普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

LILUN LIXUE XITI JIEDA

理论力学习题解答

张 慧 编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

LILUN LIXUE XITI JIEDA

理论力学习题解答

张 慧 编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套教材，是中国电力出版社出版的河海大学工程力学系许庆春教授主编的《理论力学》教材的学习辅导教材及习题详解参考书。全书紧扣教材内容分为15章，每章均有"内容摘要"和"习题解答"两部分。"内容摘要"归纳各章知识点，帮助读者全面掌握基本知识，可作为学习小结；"习题解答"是本书的重点，给出了教材中全部习题的详细求解过程，可作为读者自我考核的参考。教材中动力学专题部分习题解答可到中国电力出版社教材中心网站上下载。

本书可作为普通高等院校工科各专业学生理论力学教学辅导材料和复习、考研参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学习题解答/张慧编. —北京：中国电力出版社，2010.9

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套教材

ISBN 978-7-5123-0825-1

Ⅰ. ①理… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①理论力学-高等学校-解题 Ⅳ. ①O31-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第169965号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2010年11月第一版 2010年11月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 12印张 290千字

定价 **19.00** 元

前　言

理论力学是高等院校理工科专业的一门重要的专业基础课程，是学习其他专业基础课及专业课的基础。理论力学的教学特点之一是学生在学习过程中必须完成一定数量的习题才能更好地掌握课程内容。为了帮助学生更好地学习、巩固及深化理论力学课程的基本概念和解题方法，编者紧扣中国电力出版社出版的河海大学工程力学系许庆春教授主编的《理论力学》教材，编写了该配套辅导书。

本书共分为15章(第16～19章习题解答内容请到中国电力出版社教材中心网站上下载，网址 http：//jc.cepp.com.cn)，每章均有"内容摘要"和"习题解答"两部分：

"内容摘要"以小结的形式，列出了该章所学基本概念、主要定理和基本公式，归纳了各章知识点，帮助读者全面掌握该章基本知识，理清该章知识的脉络。

"习题解答"是本书的重点，紧扣教材，给出了教材中各章全部习题的详细求解过程。从学习者的角度，给出了习题的解题方法，且不厌其烦地给出了每道题的解题步骤，唯恐丢失某些对解题起关键作用的细节。

本书编写过程中，得到了许庆春教授的悉心指导和大力协助，对此表示衷心的感谢！对河海大学工程力学系全体老师多年的帮助和支持表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免有疏漏和错误。不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2010年6月

目　　录

第四篇　分析力学基础

第一篇 静 力 学

第一章 基本概念及基本原理

内容摘要

一、力的概念

力是物体间的相互机械作用，这种作用使物体的运动状态发生改变，或使物体产生变形。力对物体的作用效应包括运动效应和变形效应。在刚体静力学中，仅考虑运动效应。力对物体的作用效应取决于力的三要素：力的大小、方向及作用点。

在刚体静力学里，力具有可传性，是滑动矢量。

二、静力学基本原理

1. 二力平衡原理

作用于同一刚体的两个力平衡的必要与充分条件是：两个力的作用线相同、大小相等、方向相反。

2. 加减平衡力系原理

在任一力系中加上一个平衡力系，或从其中减去一个平衡力系，所得新力系与原力系对于刚体的运动效应相同。

3. 力的平行四边形法则

共点的两个力可以合成为一个合力，合力的作用点也在该点，大小和方向由以这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线来确定。用矢量表示为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$。

4. 作用与反作用定律

两物体相互作用的力（作用力与反作用力）同时存在、大小相等、作用线相同而指向相反，分别作用在这两个物体上。

5. 刚化原理

设变形体在某一力系的作用下处于平衡，若将此变形体刚化为刚体，则其平衡状态不变。

推论 1 力的可传性

作用于刚体的力可沿其作用线移动而不致改变其对刚体的运动效应。

推论 2 三力平衡原理

若作用于同一刚体的共面而不平行的三个力成平衡，则这三个力作用线必汇交于一点。

三、力的投影与力的分解

1. 力的投影

力在轴上的投影为代数量，可以为正或为负，也可以为零。

设力 $\boldsymbol{F}$ 与直角坐标轴 x、y、z 正向的夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则力 $\boldsymbol{F}$ 在轴 x、y、z 上的投影分别为

$$F_x = F\cos\theta_1,\ F_y = F\cos\theta_2,\ F_z = F\cos\theta_3$$

力在某一轴上的投影：设有一轴 ξ，沿该轴正向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 在 ξ 轴上的投影为

$$F_{\xi} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$

力在平面上的投影为矢量。

2. 力的分解

按矢量的运算法则，一个力可以分解成两个或两个以上的分力。最常用的是将一个力分解成为沿直角坐标轴 x、y、z 的分力。即

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴正向的单位矢量，F_x、F_y、F_z 分别是力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 轴上的投影。

四、力矩

1. 力对点的矩

力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的矩用矢积 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 来表示，或可用行列式表示为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

2. 力对轴的矩

力 $\boldsymbol{F}$ 对于某一轴的矩等于这个力在垂直于该轴的平面上的投影对于该轴与该平面的交点的矩，为代数量。当力与矩轴在同一平面内时，力对该轴的矩为零。

3. 力对点的矩与对轴的矩的关系

一个力对于一点的矩在经过该点的任一轴上的投影等于该力对于该轴的矩。

五、力偶

大小相等、方向相反、作用线不同的两个力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 称为力偶，记为（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$）。力偶具有以下性质：

(1) 力偶没有合力，即不能用一个力代替，因而也不能和一个力平衡。

(2) 力偶对于任一点的矩等于力偶矩，而与矩心的位置无关。

(3) 力偶矩相等的两力偶等效。

力偶矩是自由矢量。

习 题 及 解 答

1-1 支座受力 $\boldsymbol{F}$，已知 $F=10\text{kN}$，方向如题 1-1 图所示，求力 $\boldsymbol{F}$ 沿 x、y 轴及沿 x'、y' 轴分解的结果，并求力 $\boldsymbol{F}$ 在各轴上的投影。

解 分解（依据平行四边形法则）：

分力大小：$|\boldsymbol{F}_x| = F\cos 30^\circ = 8.66\text{kN}$

$|\boldsymbol{F}_y| = F\sin 30^\circ = 5\text{kN}$

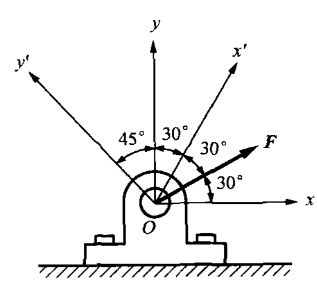
$|\boldsymbol{F}'_x| = |\boldsymbol{F}| = 10\text{kN}$

$|\boldsymbol{F}'_y| = 2F\sin 15^\circ = 5.17\text{kN}$

投影：$F_x = 8.66\text{kN}$

$F_y = 5\text{kN}$

$F'_x = F\cos 30^\circ = 8.66\text{kN}$



题 1-1 图

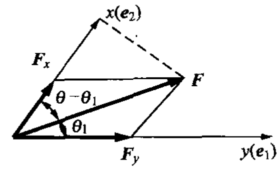
$$F'_y = -F\cos75° = -2.59\text{kN}$$

1－2　一力 $\boldsymbol{F}$ 在夹角为 θ 的两轴所在平面内，并已知力 $\boldsymbol{F}$ 在两轴上的投影分别为 F_1、F_2，求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小。若沿两轴的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，列出 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表达式。

解　(1) 由题 1－2 图可知

$$F_1 = F\cos\theta_1 \quad ①$$

$$F_2 = F\cos(\theta-\theta_1) \quad ②$$



题 1－2 图

展开②得

$$F_2 = F\cos\theta\cos\theta_1 - F\sin\theta\sin\theta_1 = F_1\cos\theta - \sin\theta\sqrt{F^2-F_1^2}$$

整理上式得　$$F = \frac{\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\theta}}{\sin\theta}$$

(2) 若沿两轴的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，则

$$F_y = F_1 - F_x\cos\theta \quad ③$$

$$F_x = F_2 - F_y\cos\theta \quad ④$$

将③代入④，整理得　$$F_x = \frac{F_2-F_1\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad ⑤$$

将⑤代入③得　$$F_y = \frac{F_1-F_2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

则　$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sin^2\theta}[(F_1-F_2\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (F_2-F_1\cos\theta)\boldsymbol{e}_2]$$

1－3　计算题 1－3 图中 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 三个力分别在 x、y、z 轴上的投影。已知 $F_1=2\text{kN}$，$F_2=1\text{kN}$，$F_3=3\text{kN}$。

解　$$F_{1x} = -F_1\cdot\frac{3}{5} = -2\times\frac{3}{5} = -1.2\ (\text{kN})$$

$$F_{1y} = F_1\cdot\frac{4}{5} = 1.6\text{kN}$$

$$F_{1z} = 0$$

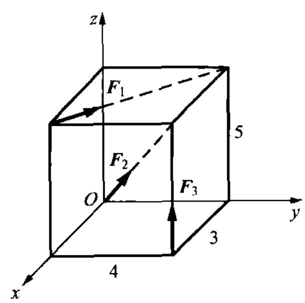
$$F_{2x} = F_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} = 0.424\text{kN}$$

$$F_{2y} = F_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5} = 0.566\text{kN}$$

$$F_{2z} = F_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\text{kN}$$

$$F_{3x} = F_{3y} = 0$$

$$F_{3z} = F_3 = 3\ (\text{kN})$$



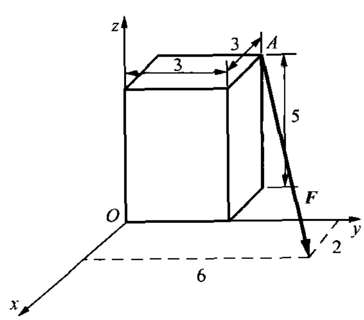
题 1－3 图

1－4　已知 $F=10\text{kN}$，求 $\boldsymbol{F}$ 在三直角坐标轴上的投影。

解　$$F_z = -F\cdot\frac{5}{\sqrt{59}} = -6.51\text{kN}$$

$$F_x = F\cdot\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{59}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = 6.51\text{kN}$$

$$F_y = F\cdot\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{59}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 3.91\text{kN}$$



题 1－4 图

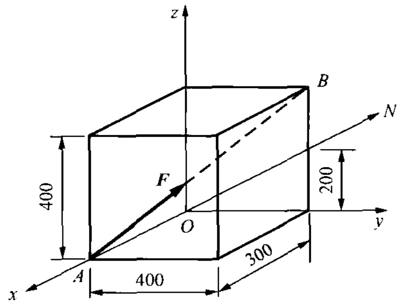
1-5 力 $\boldsymbol{F}$ 沿正六面体的对顶线 AB 作用，如题 1-5 图所示，$F=100\text{N}$，求 $\boldsymbol{F}$ 在 ON 上的投影。

解 $F_n = F_x l_1 + F_y l_2 + F_z l_3$

式中 $F_x = \dfrac{-3F}{\sqrt{41}}$，$F_y = \dfrac{4F}{\sqrt{41}}$，$F_z = \dfrac{4F}{\sqrt{41}}$

$$l_1 = 0,\ l_2 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ l_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

则 $$F_n = 83.8\text{N}$$



题 1-5 图
(mm)

1-6 两个大小相等的力，$F_1=F_2=F$，如题 1-6 图所示，当夹角为 2θ 时，它们的合力等于当此两力夹角为 2φ 时的合力的两倍，试证明 $\cos\theta=2\cos\varphi$。

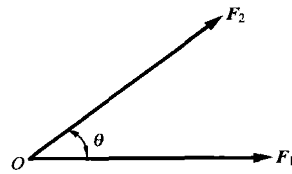
证 当夹角为 2θ 时

$$F_{\text{R}}^2 = 2F^2 + 2F^2\cos2\theta = 2F^2(1+\cos2\theta)$$

当夹角为 2φ 时

$$F_{\text{R}'}^2 = 2F^2(1+\cos2\varphi)$$

已知 $F_{\text{R}}^2=4F_{\text{R}'}^2$，则有 $\cos\theta = 2\cos\varphi$ 即得证。

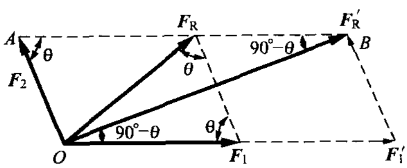


题 1-6 图

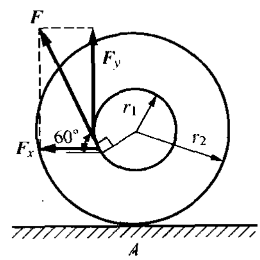
1-7 已知相交的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$的合力 $F_{\text{R}}=F_1$，如题 1-7 图所示，试证明当 $\boldsymbol{F}_1$ 值增大一倍时，新的合力与 $\boldsymbol{F}_2$ 成直角。

证 在图示$\triangle OAB$ 中可知$\angle BOA=90°$

1-8 试求题 1-8 图所示力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点的矩，已知 $r_1=0.2\text{m}$，$r_2=0.5\text{m}$，$F=300\text{N}$。



题 1-7 图



题 1-8 图

解 如图示，$\boldsymbol{F}$ 分解为 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$。

以逆时针转向为正，则有

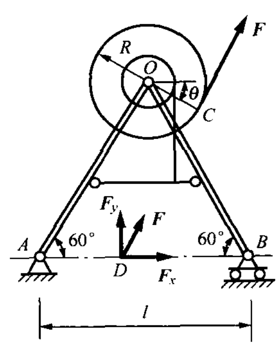
$$M_A(\boldsymbol{F}) = F_x(r_2 - r_1\cos60°) - F_y r_1\sin60°$$

式中，$F_x=\dfrac{F}{2}$，$F_y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}F$，代入，得 $M_A = 15\text{N}\cdot\text{m}$

1-9 试求题 1-9 图所示绳子张力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点及对 B 点的矩。已知 $F=10\text{kN}$，$l=2\text{m}$，$R=0.5\text{m}$，$\theta=30°$。

解 $OC\perp OA$ 则 $M_A(\boldsymbol{F}) = F\cdot OC = 10\times0.5 = 5\ (\text{kN}\cdot\text{m})$

$\boldsymbol{F}$ 作用线与 AB 交于 D 点，$\overline{AD}=\dfrac{2\overline{OC}}{\sqrt{3}}$

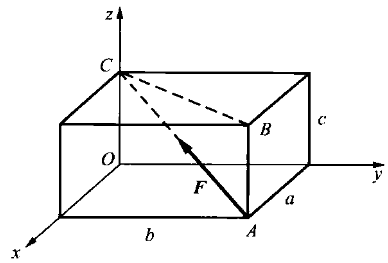


题 1-9 图

将 $\boldsymbol{F}$ 分解为 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$，则 $\boldsymbol{F}$ 对 B 点的矩等于 $\boldsymbol{F}_y$ 对 B 点的矩

$$M_B(\boldsymbol{F}) = M_B(\boldsymbol{F}_y) = -F_y \cdot \overline{BD} = -F\sin 60^\circ \cdot (2-\overline{AD}) = -12.32\text{kN} \cdot \text{m}$$

1-10　已知正六面体的边长为 a、b、c，沿 AC 作用一力 $\boldsymbol{F}$，如题 1-10 图所示，试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的矩的矢量表达式。



题 1-10 图

解　$\boldsymbol{F}$ 向 x、y、z 轴投影得

$$F_x = -F \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{Fa}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

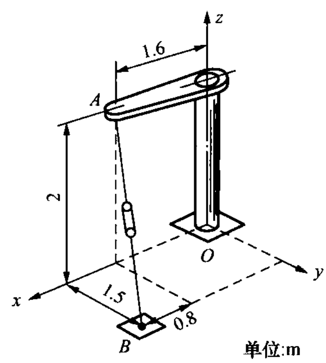
$$F_y = -\frac{Fb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$F_z = \frac{Fc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

则
$$M_x = F_z \cdot b,\ M_y = -F_z \cdot a,\ M_z = 0$$

$$\boldsymbol{M}_O = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} = \frac{cF}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(b\boldsymbol{i} - a\boldsymbol{j})$$

1-11　钢丝绳 AB 用螺栓拉紧，尺寸如题 1-11 图所示。已知其拉力为 1.2kN，求：①绳子作用于 A 点的力沿三个坐标轴的分力；②绳子作用于 A 点的力对 O 点的力矩。



题 1-11 图

解　(1) $F_x = F \cdot \dfrac{0.8}{\sqrt{2^2+1.5^2+0.8^2}} = 0.366\text{kN}$

$$F_y = F \cdot \frac{1.5}{\sqrt{2^2+1.5^2+0.8^2}} = 0.686\text{kN}$$

$$F_z = -F \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+1.5^2+0.8^2}} = -0.915\text{kN}$$

则　$\boldsymbol{F} = 0.366\boldsymbol{i} + 0.686\boldsymbol{j} - 0.915\boldsymbol{k}$ (kN)

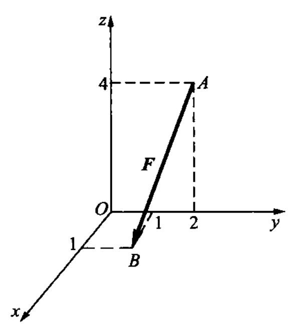
(2) $M_x = -F_y \cdot 2 = -1.37\text{kN} \cdot \text{m}$

$$M_y = 0.366 \times 2 + 0.915 \times 1.6 = 2.196\ (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$M_z = 0.686 \times 1.6 = 1.098\ (\text{kN} \cdot \text{m})$$

则　$\boldsymbol{M}_O = -1.37\boldsymbol{i} + 2.196\boldsymbol{j} + 1.098\boldsymbol{k}$ (kN·m)

1-12　已知 F=10kN，$\boldsymbol{F}$ 作用线由 A (0，2，4) 点指向 B (1，1，0) 点，如题 1-12 图所示，试写出该力对坐标原点 O 的矩的矢量表达式（长度单位为 m）。



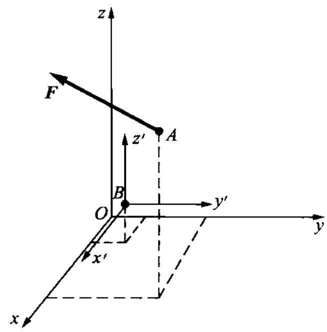
题 1-12 图

解　$F_x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}F = \dfrac{F}{\sqrt{18}}$，　$F_y = -\dfrac{F}{\sqrt{18}}$，　$F_z = -\dfrac{4F}{\sqrt{18}}$

代入力对点的矩表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k} \\ &= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \\ &= -\frac{4}{\sqrt{18}}F\boldsymbol{i} + \frac{4}{\sqrt{18}}F\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{18}}F\boldsymbol{k} \\ &= -9.43\boldsymbol{i} + 9.43\boldsymbol{j} - 4.71\boldsymbol{k}\ (\text{kN} \cdot \text{m})\end{aligned}$$

1－13 已知力 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，其作用点 A 的位置矢 $\boldsymbol{r}_A=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，如题 1－13 图所示，求力 $\boldsymbol{F}$ 对位置矢为 $\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的一点 B 的矩（力以 N 计，长度以 m 计）。



题 1－13 图

解 求力 $\boldsymbol{F}$ 对 B 的矩，即把 B 点作为坐标原点，建立参考系 $Bx'y'z'$。则 $\boldsymbol{F}$ 的作用点 A 在新坐标系中的坐标为（2，1，3）

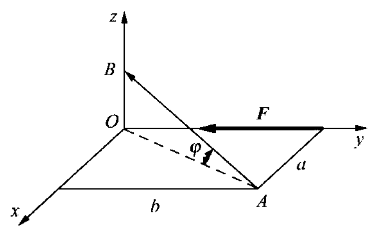
代入力对点的矩表达式，得

$$M_{x'}=y'F_z-z'F_y=10\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{y'}=4\mathrm{N\cdot m}\qquad M_{z'}=-8\mathrm{N\cdot m}$$

则 $$\boldsymbol{M}_B=10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N\cdot m})$$

1－14 如题 1－14 图所示，已知力 $\boldsymbol{F}$，试求该力对轴 AB 的矩。



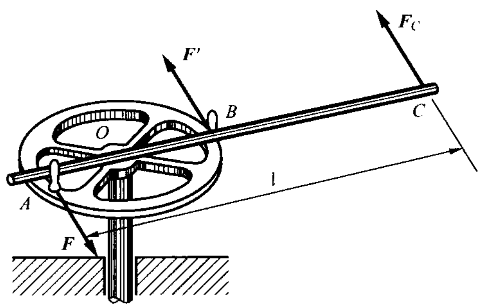
题 1－14 图

解 以 A 为原点，建立参考系 $x'y'z'$，各轴分别与 x、y、z 轴平行。

$$M_{x'}=0,\ M_{y'}=0,\ M_{z'}=Fa$$

则 $$M_{AB}=M_{z'}\sin\varphi=Fa\sin\varphi$$

1－15 工人启闭闸门时，为了省力，常常用一根杆子插入手轮中，并在杆的一端 C 施力，以转动手轮，如题 1－15 图所示。设手轮直径 $AB=0.6\mathrm{m}$，杆长 $l=1.2\mathrm{m}$，在 C 端用 $F_C=100\mathrm{N}$ 的力能将闸门开启，若不借用杆子而直接在手轮 A、B 处施加力偶（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$），问 $\boldsymbol{F}$ 至少应为多大才能开启闸门？



题 1－15 图

解 $$F_C\cdot OC=F\cdot AB$$

解得 $$F=\frac{100\times 0.9}{0.6}=150\ (\mathrm{N})$$

第二章　力 系 的 简 化

内 容 摘 要

一、力的平移定理

作用在刚体上的力，可以等效地平移到刚体上任一指定点，但必须同时在该力与指定点所确定的平面内附加一个力偶，该附加力偶的力偶矩等于原力对指定点的力矩。

二、汇交力系的简化

汇交力系简化的结果是一过汇交点的合力，它等于原力系各力的矢量和

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum\boldsymbol{F}_i$$

可用几何法和解析法求合力的大小和方向。

三、力偶系的简化

力偶系简化的结果是一个合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的矢量和。即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_n=\sum\boldsymbol{M}_i$$

四、任意力系的简化

任意力系向一点（简化中心）简化，得到一个力和一个力偶。这个力作用于简化中心，等于原力系中所有各力的矢量和，称为原力系的主矢量；这个力偶的矩等于原力系中所有各力对于简化中心的矩的矢量和，称为原力系对于简化中心的主矩。即有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum\boldsymbol{F}_i$$

$$\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{M}_{O1}+\boldsymbol{M}_{O2}+\cdots+\boldsymbol{M}_{On}=\sum\boldsymbol{M}_{Oi}$$

主矢与简化中心的位置无关，主矩一般与简化中心的位置有关。

任意力系向一点简化的最终结果可出现下列几种情况：

(1) 若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$，$\boldsymbol{M}_O\neq 0$，则原力系简化为一个力偶，力偶矩等于原力系对于简化中心的主矩。在这种情况下，主矩（即力偶矩）将不因简化中心位置的不同而改变。

(2) 若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$，$\boldsymbol{M}_O=0$，则原力系简化为一个力，该力称为原力系的合力。

(3) 若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$，$\boldsymbol{M}_O\neq 0$，且 $\boldsymbol{M}_O$ 与 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 相垂直，则原力系也简化为一个力，该力称为原力系的合力。

(4) 若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\neq 0$，$\boldsymbol{M}_O\neq 0$，且 $\boldsymbol{M}_O$ 与 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 不相垂直，则原力系简化为一力螺旋。

(5) 若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$，$\boldsymbol{M}_O=0$，则原力系为平衡力系。

五、重心和形心

由下式确定物体的重心 C：

$$x_C=\frac{\sum x_i\Delta W_i}{W},\ y_C=\frac{\sum y_i\Delta W_i}{W},\ z_C=\frac{\sum z_i\Delta W_i}{W}$$

式中：x_i，y_i，z_i 及 x_C，y_C，z_C 分别是 M_i 及重心 C 的位置坐标。

由下式确定物体的形心 C：

$$x_C=\frac{\sum x_iV_i}{V},\quad y_C=\frac{\sum y_iV_i}{V},\quad z_C=\frac{\sum z_iV_i}{V}$$

可见，均质物体的重心就是几何形体的中心，即形心。

确定物体重心的方法：

(1) 简单几何形体。可通过积分确定重心的位置。

(2) 组合形体。往往可以看作几个简单形体的组合，可由组合法或负面积法确定重心位置。

如果一个复杂的形体不能分成简单形体，可由实验方法或近似方法确定其重心。

六、平行分布力系的简化

(1) 沿平面曲线（或直线）分布的平行分布力的合力的大小等于荷载图的面积，合力通过荷载图面积的形心。

(2) 平行分布的面力的合力的大小等于荷载图的体积，合力通过荷载图体积的形心。

习 题 及 解 答

2-1 一钢结构节点，在沿 OA、OB、OC 的方向受到三个力的作用，如题 2-1 图所示，已知 $F_1=1\text{kN}$，$F_2=\sqrt{2}\text{kN}$，$F_3=2\text{kN}$，试求这三个力的合力。

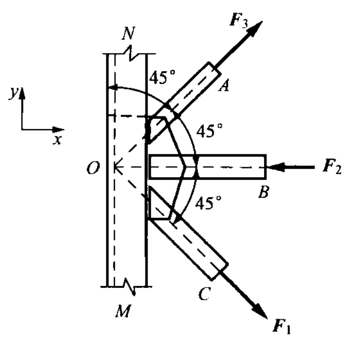
解 如题图建立坐标系

$$F_{Rx}=\sum F_{ix}=(F_1+F_3)\cos45°-F_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{kN}$$

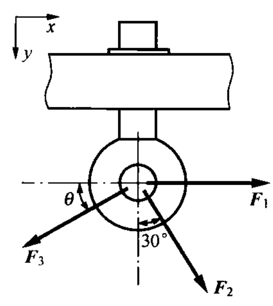
$$F_{Ry}=\sum F_{iy}=(F_3-F_1)\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{kN}$$

则 $F_R=1\text{kN}$，沿 $\boldsymbol{F}_3$ 方向。

2-2 如题 2-2 图所示，螺栓环眼受到铅垂面内三根绳索拉力的作用，其中两根绳索的拉力已知，$F_1=600\text{N}$，$F_2=800\text{N}$。若欲使该力系的合力方向铅垂向下，大小等于 1500N，则另一根绳索的拉力 $\boldsymbol{F}_3$ 大小和方向应如何？



题 2-1 图



题 2-2 图

解

$$F_{Rx}=F_1+F_2\cos60°-F_3\cos\theta=0 \quad ①$$

$$F_{Ry}=F_2\cos30°+F_3\sin\theta=1500\text{N} \quad ②$$

由①②得 $\theta = 38°54'$ $F_3 = 1280\text{N}$

2-3 已知 $F_1=2\sqrt{6}\text{N}$，$F_2=2\sqrt{3}\text{N}$，$F_3=1\text{N}$，$F_4=4\sqrt{2}\text{N}$，$F_5=7\text{N}$，如题 2-3 图所示，求五个力合成的结果（提示：不必开根号，可使计算简化）。

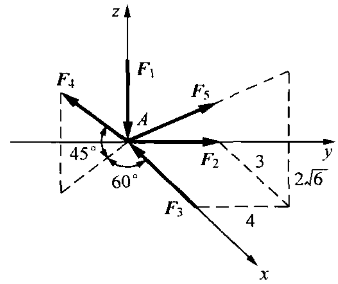
解 $F_{Rx} = -F_3 + F_4\cos45°\cos60° + F_5 \cdot \frac{3}{7} = 4\text{N}$

$$F_{Ry} = F_2 - F_4\cos45°\sin60° + F_5 \cdot \frac{4}{7} = 4\text{N}$$

$$F_{Rz} = -F_1 + F_4\cos45° + F_5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 4\text{N}$$

则 $$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 4\sqrt{3}\text{N}$$

$$\angle(\boldsymbol{F}_R, x) = \angle(\boldsymbol{F}_R, y) = \angle(\boldsymbol{F}_R, z) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 54°44'$$



题 2-3 图

2-4 力偶矩矢 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 分别表示作用于平面 ABC 和 ACD 上的力偶，如题 2-4 图所示，已知 $M_1=M_2=M$，求合力偶。

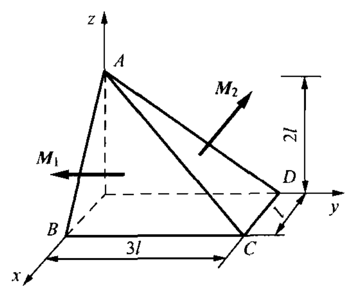
解 $M_{1x} = \frac{2}{\sqrt{5}}M$，$M_{1y} = 0$，$M_{1z} = \frac{M}{\sqrt{5}}$

$$M_{2x} = 0,\ M_{2y} = \frac{2}{\sqrt{13}}M,\ M_{2z} = \frac{3M}{\sqrt{13}}$$

则 $$M_{Rx} = \sum M_{ix} = \frac{2}{\sqrt{5}}M$$

$$M_{Ry} = \frac{2}{\sqrt{13}}M$$

$$M_{Rz} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)M$$



题 2-4 图

$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2} = 1.66M$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_R, x) = \frac{M_{Rx}}{M_R};\ \cos(\boldsymbol{M}_R, y) = \frac{M_{Ry}}{M_R};\ \cos(\boldsymbol{M}_R, z) = \frac{M_{Rz}}{M_R}$$

2-5 沿正六面体的三棱边作用着三个力，在平面 $OABC$ 内作用一个力偶，如题 2-5 图所示，已知 $F_1=20\text{N}$，$F_2=30\text{N}$，$F_3=50\text{N}$，$M=1\text{N}\cdot\text{m}$，求力偶与三个力合成的结果（长度单位为 mm）。

解 将 $\boldsymbol{F}_3$ 分解为 $\boldsymbol{F}_1'$（$F_1'=20\text{N}$）和 $\boldsymbol{F}_2'$（$F_2'=30\text{N}$）。

这样三个力分成两个力偶（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$），（$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$）

$$M_1 = F_1 \times 0.25 = 5\ (\text{N}\cdot\text{m}),\ M_2 = F_2 \times 0.2 = 6\text{N}\cdot\text{m}$$

则 $$M_{Rx} = \sum M_{ix} = M \cdot \frac{200}{250} - M_1 \cdot \frac{200}{250} - M_2 = -9.2\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{Ry} = \sum M_{iy} = -M \cdot \frac{150}{250} - M_1 \cdot \frac{150}{250} = -3.6\text{N}\cdot\text{m}$$

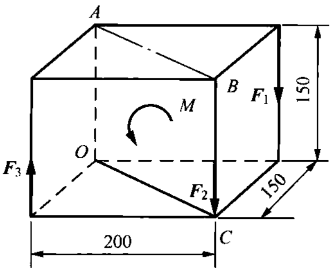
$$M_{Rz} = 0$$

$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2} = 9.88\text{N}\cdot\text{m}$$

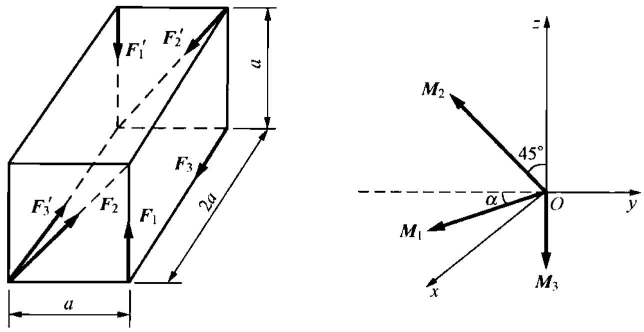
$$\cos(\boldsymbol{M}_R, x) = \frac{-9.2}{9.88} = -0.931, \cos(\boldsymbol{M}_R, y) = \frac{-3.6}{9.88} = -0.364$$

得 $$\angle(\boldsymbol{M}_R, x) = 158.6°, \angle(\boldsymbol{M}_R, y) = 111.4°$$

2-6 一矩形体上作用着三个力偶（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$），（$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$），（$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_3'$），已知 $F_1=F_1'=10\text{N}$，$F_2=F_2'=16\text{N}$，$F_3=F_3'=20\text{N}$，$a=0.1\text{m}$，求三个力偶的合成结果。



题 2-5 图



(a) (b)

题 2-6 图

解 将三力偶矩用矢量表示如题 2-6 图（b）所示。

$$M_1 = F_1 \times \sqrt{5}a = \sqrt{5}\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_2 = F_2 \times 2a = 3.2\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_3 = F_3 \times a = 2\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_{Rx} = M_1 \sin\alpha = 1\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_{Ry} = -M_2 \sin 45° - M_1 \cos\alpha = -4.26\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_{Rz} = -M_3 + M_2 \cos 45° = 0.26\text{N} \cdot \text{m}$$

则 $$M_R = 4.38\text{N} \cdot \text{m}$$

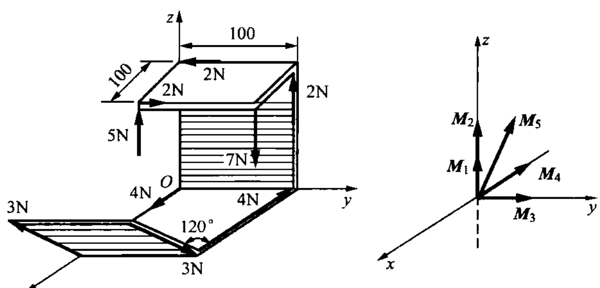
$$\angle(\boldsymbol{M}_R, x) = 76.8°, \angle(\boldsymbol{M}_R, y) = 166.6°, \angle(\boldsymbol{M}_R, z) = 85.6°$$

2-7 试求题 2-7 图（a）所示诸力合成的结果，图中长度单位为 mm。

解 这是一个力偶系。

$$M_1 = 2 \times 0.1 = 0.2\ (\text{N} \cdot \text{m})$$
$$M_2 = 4 \times 0.1 = 0.4\ (\text{N} \cdot \text{m})$$
$$M_3 = 2 \times 0.1 = 0.2\ (\text{N} \cdot \text{m})$$
$$M_4 = 5 \times 0.1 = 0.5\ (\text{N} \cdot \text{m})$$
$$M_5 = 3 \times 0.1 = 0.3\ (\text{N} \cdot \text{m})$$

方向如题 2-7 图（b）所示。



(a) (b)

题 2-7 图

则 $$M_{Rx} = -M_4 - M_5 \cos 30° = -0.76\text{N} \cdot \text{m}$$

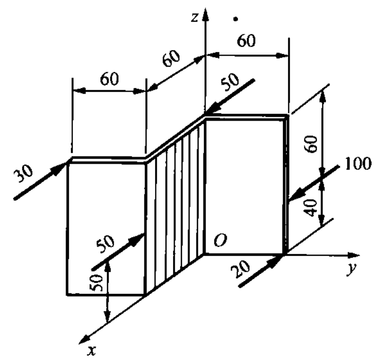
$$M_{Ry} = M_3 = 0.2\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{Rz} = M_1 + M_2 + M_5 \sin 30° = 0.75\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_R = 1.086\text{N}\cdot\text{m}$$

$$\boldsymbol{M}_R = -0.76\boldsymbol{i} + 0.2\boldsymbol{j} + 0.75\boldsymbol{k}\ (\text{N}\cdot\text{m})$$

2-8 题 2-8 图所示为一空间平行力系，求力系的合力及作用线位置。图中力的单位为 N，长度单位为 mm。



题 2-8 图

解 将力系向 O 点简化，主矢： $F_{Ry} = F_{Rz} = 0$

$$F_R = F_{Rx} = \sum F_i = 50\text{N}$$

主矩：$M_y = 50\times0.05 - 30\times0.1 + 100\times0.4 = 3.5\ (\text{N}\cdot\text{m})$

$M_z = -30\times0.06 + 20\times0.06 - 100\times0.06 = -6.6\ (\text{N}\cdot\text{m})$

$$z = \frac{M_y}{F_R} = 0.07\text{m} = 70\text{mm}$$

$$y = \frac{M_z}{F_R} = 132\text{mm}$$

2-9 求题 2-9 图所示平行力系合成的结果（小方格边长为 100mm）。

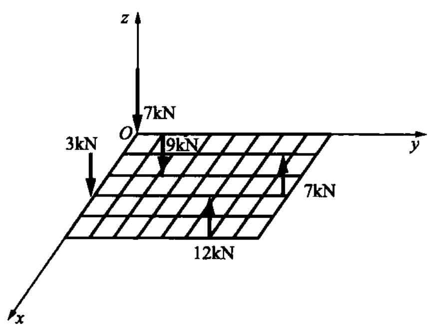
解 主矢：$\boldsymbol{F}_R = 0$

主矩： $M_x = -9\times0.2 + 12\times0.6 + 7\times0.7 = 10.30\ (\text{kN}\cdot\text{m})$

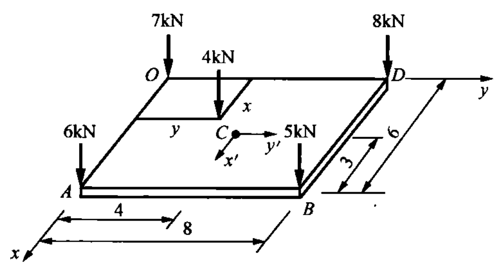
$$M_y = 3\times0.5 + 9\times0.4 - 12\times0.6 - 7\times0.3 = -4.20\ (\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$M_O = 10.3\boldsymbol{i} - 4.2\boldsymbol{j}\ (\text{kN}\cdot\text{m})$$

2-10 平板 $OABD$ 上作用空间平行力系如题 2-10 图所示，问 x、y 应等于多少才能使该力系合力作用线过板中心 C。



题 2-9 图



题 2-10 图

解 以 C 为圆心，建立参考系 $Cx'y'$，如题 2-10 图所示，x'平行 x，y'平行 y

由 $\sum M_{y'} = 0$ 得 $(6+5)\times3 - 4\times(3-x) - (7+8)\times3 = 0$

解得 $x = 6\text{m}$

由 $\sum M_{x'} = 0$ 得 $(7+6)\times4 + 4\times(4-y) - (8+5)\times4 = 0$

解得 $y = 4\text{m}$

2-11 如题 2-11 图所示力系中，$F_1 = 250\text{N}$，$F_2 = 350\text{N}$，$F_3 = 200\text{N}$，力偶矩 $M = 500\text{N}\cdot\text{m}$。试计算：①该力系向 O 点简化的结果；②力系的合力。

解 (1) $F_R = F_{Rz} = F_1 + F_3 - F_2 = 100\text{N}$

$$M_z = 0$$