4)元素与集合的关系是属于与不属于的关系，用符号“$\in$”“$\notin$”表示；集合与集合之间的关系是包含、真包含、相等的关系，用符号“$\subseteq$”“$\subsetneqq$”和“$=$”表示.

例如：集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,5\}$，则 A 是 B 的子集，也是真子集，用符号“$A\subseteq B$”与“$A\subsetneqq B$”表示均可，但“$A\subsetneqq B$”

更准确一些,所以解题时,要选择最优的表示方法.

知识点三　集合相等的进一步描述

如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$,读作"A 等于 B".

注意:(1)证明:若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

$\because A\subseteq B$,$\therefore A$ 中的元素都是 B 的元素.又 $\because B\subseteq A$,$\therefore B$ 中的元素都是 A 的元素,这就是说,集合 A 与集合 B 的元素是完全相同的,$\therefore$ 我们说 A 与 B 是相等的集合.

(2)上面定义的证明给出了我们证明两个集合相等的办法,即欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可.

例如:判断下列两个集合的关系:

$A=\{1,2\}$,$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$.

解:集合 B 中的元素是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解,即为 $B=\{1,2\}$,$\therefore A=B$.

知识点四　空集

1. 空集的概念

空:顾名思义,即是什么都没有的意思,那么对于空集而言,这个什么都没有强调的是集合中的元素.换句话说,即如果一个集合不含有任何元素,那么这个集合即称之为空集,用符号记之为$\varnothing$.再如集合$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$,由于方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解,因此上述集合没有元素,因此可用空集表示,即$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}=\varnothing$.

2. 空集的特性

为了使集合这个理论更加完善,我们规定空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$,自然便有$\varnothing\subseteq\varnothing$.那么在这个相关规定的基础上,结合子集和真子集的有关概念,我们得到:

(1)空集只有一个子集,即它本身;

(2)空集是任何非空集合的真子集,因此,若$\varnothing\subsetneqq A$,则一定有 $A\neq\varnothing$;

由于空集的定义是不含有任何元素的集合,因此对于子集的理解,如 $A\subseteq B$ 这时不能理解为 A 是由集合 B 中的部分元素组成的,这是因为若 $A=\varnothing$,则自然也有 $A\subseteq B$,但此时 A 中不含任何元素,这是矛盾的.

B 教材拓展

拓展点一　子集概念的理解

子集的概念是由讨论集合与集合之间的关系引出的,两个集合 A 与 B 之间的关系如下:

$$\begin{cases}A\subseteq B\begin{cases}A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{ 且 }B\supseteq A,\\A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B,\end{cases}\\A\not\subseteq B.\end{cases}$$

包含的定义也可以表述成:如果由任意 $x\in A$,可以推出 $x\in B$,那么 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

不包含的定义也可以表述成:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 中存在着不是集合 B 的元素,那么 $A\not\subseteq B$(或 $B\not\supseteq A$).

拓展点二　有限集合的子集个数

1. 由 n 个元素构成的集合有 2^n 个子集.
2. 由 n 个元素构成的集合有 2^n-1 个真子集.
3. 由 n 个元素构成的集合有 2^n-1 个非空子集.
4. 由 n 个元素构成的集合有 2^n-2 个非空真子集.

拓展点三　正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系

1. 集合与集合之间的关系符号有:$\subseteq$、$\subsetneqq$、$\not\subseteq$、$\supsetneqq$、$\not\supseteq$、$\supseteq$、$=$.

2. 符号"$\in$""$\notin$"与"$\subseteq$""$\subsetneqq$""$=$"的区别:

"$\in$"及"$\notin$"是表示元素与集合之间的关系;而"$\subseteq$""$\subsetneqq$""$=$"等是表示集合之间的关系.

3. a 与$\{a\}$的区别:一般地,a 表示一个元素,而$\{a\}$表示只有一个元素的一个集合,因此有 $1\in\{1,2,3\}$,$0\in\{0\}$,$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$等.不能写成 $0=\{0\}$,$\{1\}\in\{1,2,3\}$,$1\subseteq\{1,2,3\}$等.

4. 0,$\{0\}$,$\varnothing$,$\{\varnothing\}$的关系

(1)数 0 不是集合,$\{0\}$是含一个元素 0 的集合,$\varnothing$是不含任何元素的集合,因此$\varnothing\subseteq\{0\}$,不能写成$\varnothing=\{0\}$或$\varnothing\in\{0\}$,$\{\varnothing\}$是指以$\varnothing$为元素的集合.

(2)不要把数 0 或集合$\{0\}$与$\varnothing$混淆,同时注意不要把$\varnothing$错写成$\{\varnothing\}$或$\{0\}$.它们之间的关系是:$\varnothing\neq\{\varnothing\}$,$\varnothing\in\{\varnothing\}$,$0\notin\varnothing$,$0\notin\{\varnothing\}$,$0\in\{0\}$.

C 典型题解

▶问题一　判断元素与集合、集合与集合间的关系问题

例题 1　以下各组中两个对象是什么关系,用适当的符号表示出来.

(1)0 与$\{0\}$;(2)0 与$\varnothing$;(3)$\varnothing$与$\{0\}$;(4)$\{0\}$与$\{0,1,2\}$;(5)$\{0,1,2\}$与$\{2,1,0\}$;(6)$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$;(7)$\{(a,b)\}$与$\{(b,a)\}$.

[解析]　首先要分清是"元素与集合"的关系,还是"集合与集合"的关系.如果是集合与集合间的关系,还要分清是子集,还是真子集.

[答案]　(1)$0\in\{0\}$.

(2)$0\notin\varnothing$.

(3)$\varnothing$与$\{0\}$都是集合,两者的关系是"包含与否"的关系. $\therefore \varnothing \subsetneqq \{0\}$,也可$\varnothing \subseteq \{0\}$.

(4)$\{0\} \subsetneqq \{0,1,2\}$.

(5)$\{0,1,2\}=\{2,1,0\}$.

(6)$\{0,1\}$是含两个元素0,1的集合,而$\{(0,1)\}$是以有序实数对为元素的集合,它只含一个元素,$\therefore \{0,1\} \neq \{(0,1)\}$.

(7)当$a=b$时,$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$;当$a \neq b$时,$\{(a,b)\} \neq \{(b,a)\}$.

[点评] 集合的符号语言十分简洁,因而被广泛应用于现代数学之中,其障碍在于这些符号与具体意义之间没有直接的联系,突破方法是熟练地掌握这些符号的具体含义.

▶问题二 确定集合的子集、真子集的问题

例题 2 已知集合$A=\{1,3,5\}$,求集合A的所有子集的元素之和.

[解析] 本题主要考查子集的概念,先写出集合A的所有子集,再写出这些子集的所有元素之和.

[答案] 集合A的子集分别是:$\varnothing$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{5\}$,$\{1,3\}$,$\{1,5\}$,$\{3,5\}$,$\{1,3,5\}$. 注意到A中的每个元素分别出现在A的4个子集中,即在其和中出现4次. 故所求之和为$(1+3+5)\times 4=36$.

[点评] A中的每个元素分别出现在A的4个子集中,这是由写出A的子集后,再观察得出的结果,能否不写出A的子集也能得出这样的结论呢?注意到A中的元素1,出现在A的子集$\{1\}$,$\{1,3\}$,$\{1,5\}$,$\{1,3,5\}$中,如果在这些子集中排除这个元素1,剩下来的元素依次组成集合$\varnothing$,$\{3\}$,$\{5\}$,$\{3,5\}$,也就是A中除元素1组成集合$\{3,5\}$的子集有4个. 推广到一般,即"$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$,则$A$的所有子集的元素之和为多少?"其和为$(a_1+a_2+\cdots+a_n)2^{n-1}$.

例题 3 已知集合M满足$\{1,2\} \subseteq M \subseteq \{1,2,3,4,5\}$,求所有满足条件的集合$M$.

[解析] 本题主要考查子集的概念,解决本题的关键是正确理解题意. 根据题目所给出的条件可知,集合M中至少含有元素1,2,至多含有元素1,2,3,4,5,且M中必须含有元素1,2,故可按M中所含元素的个数分类写出集合M.

[答案] ①当M中含有两个元素时,M为$\{1,2\}$;

②当M中含有三个元素时,M为$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$;

③当M中含有四个元素时,M为$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$;

④当M中含有五个元素时,M为$\{1,2,3,4,5\}$.

故满足条件的集合M为$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$.

[点评] 要学会分类讨论的数学思想方法. 若此题变为"求集合M的个数",则等价于求集合$\{3,4,5\}$的子集个数.

例题 4 集合$\{a\}$,$\{a,b\}$,$\{a,b,c\}$,$\{a,b,c,d\}$,$\{a,b,c,d,e\}$的元素的个数分别为多少?它们分别有哪些真子集?它们的真子集个数为多少?由此可猜想出怎样的结论?

[解析] 本题主要考查真子集的有关问题. 集合A的全部子集中,除了集合A本身,其他集合都是集合A的真子集.

[答案] 集合$\{a\}$有1个元素,真子集有:$\varnothing$,个数为$2^1-1=1$(个).

集合$\{a,b\}$有2个元素,真子集有:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,个数为$2^2-1=3$(个).

集合$\{a,b,c\}$有3个元素,真子集有:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,个数为$2^3-1=7$(个).

集合$\{a,b,c,d\}$有4个元素,真子集有:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{d\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{a,d\}$,$\{b,c\}$,$\{b,d\}$,$\{c,d\}$,$\{a,b,c\}$,$\{a,b,d\}$,$\{a,c,d\}$,$\{b,c,d\}$,个数为$2^4-1=15$(个).

集合$\{a,b,c,d,e\}$有5个元素,真子集有:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{d\}$,$\{e\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{a,d\}$,$\{a,e\}$,$\{b,c\}$,$\{b,d\}$,$\{b,e\}$,$\{c,d\}$,$\{c,e\}$,$\{d,e\}$,$\{a,b,c\}$,$\{a,b,d\}$,$\{a,b,e\}$,$\{a,c,d\}$,$\{a,c,e\}$,$\{a,d,e\}$,$\{b,c,d\}$,$\{b,c,e\}$,$\{b,d,e\}$,$\{c,d,e\}$,$\{a,b,c,d\}$,$\{a,b,c,e\}$,$\{a,b,d,e\}$,$\{a,c,d,e\}$,$\{b,c,d,e\}$,个数为$2^5-1=31$(个).

由此猜想:若一个集合有n个元素,则它有2^n-1个真子集.

[点评] 若一个集合中元素的个数为n,则其子集的个数为2^n,真子集的个数为2^n-1.

▶问题三 利用集合与函数不等式、方程的关系求字母参数问题

例题 5 已知集合$A=\{x \mid 1<ax<2\}$,$B=\{x \mid |x|<1\}$,满足$A \subseteq B$,求实数a的范围.

[解析] 本题主要考查由集合之间的关系,求参数的取值范围. 解题的关键是对参数a进行讨论,写出集合A、B,让其满足$A \subseteq B$.

[答案] $\because B=\{x \mid -1<x<1\}$,

①当$a=0$时,$A=\varnothing$,满足$A \subseteq B$;

②当$a>0$时,$A=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\right\}$,

$\because A \subseteq B$, $\therefore \begin{cases} \frac{1}{a} \geqslant -1, \\ \frac{2}{a} \leqslant 1. \end{cases}$ $\therefore a \geqslant 2$;

③当 $a<0$ 时,$A=\left\{x\left|\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}\right.\right\}$,

$\because A\subseteq B,\therefore\begin{cases}\frac{2}{a}\geqslant -1,\\ \frac{1}{a}\leqslant 1.\end{cases}\quad\therefore a\leqslant -2.$

综上所述,$a=0$ 或 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2$.

[点评] (1)当 $a=0$ 时,$A=\varnothing$,也满足 $A\subseteq B$.(2)分类讨论要结合实际,做到不重不漏.

例题 6 若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$,$B=\{x|mx+1=0\}$,$B\subsetneqq A$,求 m 的值.

[解析] 本题主要考查真子集的有关问题,集合 A、B 都是方程的解集,集合 A 是一元二次方程的解集,有两个元素;集合 B 是一元一次方程的解集,可能为空集,也可能为单元素集,由 $B\subsetneqq A$ 可知,方程 $mx+1=0$ 无解,或 $mx+1=0$ 的解是方程 $x^2+x-6=0$ 的解中的一个,两种情况均符合题意.

[答案] $A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$.

$\because B\subsetneqq A,\therefore mx+1=0$ 的解为 -3 或 2 或无解.

当 $mx+1=0$ 的解为 -3 时,由 $m\cdot(-3)+1=0$,得 $m=\frac{1}{3}$;

当 $mx+1=0$ 的解为 2 时,由 $m\cdot 2+1=0$,得 $m=-\frac{1}{2}$;

当 $mx+1=0$ 无解时,$m=0$.

综上所述,$m=\frac{1}{3}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=0$.

[点评] 应注意 $B=\varnothing$ 这种情况易疏漏.要学会对参数问题进行分类讨论,讨论时应注意不重不漏.

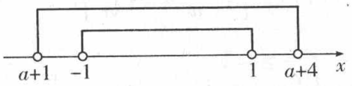
例题 7 若不等式 $|x|<1$ 成立,则不等式 $[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$ 也成立,求 a 的取值范围.

[解析] 若不等式 $|x|<1$ 的解集为 A,不等式 $[x-(a+1)]\cdot[x-(a+4)]<0$ 的解集为 B,则有当 $x\in A$ 时,$x\in B$,$\therefore A$ 是 B 的子集,可用集合间的包含关系求 a.

[答案] $A=\{x||x|<1\}=\{x|-1<x<1\}$.

$B=\{x|[x-(a+1)][x-(a+4)]<0\}$
$=\{x|a+1<x<a+4\}$.

依题意,有 $A\subseteq B$,在数轴上作出包含关系图形,如图有 $\begin{cases}a+1\leqslant -1,\\ a+4\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a\leqslant -2$.



[点评] 本题构思新颖,将不等式问题转化到一个集合是另一个集合的子集关系上来,然后利用集合之间的包含关系来解.

▶**问题四 集合的相等问题**

例题 8 已知 $M=\{2,a,b\}$,$N=\{2a,2,b^2\}$,且 $M=N$,求 a,b 的值.

[解析] 本题考查集合的相等关系,由 $M=N$ 可知,两个集合中的元素应该完全相同,由此,可用集合中元素的性质解题.

[答案] 由 $M=N$,知 $\begin{cases}a=2a,\\ b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\ b=2a.\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}a=0,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

根据集合中元素的互异性,得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

[点评] 两集合相等,则所含元素完全相同,与元素顺序无关.另外,集合中元素的互异性在解决此类问题时至关重要.

例题 9 已知集合 $A=\left\{x\left|x=\frac{1}{9}(2k+1),k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,$B=\left\{x\left|x=\frac{4}{9}k\pm\frac{1}{9},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,则集合 A、B 之间的关系为 ( )

A. $A\subsetneqq B$ B. $B\subsetneqq A$ C. $A=B$ D. $A\neq B$

[解析] 本题考查集合与集合之间关系的判断,解题的关键是转化为判定元素和集合的关系.

设 $x_1\in A$,则 $x_1=\frac{1}{9}(2k_1+1)$,$k_1\in\mathbf{Z}$.

当 $k_1=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时,$x_1=\frac{1}{9}(4n+1)=\frac{4}{9}n+\frac{1}{9}$,

$\therefore x_1\in B$;

当 $k_1=2n-1,n\in\mathbf{Z}$ 时,$x_1=\frac{1}{9}(4n-1)=\frac{4}{9}n-\frac{1}{9}$,

$\therefore x_1\in B.\therefore A\subseteq B.$

又设 $x_2\in B$,则 $x_2=\frac{4}{9}k_2\pm\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(4k_2\pm 1)$,$k_2\in\mathbf{Z}$.

由于 $4k_2+1=2(2k_2)+1$,$4k_2-1=2(2k_2-1)+1$,

且 $2k_2$ 表示所有的偶数,$2k_2-1$ 表示所有的奇数.

$\therefore 4k_2\pm 1$ 与 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 都表示奇数.

$\therefore x_2=\frac{1}{9}(4k_2\pm 1)=\frac{1}{9}(2n+1),n\in\mathbf{Z}.\therefore x_2\in A.$

$\therefore B\subseteq A.$

故 $A=B$.

[答案] C

[点评] 在判断集合与集合的关系时,不要局限在形式上的区别,而应当从本质上、整体上进行论证.