GAODENG SHUXUE YINGYONG 100LI

高等数学应用100例

——基于能力为导向的教学理念

◎ 金慧萍 吴妙仙 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省教育科学规划 2010 年度(高校)研究课题成果(SCG226)

高等数学应用 100 例

——基于能力为导向的教学理念

金慧萍　吴妙仙　编

图书在版编目（C I P）数据

高等数学应用100例：基于能力为导向的教学理念／金慧萍，吴妙仙编. 一杭州：浙江大学出版社，2011. 3
ISBN 978-7-308-08459-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①金… ②吴… Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第030546号

高等数学应用100例

——基于能力为导向的教学理念

金慧萍　吴妙仙　编

责任编辑　石国华
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路148号　邮政编码310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州星云光电图文制作工作室
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　2.5
字　　数　62千字
版 印 次　2011年3月第1版　2011年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08459-8
定　　价　8.00元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

前 言

编写这本小册子的想法，源于高职学生觉得高等数学抽象、高等数学不易学、高等数学没用等原因而起。作为从事多年高等数学教学的工作者，感到有义务有责任为高职学生、为高等数学的教学活动做点有益的事。

其实高等数学很具体、高等数学不难学、高等数学很有用，因为高等数学的应用就在我们的身边。我们参考了不少资料，最后收集了这100个最基本的高等数学应用案例，把它们汇编成这本小册子就是想给大家一个回答。

为了便于高职高等数学的教学和学生的学习，这本小册子按高等数学的基本知识体系加以归类，最后整理成六个部分：极限与连续、一元函数的微积分、常微分方程、多元函数的微积分、线性代数、概率统计等。

这本小册子，可以给高职数学教师教学提供参考，也可以作为学生的课外读物，它有助于培养学生对高等数学的应用意识和初步的应用能力，同时，也为了提高高职学生对高等数学应用的认知，从而使学生喜欢高等数学，学会数学思维，以对学生将来的进一步学习、工作和生活有帮助。

这本小册子，可以对高等数学的实践教学起到辅助作用，教师可通过课堂内外多种形式开展实践教学，如根据实施内容的特点在课堂内采用问题导入、任务驱动、数学实验等，在课堂外采用建模小问题、项目调研分析、生活决策等形式开展，以改变传统的教学模式，活跃教学气氛，丰富教学内容。

由于时间仓促，水平有限，不足和错误之处在所难免，恳请批评指正。

编　者

2010年10月

目　录

第一部分　极限与连续

案例题目

1.【电冰箱的销售函数】

某商场出售电冰箱，每台售价 1200 元，1000 台以内可以全部脱销，超过 1000 台时经广告优惠服务宣传后，价格调整为 1150 元，又可多售 500 台. 假定支付广告费 5000 元，试将电冰箱销售收入 y 表示为销售量 x 的函数.

2.【我国工薪人员的薪金所得税】

根据中华人民共和国个人所得税法规定：个人工资、薪金所得应纳个人所得税. 应纳所得税额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减去费用 2000 元后的余额，为应纳税所得额. 最后列出下面的税率表：

个人所得税税率表

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

若某人的月工资、薪金所得为 x 元，请列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系.

3.【健身房人数的稳定性】

某校有教职员工 150 人，为了丰富教职员工的课余生活，每天定时开放健身房和娱乐室. 据调查统计，每次去健身房的人有 10% 下次去娱乐室，而娱乐室的人有 20% 下次去健身房. 请问，随着时间的推移，去健身房的人数能否趋于稳定？

4.【外币兑换中的损失】

某人从美国到加拿大去度假，他把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%，回国后他把加拿大元兑换成美元，发现币面数值减少 12%. 试表示出这两个函数，并证明这两个函数不互为反函数. 即经过这样一来一回兑换后，他亏损了一些钱.

5.【电话机的订购】

电话机每台售价 180 元，成本为 120 元. 厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 0.1 元(例如，某商行订购了 300 台，订购量比 100 台多 200 台，于是每台就降价 $0.1\times200=20$ 元，商行可以按 160 元 / 台的价格购进 300 台)，但最低价为 140 元 / 台.

(1) 把每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 把利润 L 表示成订购量 x 的函数；

(3) 当一商行订购了 1000 台时，厂家可获利润多少？

6.【兔子的繁殖】

有小兔一对，若第二个月它们成年，第三个月生下小兔一对，以后每月生产一对小兔. 而所生的小兔也在第二个月成年，第三个月生产另一对小兔，以后也每月生产小兔一对. 假定每产一对小兔必一雄一雌，且均无死亡，试问一年后共有小兔几对？

7.【贷款投资再贷款再投资】

国家向某企业投资 50 万元，这家企业将投资作为抵押品向银行贷款，得到相当于抵押品价值 75% 的贷款，该企业将此贷款再次进行投资，并将投资作为抵押品又向银行贷款，仍得到相当于抵押品价值 75% 的贷款，企业又将此贷款再进行投资，这种贷款 — 投资 — 再贷款 — 再投资，如此反复进行扩大再生产，问该企业共投资多少万元？

8.【顾客最终存款额】

某顾客向银行存入本金 p 元，n 年后他在银行的存款额是本金及利息之和. 设银行规定年复利率为 r，试根据下述不同的计算方法计算顾客 n 年后的最终存款额.

(1) 每年结算一次；

(2) 每月结算一次，每月的复利率为 $\frac{r}{12}$；

(3) 每年结算 m 次，每个结算周期的复利率为 $\frac{r}{m}$. 证明最终存款额随 m 的增加而增加；

(4) 当 $m \to \infty$ 时，结算周期变为无穷小，这意味着银行连续不断地向顾客付利息，这种存款方法称为连续复利. 试计算连续复利情况下顾客的最终存款额.

9.【银行存款的本利和】

现将 1 万元现金存入银行，年利率为 7%，分别用离散型和连续型的复利公式计算 10 年末的本利和.

10.【利润与成本中的极限问题】

已知生产 x 对汽车挡泥板的成本是 $C(x) = 10 + \sqrt{1 + x^2}$ 欧元，每对的售价为 5 欧元，于是销售 x 对挡泥板的收入为 $R(x) = 5x$.

(1) 出售 $x+1$ 对比出售 x 对所产生的利润增长额为

$$I(x)=[R(x+1)-C(x+1)]-[R(x)-C(x)],$$

当生产稳定、产量很大时，这个增长额为 $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$，试求这个极限值；

(2) 生产了 x 对挡泥板时，每对的平均成本为 $\dfrac{C(x)}{x}$，同样当产品的产量很大时，每对的成本大致是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}$，试求这个极限值.

11.【分形几何中的 Koch 雪花】

在分形几何中的 Koch 雪花，可通过递归的方法生成. 设正三角形的边长为 1，则其周长为 $P_1=3$，面积为 $A_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 将每边三等分，以中间三分之一段为边向外做正三角形，每一条边生成四条新边，新边长为原来边长的 $\dfrac{1}{3}$，同时生成的 3 个新正三角形，每个的面积为原正三角形面积的 $\dfrac{1}{9}$，故总周长 $P_2=\dfrac{4}{3}P_1$，总面积 $A_2=A_1+3\cdot\dfrac{1}{9}\cdot A_1$（如图 1 所示）依次进行下去，得

$$P_3=\frac{4}{3}P_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2P_1,$$

$$A_3=A_2+3\left\{4\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2A_1\right]\right\},$$

……

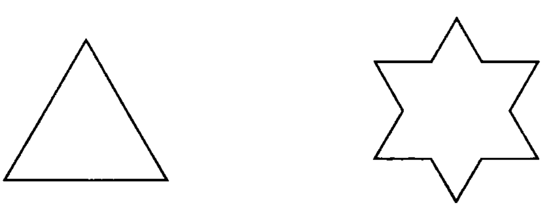

图 1

试讨论当 $n\to\infty$ 时周长 P_n 和面积 A_n 的极限.

12.【机器的残值】

某台机器原价值 2 万元，买进后，每年减少价值（即折旧）3%，若每时每刻不断折旧，求 10 年末这台机器的价值（即残值）.

13.【选哪家俱乐部更划算】

有两家健身俱乐部，第一家每月会费 300 元，每次健身收费 1 元，第二家每月会费 200 元，每次健身收费 2 元，若只考虑经济因素，你会选择哪一家俱乐部（根据你每月健身次数决定）？

14.【商品的均衡价格】

设某商品的需求函数与供给函数分别为 $D(p)=\dfrac{5600}{p}$ 和 $S(p)=p-10$.

(1) 找出均衡价格，并求此时的供给量与需求量；

(2) 在同一坐标中画出供给与需求曲线；

(3) 何时供给曲线过 p 轴，这一点的经济意义是什么？

15.【汽车价值的函数】

一款汽车出厂价 45000 元，使用后它的价值按年降价率 $\dfrac{1}{3}$ 的标准贬值，试求此车的价值 y（元）与使用时间 t（年）的函数关系.

16.【杂志销售保本问题】

每印一本杂志的成本为 1.22 元，每售出一本杂志仅能得 1.20 元的收入，但销售额超过 15000 本时还能取得超过部分收入的 10% 作为广告费收入，试问应至少销售多少本杂志才能保本？销售量达到多少时才能获利达 1000 元？

案例解答

1.【解】销售函数为

$$y=\begin{cases}1200x, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1000\ 时;\\ 45000+1150x, & 当\ 1000<x\leqslant 1500\ 时.\end{cases}$$

2.【解】按税法规定当 $x\leqslant 2000$ 时，不必纳税，这时 $y=0$；

当 $2000<x\leqslant 2500$ 时，纳税部分为 $x-2000$，税率为 5%，这时 $y=(x-2000)\times\frac{5}{100}$；

当 $2500<x\leqslant 4000$ 时，其中 2000 元不纳税，500 元应纳 5% 的税，即 $500\times\frac{5}{100}=25$ 元，再多的部分，即 $x-2500$ 按 10% 纳税. 他应纳的税为 $y=25+(x-2500)\times\frac{10}{100}$. 依次可列出下列函数关系式：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000;\\ (x-2000)\times\frac{5}{100}, & 2000<x\leqslant 2500;\\ 25+(x-2500)\times\frac{10}{100}, & 2500<x\leqslant 4000;\\ 25+150+(x-4000)\times\frac{15}{100}, & 4000<x\leqslant 7000;\\ 175+450+(x-7000)\times\frac{20}{100}, & 7000<x\leqslant 22000;\\ 625+3000+(x-22000)\times\frac{25}{100}, & 22000<x\leqslant 42000;\\ 3625+5000+(x-42000)\times\frac{30}{100}, & 42000<x\leqslant 62000;\\ 8625+6000+(x-62000)\times\frac{35}{100}, & 62000<x\leqslant 82000;\\ 14625+7000+(x-82000)\times\frac{40}{100}, & 82000<x\leqslant 102000;\\ 21625+8000+(x-102000)\times\frac{45}{100}, & x>102000.\end{cases}$$

3.【解】引入字母,转化为递归数列模型.

设第 n 次去健身房的人数为 a_n,去娱乐室的人数为 b_n,则

$$a_n + b_n = 150.$$

$$a_n = \frac{9}{10}a_{n-1} + \frac{2}{10}b_{n-1} = \frac{9}{10}a_{n-1} + \frac{2}{10}(150 - a_{n-1}) = \frac{7}{10}a_{n-1} + 30,$$

$$a_n = \frac{7}{10}a_{n-1} + 30,$$

所以 $$a_n - 100 = \frac{7}{10}(a_{n-1} - 100).$$

于是 $$a_n - 100 = (a_1 - 100)\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1},$$

即 $$a_n = 100 + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}(a_1 - 100).$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} = 0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty} a_n = 100.$$

所以随着时间的推移,去健身房的人数稳定在 100 人左右.

4.【解】设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数,$f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成的美元数,则

$$f_1(x) = x + x \times 12\% = 1.12x,\quad x \geqslant 0;$$
$$f_2(x) = x - x \times 12\% = 0.88x,\quad x \geqslant 0;$$

而 $$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x,$$

故 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 不互为反函数,并且经过这样一来一回兑换后,他确实亏损了一些钱.

5.【解】(1) 当 $x \leqslant 100$ 时售价为 180 元 / 台.

现在计算订购量 x 是多少时售价降为 140 元 / 台

$$(180 - 140) \div 0.1 = 400,$$

所以当订购量超过 400 + 100 台时,每台售价为 140 元. 当订购量在 100 ～ 500 之间时,售价为 $180 - (x - 100) \times 0.1$. 因而实际售价 p 与订购量之间的函数关系为:

$$p=\begin{cases}180, & x\leqslant 100;\\ 180-(x-100)\times 0.1, & 100<x<500;\\ 140, & x\geqslant 500.\end{cases}$$

(2) 每台利润是实际售价 p 与成本的差，即

$$L=(p-120)x.$$

(3) $L=1000\times(140-120)=20000$(元).

6.【解】 这是意大利数学家斐波那契(Fibonacci, L) 在 1202 年所著的“算法之书”中的一个题目. 他是这样解答的：若用“△”、“○”分别表示一对未成年和成年的兔子(简称仔兔和成兔)，则根据题目有(图 2 所示)：

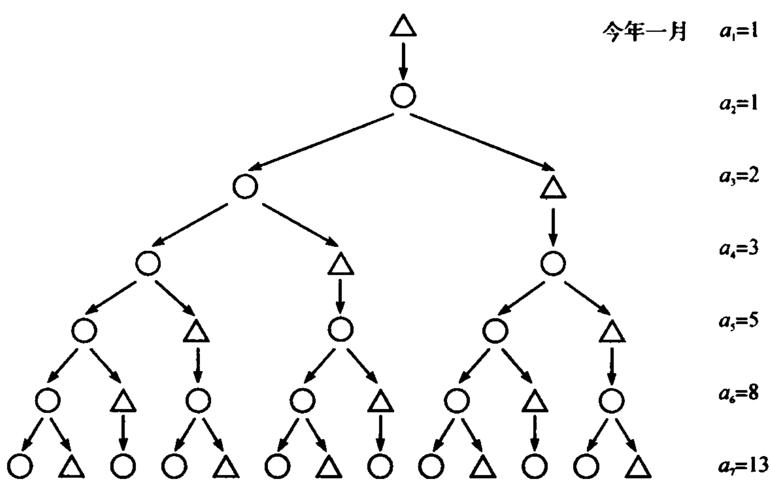

图 2　小兔繁殖数量

图 2 中：a_1 表示今年一月份的兔子，a_2 表示今年二月份的兔子. 从图可知，六月份共有兔子 8 对；还可以看出，从三月份开始，每月的兔子总数恰好等于它前面两个月的兔子总数之和. 按这规律可以写出数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots$$

可见一年后共有兔子 144 对.

7.【解】 设 S 表示投资与再投资的总和，a_n 表示每次投资或再投