

高等数学应用100例

——基于能力为导向的教学理念

◎ 金慧萍 吴妙仙 编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省教育科学规划 2010 年度(高校)研究课题成果(SCG226)

高等数学应用 100 例

——基于能力为导向的教学理念

金慧萍 吴妙仙 编

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学应用 100 例:基于能力为导向的教学理念 / 金慧萍, 吴妙仙编. —杭州:浙江大学出版社, 2011. 3
ISBN 978-7-308-08459-8

I. ①高… II. ①金… ②吴… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 030546 号

高等数学应用 100 例

——基于能力为导向的教学理念

金慧萍 吴妙仙 编

责任编辑 石国华

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排版 杭州星云光电图文制作工作室

印刷 富阳市育才印刷有限公司

开本 880mm×1230mm 1/32

印张 2.5

字数 62 千字

版印次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-308-08459-8

定价 8.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前 言

编写这本小册子的想法,源于高职学生觉得高等数学抽象、高等数学不易学、高等数学没用等原因而起。作为从事多年高等数学教学的工作者,感到有义务有责任为高职学生、为高等数学的教学活动做点有益的事。

其实高等数学很具体、高等数学不难学、高等数学很有用,因为高等数学的应用就在我们的身边。我们参考了不少资料,最后收集了这 100 个最基本的高等数学应用案例,把它们汇编成这本小册子就是想给大家一个回答。

为了便于高职高等数学的教学和学生的学习,这本小册子按高等数学的基本知识体系加以归类,最后整理成六个部分:极限与连续、一元函数的微积分、常微分方程、多元函数的微积分、线性代数、概率统计等。

这本小册子,可以给高职数学教师教学提供参考,也可以作为学生的课外读物,它有助于培养学生对高等数学的应用意识和初步的应用能力,同时,也为了提高高职学生对高等数学应用的认知,从而使学生喜欢高等数学,学会数学思维,以对学生将来的进一步学习、工作和生活有帮助。

这本小册子,可以对高等数学的实践教学起到辅助作用,教师可通过课堂内外多种形式开展实践教学,如根据实施内容的特点在课堂内采用问题导入、任务驱动、数学实验等,在课堂外采用建模小问题、项目调研分析、生活决策等形式开展,以改变传统的教学模式,活跃教学气氛,丰富教学内容。

由于时间仓促,水平有限,不足和错误之处在所难免,恳请批评指正。

编 者

2010 年 10 月

目 录

第一部分 极限与连续	1
案例题目	1
1. 电冰箱的销售函数	1
2. 我国工薪人员的薪金所得税	1
3. 健身房人数的稳定性	2
4. 外币兑换中的损失	2
5. 电话机的订购	2
6. 兔子的繁殖	2
7. 贷款投资再贷款再投资	3
8. 顾客最终存款额	3
9. 银行存款的本利和	3
10. 利润与成本中的极限问题	3
11. 分形几何中的 Koch 雪花	4
12. 机器的残值	5
13. 选哪家俱乐部更划算	5
14. 商品的均衡价格	5
15. 汽车价值的函数	5
16. 杂志销售保本问题	5
案例解答	6

第二部分 一元函数的微积分	14
案例题目	14
17. 糕点生产中的获利点	14
18. 经济批量的决策	14
19. 获利最大时的售价	14
20. 利税最大时的单价	15
21. 公寓的租金	15
22. 最大的容积	15
23. 平均成本与边际成本	15
24. 边际收入及经济意义	15
25. 商品的需求价格弹性	16
26. 旅行团人数与机票价格	16
27. 商品销售中的收入与弹性	16
28. 特定产量时的单位成本	16
29. 商品的收益	17
30. 边际利润为零时的周产量	17
31. 巧克力糖的边际需求量	17
32. 需求弹性函数及经济意义	17
33. 商品价格的取值范围	17
34. 商品需求弹性	18
35. 商品的供给弹性	18
36. 产品价格与需求量	18
37. 需求弹性与商品价格	18
38. 海报版面的设计	18
39. 产品的边际函数	19
40. 边际需求与需求弹性	19

41. 工人人数与产量	19
42. 最大利润时的商品价格	19
43. 最大收益	20
44. 最大利润时总税额	20
45. 开支最少的购进批次	20
46. 挂钟每天慢多少	20
47. 产品的产量函数	20
48. 石油消耗总量的估计	20
49. 需求量关于价格的弹性	21
50. 总成本函数	21
51. 收益函数	21
52. 买客机或租客机	21
53. 变力做功	21
54. 商品销售的平均价格	22
案例解答	22
 第三部分 常微分方程	34
案例题目	34
55. 需求函数	34
56. 商品价格的变化规律	34
57. 净利润与广告费的函数关系	34
58. 曲线斜率与曲线方程	34
59. 死亡时间的推算	35
60. 学习过程的规律	35
61. 油井的收入	35
62. 我国人口总数	35
63. 降落伞下落的速度	36

64. 存入数额	36
65. 池塘内鱼的尾数	36
66. 汽车的运行成本及转卖值	36
案例解答	36
 第四部分 多元函数的微积分	43
案例题目	43
67. 制作铁罐所需材料的体积	43
68. 近似计算	43
69. 用料最省问题	43
70. 最大利润时的产量	43
71. 最佳购买效果	43
72. 计算土方量	44
73. 工人的分配问题	44
74. 平均车辆行驶速度	44
75. 最优广告策略	44
76. 投入总费用最小	45
案例解答	45
 第五部分 线性代数	50
案例题目	50
77. 货物的运价	50
78. 数表的矩阵表示	50
79. 进货的总价	51
80. 小行星的轨道	51
81. 最优的组合	51
82. 宣传片的播放	52

83. 志愿者的接送安排	52
84. 预测从事教师职业的人数	52
85. 维修的承包	52
86. 货物的调运方案	53
87. 项目的投资	53
88. 总产品矩阵	53
案例解答	54
 第六部分 概率统计	62
案例题目	62
89. 骰子投掷概率	62
90. 同一月份出生的概率	62
91. 游戏规则的公平性	62
92. 抽取次品的概率	63
93. 计算器的寿命	63
94. 甲乙中奖的概率	63
95. 他是职高毕业吗	63
96. 线路发生故障的概率	63
97. 一级品的概率	64
98. 乘客等车的时间	64
99. 电子管寿命的分布函数	64
100. 保险公司盈亏的概率	64
案例解答	64
 参考文献	68

第一部分 极限与连续



案例题目

1.【电冰箱的销售函数】

某商场出售电冰箱,每台售价 1200 元,1000 台以内可以全部脱销,超过 1000 台时经广告优惠服务宣传后,价格调整为 1150 元,又可多售 500 台.假定支付广告费 5000 元,试将电冰箱销售收入 y 表示为销售量 x 的函数.

2.【我国工薪人员的薪金所得税】

根据中华人民共和国个人所得税法规定:个人工资、薪金所得应纳个人所得税.应纳所得税额的计算为:工资、薪金所得,以每月收入额减去费用 2000 元后的余额,为应纳税所得额.最后列出下面的税率表:

个人所得税税率表

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

若某人的月工资、薪金所得为 x 元, 请列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系.

3. 【健身房人数的稳定性】

某校有教职员工 150 人, 为了丰富教职员工的课余生活, 每天定时开放健身房和娱乐室. 据调查统计, 每次去健身房的人有 10% 下次去娱乐室, 而娱乐室的人有 20% 下次去健身房. 请问, 随着时间的推移, 去健身房的人数能否趋于稳定?

4. 【外币兑换中的损失】

某人从美国到加拿大去度假, 他把美元兑换成加拿大元时, 币面数值增加 12%, 回国后他把加拿大元兑换成美元, 发现币面数值减少 12%. 试表示出这两个函数, 并证明这两个函数不互为反函数. 即经过这样一来一回兑换后, 他亏损了一些钱.

5. 【电话机的订购】

电话机每台售价 180 元, 成本为 120 元. 厂家为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购一台, 售价就降低 0.1 元(例如, 某商行订购了 300 台, 订购量比 100 台多 200 台, 于是每台就降价 $0.1 \times 200 = 20$ 元, 商行可以按 160 元/台的价格购进 300 台), 但最低价为 140 元/台.

- (1) 把每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- (2) 把利润 L 表示成订购量 x 的函数;
- (3) 当一商行订购了 1000 台时, 厂家可获利润多少?

6. 【兔子的繁殖】

有小兔一对, 若第二个月它们成年, 第三个月生下小兔一对, 以后每月生产一对小兔. 而所生的小兔也在第二个月成年, 第三个月生产另一对小兔, 以后也每月生产小兔一对. 假定每产一对小兔必一雄一雌, 且均无死亡, 试问一年后共有小兔几对?

7. 【贷款投资再贷款再投资】

国家向某企业投资 50 万元, 这家企业将投资作为抵押品向银行贷款, 得到相当于抵押品价值 75% 的贷款, 该企业将此贷款再次进行投资, 并将投资作为抵押品又向银行贷款, 仍得到相当于抵押品价值 75% 的贷款, 企业又将此贷款再进行投资, 这种贷款—投资—再贷款—再投资, 如此反复进行扩大再生产, 问该企业共投资多少万元?

8. 【顾客最终存款额】

某顾客向银行存入本金 p 元, n 年后他在银行的存款额是本金及利息之和. 设银行规定年复利率为 r , 试根据下述不同的计算方法计算顾客 n 年后的最终存款额.

(1) 每年结算一次;

(2) 每月结算一次, 每月的复利率为 $\frac{r}{12}$;

(3) 每年结算 m 次, 每个结算周期的复利率为 $\frac{r}{m}$. 证明最终存款额随 m 的增加而增加;

(4) 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 结算周期变为无穷小, 这意味着银行连续不断地向顾客付利息, 这种存款方法称为连续复利. 试计算连续复利情况下顾客的最终存款额.

9. 【银行存款的本利和】

现将 1 万元现金存入银行, 年利率为 7%, 分别用离散型和连续型的复利公式计算 10 年末的本利和.

10. 【利润与成本中的极限问题】

已知生产 x 对汽车挡泥板的成本是 $C(x) = 10 + \sqrt{1+x^2}$ 欧元, 每对的售价为 5 欧元, 于是销售 x 对挡泥板的收入为 $R(x) = 5x$.

(1) 出售 $x+1$ 对比出售 x 对所产生的利润增长额为

$$I(x) = [R(x+1) - C(x+1)] - [R(x) - C(x)],$$

当生产稳定、产量很大时, 这个增长额为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$, 试求这个极限值;

(2) 生产了 x 对挡泥板时, 每对的平均成本为 $\frac{C(x)}{x}$, 同样当产品的

的产量很大时, 每对的成本大致是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x}$, 试求这个极限值.

11. 【分形几何中的 Koch 雪花】

在分形几何中的 Koch 雪花, 可通过递归的方法生成. 设正三角形的边长为 1, 则其周长为 $P_1 = 3$, 面积为 $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 将每边三等分, 以中间三分之一段为边向外做正三角形, 每一条边生成四条新边, 新边长为原来边长的 $\frac{1}{3}$, 同时生成的 3 个新正三角形, 每个的面积为原正三角形面积的 $\frac{1}{9}$, 故总周长 $P_2 = \frac{4}{3}P_1$, 总面积 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_1$ (如图 1 所示) 依次进行下去, 得

$$P_3 = \frac{4}{3}P_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 P_1,$$

$$A_3 = A_2 + 3 \left\{ 4 \left[\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_1 \right] \right\},$$

.....



图 1

试讨论当 $n \rightarrow \infty$ 时周长 P_n 和面积 A_n 的极限.

12.【机器的残值】

某台机器原价值 2 万元,买进后,每年减少价值(即折旧)3%,若每时每刻不断折旧,求 10 年末这台机器的价值(即残值).

13.【选哪家俱乐部更划算】

有两家健身俱乐部,第一家每月会费 300 元,每次健身收费 1 元,第二家每月会费 200 元,每次健身收费 2 元,若只考虑经济因素,你会选择哪一家俱乐部(根据你每月健身次数决定)?

14.【商品的均衡价格】

设某商品的需求函数与供给函数分别为 $D(p) = \frac{5600}{p}$ 和 $S(p) = p - 10$.

- (1) 找出均衡价格,并求此时的供给量与需求量;
- (2) 在同一坐标中画出供给与需求曲线;
- (3) 何时供给曲线过 p 轴,这一点的经济意义是什么?

15.【汽车价值的函数】

一款汽车出厂价 45000 元,使用后它的价值按年降价率 $\frac{1}{3}$ 的标准贬值,试求此车的价值 y (元)与使用时间 t (年)的函数关系.

16.【杂志销售保本问题】

每印一本杂志的成本为 1.22 元,每售出一本杂志仅能得 1.20 元的收入,但销售额超过 15000 本时还能取得超过部分收入的 10% 作为广告费收入,试问应至少销售多少本杂志才能保本?销售量达到多少时才能获利达 1000 元?



案例解答

1.【解】销售函数为

$$y = \begin{cases} 1200x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1000 \text{ 时;} \\ 45000 + 1150x, & \text{当 } 1000 < x \leq 1500 \text{ 时.} \end{cases}$$

2.【解】按税法规定当 $x \leq 2000$ 时,不必纳税,这时 $y = 0$;

当 $2000 < x \leq 2500$ 时,纳税部分为 $x - 2000$,税率为 5%,这时

$$y = (x - 2000) \times \frac{5}{100};$$

当 $2500 < x \leq 4000$ 时,其中 2000 元不纳税,500 元应纳 5% 的税,即 $500 \times \frac{5}{100} = 25$ 元,再多的部分,即 $x - 2500$ 按 10% 纳税.他应

纳的税为 $y = 25 + (x - 2500) \times \frac{10}{100}$. 依次可列出下列函数关系式:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2000; \\ (x - 2000) \times \frac{5}{100}, & 2000 < x \leq 2500; \\ 25 + (x - 2500) \times \frac{10}{100}, & 2500 < x \leq 4000; \\ 25 + 150 + (x - 4000) \times \frac{15}{100}, & 4000 < x \leq 7000; \\ 175 + 450 + (x - 7000) \times \frac{20}{100}, & 7000 < x \leq 22000; \\ 625 + 3000 + (x - 22000) \times \frac{25}{100}, & 22000 < x \leq 42000; \\ 3625 + 5000 + (x - 42000) \times \frac{30}{100}, & 42000 < x \leq 62000; \\ 8625 + 6000 + (x - 62000) \times \frac{35}{100}, & 62000 < x \leq 82000; \\ 14625 + 7000 + (x - 82000) \times \frac{40}{100}, & 82000 < x \leq 102000; \\ 21625 + 8000 + (x - 102000) \times \frac{45}{100}, & x > 102000. \end{cases}$$

3.【解】引入字母,转化为递归数列模型.

设第 n 次去健身房的人数为 a_n , 去娱乐室的人数为 b_n , 则

$$a_n + b_n = 150.$$

$$a_n = \frac{9}{10}a_{n-1} + \frac{2}{10}b_{n-1} = \frac{9}{10}a_{n-1} + \frac{2}{10}(150 - a_{n-1}) = \frac{7}{10}a_{n-1} + 30,$$

$$a_n = \frac{7}{10}a_{n-1} + 30,$$

所以
$$a_n - 100 = \frac{7}{10}(a_{n-1} - 100).$$

于是
$$a_n - 100 = (a_1 - 100)\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1},$$

即
$$a_n = 100 + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}(a_1 - 100).$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} = 0,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 100.$$

所以随着时间的推移,去健身房的人数稳定在 100 人左右.

4.【解】设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成的美元数, 则

$$f_1(x) = x + x \times 12\% = 1.12x, \quad x \geq 0;$$

$$f_2(x) = x - x \times 12\% = 0.88x, \quad x \geq 0;$$

而
$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x,$$

故 $f_1(x), f_2(x)$ 不互为反函数, 并且经过这样一来一回兑换后, 他确实亏损了一些钱.

5.【解】(1) 当 $x \leq 100$ 时售价为 180 元/台.

现在计算订购量 x 是多少时售价降为 140 元/台

$$(180 - 140) \div 0.1 = 400,$$

所以当订购量超过 $400 + 100$ 台时, 每台售价为 140 元. 当订购量在 $100 \sim 500$ 之间时, 售价为 $180 - (x - 100) \times 0.1$. 因而实际售价 p 与订购量之间的函数关系为:

$$p = \begin{cases} 180, & x \leq 100; \\ 180 - (x - 100) \times 0.1, & 100 < x < 500; \\ 140, & x \geq 500. \end{cases}$$

(2) 每台利润是实际售价 p 与成本的差, 即

$$L = (p - 120)x.$$

$$(3) L = 1000 \times (140 - 120) = 20000 (\text{元}).$$

6.【解】这是意大利数学家斐波那契(Fibonacci, L) 在 1202 年所著的“算法之书”中的一个题目. 他是这样解答的: 若用“ $\triangle$ ”、“ $\circ$ ”分别表示一对未成年和成年的兔子(简称仔兔和成兔), 则根据题目有(图 2 所示):

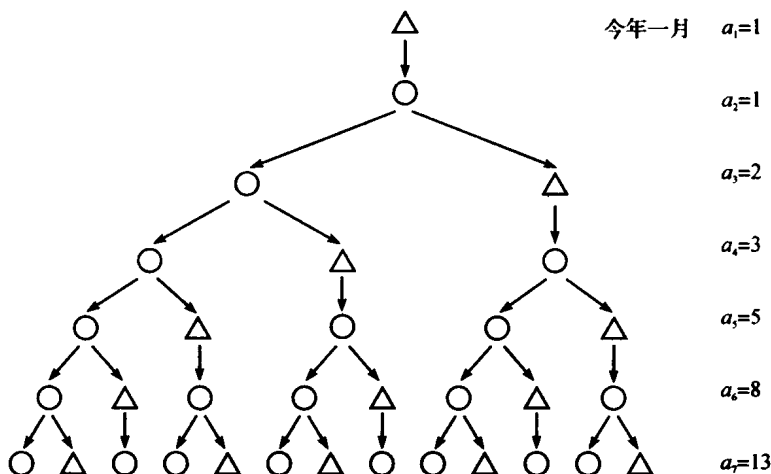


图 2 小兔繁殖数量

图 2 中: a_1 表示今年一月份的兔子, a_2 表示今年二月份的兔子. 从图可知, 六月份共有兔子 8 对; 还可以看出, 从三月份开始, 每月的兔子总数恰好等于它前面两个月的兔子总数之和. 按这规律可以写出数列:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

可见一年后共有兔子 144 对.

7.【解】设 S 表示投资与再投资的总和, a_n 表示每次投资或再投