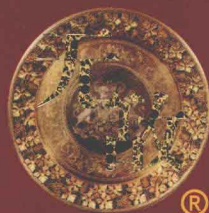


12345678910

SUPER



超常思维数学公式定理
数学科最宜辅学形式一

高中数学

公式定理

讲练双拼

集中精讲

“精讲”部分彩色化，共十九章内容，
章下分节精讲高中阶段的超重要公式和定理；
选配经典例题，并辅助精彩点评。



讲

$+$ π

Δ R $t \geq$

W 外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

‘SUPER’



高中数学

公式定理

讲练双拼

集中精讲

讲



 外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS



图书在版编目(CIP)数据

无敌高中数学公式定理讲练双拼 / 毛英编著. —北京: 外文出版社, 2011
(无敌讲练双拼系列)
ISBN 978-7-119-06876-3

I. ①无… II. ①毛… III. ①数学—公式—高中—教学参考资料
②数学—定律—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第013273号

2011年3月第1版

2011年3月第1版第1次印刷

- 出 版 外文出版社·北京市西城区百万庄大街24号·邮编: 100037
- 责任编辑 吴运鸿
- 经 销 新华书店 / 外文书店
- 印 刷 北京市京津彩印有限公司
- 印 次 2011年3月第1版第1次印刷
- 开 本 1/16, 700 × 960mm, 18印张
- 书 号 ISBN 978-7-119-06876-3
- 定 价 25.80元

- 总 监 制 张志坚
- 总 编 辑 吴锴鎏
- 作 者 毛 英
- 主 编 陈 茜
- 执行责编 金会芳
- 文字编辑 杨丽坤
- 美术编辑 李可欣
- 封面设计 李子奇

- 行销企划 北京光海文化用品有限公司
北京市海淀区车公庄西路乙19号
北塔六层 邮编: 100048
- 集团电话 (010) 88018838(总机)
- 发 行 部 (010) 88018956(专线)
- 订购传真 (010) 88018952
- 读者服务 (010) 88018838转53、10(分机)
- 选题征集 (010) 88018958(专线)
- 网 址 <http://www.super-wudi.com>
- E-mail service@super-wudi.com

- “无敌”商标专用权经国家工商行政管理局商标局核准由北京光海文化用品有限公司享有。
- 本书图文与版式设计非经书面授权不得使用; 版权所有, 侵权必究。

第1章 集合与常用逻辑用语

讲 010 练 283

第一节 集合 010

- ① 集合的概念……010
- ② 集合的表示方法……010
- ③ 集合间的基本关系……011
- ④ 集合的基本运算……012

第二节 常用逻辑用语 014

- ① 四种命题的形式……014
- ② 四种命题的相互关系……014
- ③ 充分条件、必要条件和充要条件……014
- ④ 简单的逻辑联结词……016
- ⑤ 全称量词与存在量词……016

第2章 函数概念与指数函数、对数函数、幂函数

讲 017 练 277

第一节 函数 017

- ① 函数的概念、表示与分段函数……017
- ② 映射……018
- ③ 函数的单调性与奇偶性……018

第二节 指数函数 020

- ① 有理指数幂……020
- ② 实数指数幂……020
- ③ 指数函数的概念、图象及其性质……020

第三节 对数函数 021

- ① 对数的概念、性质及其运算性质……021
- ② 换底公式……021
- ③ 两个特殊的对数……021

- ④ 对数函数的概念、图象及其性质……022

- ⑤ 指数函数与对数函数的关系……022

第四节 幂函数 023

- ① 幂函数的概念……023
- ② 幂函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{-1}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象及其性质……023

第五节 函数模型及其应用 024

- ① 函数的零点……024
- ② 二分法……024

第3章 三角函数、三角恒等变换、解三角形

讲 025 练 264

第一节 三角函数 025

- ① 任意角的概念和弧度制……025
- ② 任意角的正弦、余弦、正切的定义……025
- ③ 用单位圆中三角函数线表示正弦、余弦和正切……026
- ④ 诱导公式……027
- ⑤ 同角三角函数的基本关系式……027
- ⑥ 周期函数的定义、三角函数的周期性……028
- ⑦ 函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 的图象和性质……028
- ⑧ 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象……031

第二节 三角恒等变换 032

- ① 两角和与差的正弦、余弦、正切公式……032
- ② 二倍角的正弦、余弦、正切公式……033

第三节 解三角形 034

- ① 正弦定理、余弦定理……034

目录 Contents

② 解三角形……034

第4章 数列

讲 035 练 255

第一节 数列的概念和简单表示法 035

- ① 数列的概念……035
- ② 数列的简单表示法……035
- ③ 数列通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系……035

第二节 等差数列、等比数列 036

- ① 等差数列的概念……036
- ② 等差数列的通项公式与前 n 项和公式……036
- ③ 等比数列的概念……038
- ④ 等比数列的通项公式与前 n 项和公式……038

第5章 不等式

讲 040 练 248

第一节 不等关系与不等式的基本性质 040

- ① 不等式的定义……040
- ② 不等式的基本性质……040

第二节 一元二次不等式 041

- ① 一元二次不等式的概念……041
- ② 解一元二次不等式……041

第三节 简单的线性规划 042

- ① 用二元一次不等式(组)表示平面区域……042
- ② 简单的线性规划问题……043

第四节 基本不等式 044

- ① 均值定理……044

- ② 用基本不等式解决简单的最大(小)值问题……044

第6章 推理与证明

讲 045 练 236

第一节 合情推理与演绎推理 045

- ① 合情推理……045
- ② 归纳和类比……045
- ③ 演绎推理……046

第二节 直接证明与间接证明 047

- ① 综合法……047
- ② 分析法……048
- ③ 反证法……048

第三节 数学归纳法 049

- ① 数学归纳法……049

第7章 平面向量

讲 050 练 228

第一节 平面向量 050

- ① 平面向量的相关概念……050
- ② 特殊的向量……050

第二节 向量的线性运算 051

- ① 向量的加法与减法……051
- ② 向量的数乘……051
- ③ 两个向量共线……052

第三节 平面向量的基本定理及坐标表示 052

- ① 平面向量的基本定理……052
- ② 平面向量的正交分解及其坐标表示……052
- ③ 用坐标表示平面向量的加法、减法与数乘运算……053

- ④ 用坐标表示的平面向量共线的条件
……053

第四节 平面向量的数量积 053

- ① 数量积……053
② 用数量积判断两个平面向量的垂直关系
……054

第8章 导数及其应用

讲 055 练 220

第一节 导数概念及其几何意义 055

- ① 导数的概念……055
② 导数的几何意义……056

第二节 导数的运算 056

- ① 导数的四则运算……056
② 简单的复合函数的导数……057
③ 导数公式表……057

第三节 导数在研究函数中的应用 058

- ① 利用导数研究函数的单调性
……058
② 利用导数研究函数的极值、最值
……059

第四节 定积分与微积分基本定理 061

- ① 定积分的概念……061
② 微积分基本定理……061

第9章 数系的扩充与复数的引入

讲 062 练 210

- ① 复数的基本概念、复数相等的条件
……062
② 复数的代数表示法及几何意义……062
③ 复数代数形式的四则运算……063

- ④ 复数代数形式加减法的几何意义……064

第10章 立体几何初步

讲 065 练 208

第一节 空间几何体 065

- ① 柱、锥、台、球及其简单组合体
……065
② 三视图……068
③ 斜二测法画简单空间图形的直观图
……068
④ 空间几何体的表面积和体积
……069

第二节 点、直线、平面间的位置关系 070

- ① 空间线、面的位置关系……070
② 公理1、公理2、公理3、公理4、定理
……070
③ 线、面平行或垂直的判定……071
④ 线、面平行或垂直的性质……073

第11章 空间向量与立体几何

讲 075 练 200

第一节 空间直角坐标系 075

- ① 空间直角坐标系……075
② 空间两点间的距离公式……075

第二节 空间向量及其运算 076

- ① 空间向量的概念……076
② 空间向量基本定理……076
③ 空间向量的正交分解及其坐标表示
……077
④ 空间向量的线性运算及其坐标运算
……077

目录 Contents

- ⑤ 空间向量的数量积及其坐标表示
……078
- ⑥ 运用向量的数量积判断向量的共线
与垂直……079

第三节 空间向量的应用 080

- ① 直线的方向向量与平面的法向量
……080
- ② 线面位置关系……080
- ③ 线线、线面、面面的夹角……081

第12章 平面解析几何初步

讲 085 练 191

第一节 直线与方程 085

- ① 直线的倾斜角和斜率……085
- ② 过两点的直线斜率的计算公式……085
- ③ 直线方程的点斜式、两点式及一般式
……086
- ④ 两条直线平行或垂直的判定……087
- ⑤ 两点间的距离公式、中点公式、点到直
线的距离公式……087
- ⑥ 两条平行线间的距离公式……088

第二节 圆与方程 089

- ① 圆的标准方程与一般方程……089
- ② 直线与圆的位置关系……090
- ③ 两圆的位置关系……091

第13章 圆锥曲线与方程

讲 092 练 184

第一节 曲线与方程 092

- ① 曲线与方程的对应关系……092
- ② 求轨迹方程的常用方法……093

第二节 圆锥曲线 093

- ① 椭圆的定义及标准方程……093
- ② 椭圆的简单几何性质……095
- ③ 抛物线的定义及标准方程……095
- ④ 抛物线的简单几何性质……096
- ⑤ 双曲线的定义及标准方程……097
- ⑥ 双曲线的简单几何性质……098
- ⑦ 直线与圆锥曲线的位置关系……099

第14章 算法初步

讲 101 练 175

第一节 算法的含义和程序框图 101

- ① 算法的含义和特点……101
- ② 程序框图的三种基本逻辑结构……101

第二节 基本算法语句 103

- ① 赋值语句……103
- ② 输入语句……103
- ③ 输出语句……103
- ④ 条件语句……104
- ⑤ 循环语句……104

第15章 计数原理

讲 105 练 168

第一节 加法原理、乘法原理 105

- ① 分类加法计数原理、分步乘法计数原理
……105
- ② 分类加法计数原理和分步乘法计数原理
的应用……105

第二节 排列与组合 106

- ① 排列、组合的概念……106
- ② 排列数公式、组合数公式……106

- ③ 用排列与组合解决一些简单的实际问题
……107

第三节 二项式定理 108

- ① 二项式定理……108
② 二项式系数的性质……108

第16章 统计

讲 109 练 159

第一节 随机抽样 109

- ① 简单随机抽样……109
② 系统抽样和分层抽样……109

第二节 用样本估计总体 110

- ① 频率分布表、直方图、折线图、茎叶图
……110
② 样本数据的基本数字特征……112
③ 用样本估计总体……112

第17章 概率

讲 113 练 150

第一节 事件与概率 113

- ① 随机事件的概率(概率的统计定义)
……113
② 随机事件的运算……113
③ 两个随机事件的概率加法公式……113

第二节 古典概型 114

- ① 古典概型……114

第三节 几何概型 115

- ① 几何概型……115

第四节 概率 116

- ① 取有限值的离散型随机变量及其分布列
……116

- ② 超几何分布……117
③ 条件概率……117
④ 事件的独立性……118
⑤ n 次独立重复试验与二项分布……118
⑥ 取有限值的离散型随机变量的均值、方差
……120
⑦ 正态分布……121

第18章 几何证明选讲

讲 122 练 137

第一节 相似三角形 122

- ① 平行截割定理……122
② 直角三角形的射影定理……122

第二节 圆 123

- ① 圆周角定理……123
② 圆的切线的判定定理及性质定理
……123
③ 弦切角定理……124
④ 相交弦定理和切割线定理……124
⑤ 圆内接四边形的性质定理与判定定理
……124

第19章 坐标系与参数方程

讲 125 练 133

第一节 极坐标系 125

- ① 用极坐标表示点的位置……125
② 极坐标和直角坐标的互化……125

第二节 参数方程 126

- ① 直线的参数方程……126
② 圆的参数方程……126
③ 椭圆的参数方程……126



第1章

CHAPTER 1

集合与常用逻辑用语



1

集合



-1>> 集合的概念

① 集合

一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集).构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).

② 集合的性质

- 确定性: 把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,即对于集合 A 和某一对象 a ,必须明确 $a \in A$,还是 $a \notin A$,二者必居其一.
- 互异性: 把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,即对于给定的集合,它的任意两个元素都是不同的.若 $x_1 \in A, x_2 \in A$,则 $x_1 \neq x_2$.
- 无序性: 集合中元素是无顺序的,如集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 是同一集合.

③ 集合的分类: 按集合含有元素的个数可把集合分为两类.一类是含有有限个元素的集合,叫做有限集;另一类是含有无限个元素的集合,叫做无限集.

④ 常用数集的表示: 自然数集 $\mathbf{N}$ 、正整数集 $\mathbf{N}_+$ (或 $\mathbf{N}^*$)、整数集 $\mathbf{Z}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 、实数集 $\mathbf{R}$ 、空集 $\emptyset$.

-2>> 集合的表示方法

① 列举法: 将集合中的所有元素一一列举出来,写在大括号内,这种表示方法叫做列举法.记作 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.② 描述法: 如果在集合 I 中,属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$,而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$,则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个特征性质.集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的,这种表示集合的方法叫做特征性质描述法,简称描述法.记作 $\{x \in A | p(x)\}$,读作: 使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素之集.

③ 图示法: 用平面内一条封闭曲线的内部表示一个集合的方法叫做图示法,此图形通常叫做韦恩图(或Venn图).

例 1 下列关系表示同一个集合的有_____.

- (1) $\{(1, 2)\}$ 与 $\{(2, 1)\}$;
- (2) $\{1, 2\}$ 与 $\{(1, 2)\}$;
- (3) $\{y|y=-x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{x|x \leq 0\}$;
- (4) $\left\{y|y=\frac{8}{6-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}\right\}$ 与 $\{-1, -2, -4, -8, 1, 2, 4, 8\}$;
- (5) $\{y|y=-2x+1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{(x, y)|y=-2x+1, x \in \mathbf{R}\}$.

解答 (1)是用列举法表示的两个不同的单元元素集,点 $(1, 2) \neq$ 点 $(2, 1)$.

(2)也是用列举法表示的两个不同的集合,前者是由两个元素1, 2构成的集合,后者是由点 $(1, 2)$ 构成的集合.

(3)前者中代表元素 y 和其性质 $y=-x^2, x \in \mathbf{R}$,实际是函数 $y=-x^2, x \in \mathbf{R}$ 中 y 的取值范围,与后者表示的集合是同一集合.

(4)前者是用描述法表示的集合,由元素的特征性质可一一列出集合中元素,当 $6-x=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ 时,得到的集合正好与后者相同,故(4)表示同一集合.

(5)虽然两者都是用描述法来表示集合,但是前者表示的是函数 $y=-2x+1, x \in \mathbf{R}$ 中 y 的取值范围,属于数集,而后者表示的是直线 $y=-2x+1$ 上的点,属于点集.故不是同一集合.

故答案为(3)(4).

点评 无论是用列举法表示集合,还是用描述法表示集合,都要准确理解概念及符号的意义.同一个集合可能有列举法和描述法等不同的表示形式,因而可以根据需要在列举法和描述法之间等价转化.

3 集合间的基本关系

- ❶ 子集: 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集.记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.如图1.
- ❷ 真子集: 如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集.记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.
- ❸ 集合的相等: 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,反之,集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素,那么集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$.如图2.

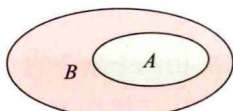


图 1

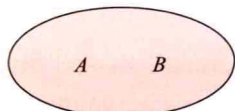


图 2

例2 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 a 等于

解答 $A=\{0, -4\}$, 由 $B \subseteq A$, 得

(1) 当 $B=A$ 时, 即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两实根 0 和 -4,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2-1) > 0, \\ -2(a+1) = -4, \\ a^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a=1.$$

(2) 当 $B \subsetneq A$ 时, 即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两相等实根或无实根.

若有两相等实根, 则 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2-1) = 0$, 故 $a=-1$, 此时 $B=\{0\}$, 符合题意;

若无实根, 则 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2-1) < 0$, 解得 $a < -1$, 此时 $B=\emptyset$, 符合题意.

综上所述, $a \leq -1$ 或 $a=1$ 为所求.

点评 有三点要注意: ①知识方面: 从描述法到列举法(集合 A); $B \subseteq A$ 等价于 $B \subsetneq A$ 或 $B=A$; 空集是任何集合的子集; 通过研究方程的根(集合的特征性质)来研究集合的关系. ②方法方面: 转化法. ③最容易忽视的问题是遗漏 $B=\emptyset$, 所以应注意思维的严谨性, 另外也可运用检验的方法查缺补漏.

例3 已知集合 $A=\{x|-2 < x < 5\}$, $B=\{x|m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, $B \neq \emptyset$, 且 $B \subseteq A$, 则 m 的取值范围是_____.

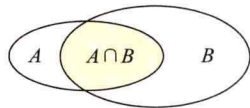
解答 依题意, 得 $\begin{cases} m+1 > -2, \\ 2m-1 < 5, \\ 2m-1 \geq m+1, \end{cases}$ 解得 $2 \leq m < 3$. 故所求 m 的取值范围是 $[2, 3)$.

点评 注意端点处取值问题, 可通过端点验证法检验, 避免出错.

4 集合的基本运算

① 交集

■ 交集的定义: 对于给定集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合, 叫做 A, B 的交集. 记作 $A \cap B$. $A \cap B = \{x|x \in A, \text{且 } x \in B\}$. 如右图所示:



■ 交集的性质

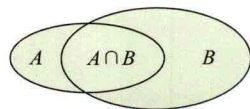
$$A \cap B = B \cap A; A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B; A \cap A = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset; A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

② 并集

■ 并集的定义: 对于给定的集合 A, B , 由两个集合的所有元素构成的集合, 叫做 A 与 B 的并集. 记作 $A \cup B$.

$A \cup B = \{x|x \in A, \text{或 } x \in B\}$. 如右图所示:



■ 并集的性质

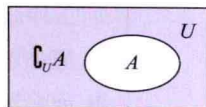
$$A \cup B = B \cup A; A \cup A = A; A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B;$$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A; A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

③ 补集

■ 补集的定义

如果给定集合 A 是全集 U 的一个子集, 由 U 中不属于 A 的所有元素构成的集合, 叫做 A 在 U 中的补集. 记作 $\complement_U A$.



$$\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}. \text{ 如右图所示:}$$

■ 补集的性质

$$A \cup \complement_U A = U; A \cap \complement_U A = \emptyset; \complement_U (\complement_U A) = A;$$

$$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B); \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$

POINT

(1) 要注意理解集合的交、并、补概念的实质, 即通过元素的属性体现集合与集合之间的关系.

(2) 善于通过图形语言(韦恩图或数轴等)探索利用直观图理解抽象概念的意义. 若给定的集合是不等式的解集, 用数轴辅助求解; 若给定的集合是点集, 用数形结合法辅助求解; 若给定的集合是抽象集合, 用韦恩图辅助求解. 注意培养图形语言、文字语言、符号语言之间的相互转化能力.

例 4 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解答 $\because M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}, \therefore M$ 中必有元素 a_1, a_2 , 但一定没有元素 a_3 .

$$\text{又 } \because M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$\therefore M$ 中可以有元素 a_4 , 也可以没有元素 a_4 .

$$\therefore M = \{a_1, a_2\} \text{ 或 } M = \{a_1, a_2, a_4\}. \text{ 故选 B.}$$

点评 本题主要考查如何通过元素与集合之间的关系来判断集合与集合之间的关系这一本质问题. 我们容易从已知并结合子集、交集的概念而得到 $a_3 \notin M$.

例 5 全集 $S = \{1, 3, x^3 + 3x^2 + 2x\}$, $A = \{1, |2x - 1|\}$, 如果 $\complement_S A = \{0\}$, 则这样的实数 x 是否存在? 若存在, 求出 x ; 若不存在, 请说明理由.

解答 假设存在这样的实数 x . $\because \complement_S A = \{0\}, \therefore 0 \in S$ 且 $0 \notin A$.

$$\text{又 } \because A \subseteq S, \text{ 故 } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x = 0, \\ |2x - 1| \neq 0, \\ |2x - 1| = 3. \end{cases}$$

解得 $x = -1$. 代入已知集合符合题意.

$\therefore$ 存在实数 x , 且 $x = -1$.

点评 补集概念的直接应用, 既是本题的切入点, 也是解决问题的关键.

2

常用逻辑用语



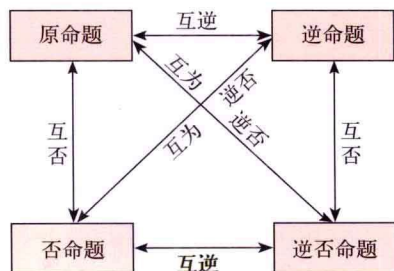
-1>>> 四种命题的形式

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 与 q 的否定,则四种命题的形式分别为:

- ① 原命题: 若 p ,则 $q(p \Rightarrow q)$.
- ② 逆命题: 若 q ,则 $p(q \Rightarrow p)$.
- ③ 否命题: 若非 p ,则非 $q(\neg p \Rightarrow \neg q)$.
- ④ 逆否命题: 若非 q ,则非 $p(\neg q \Rightarrow \neg p)$.



-2>>> 四种命题的相互关系



POINT 两个命题互为逆否命题,它们有相同的真假性;两个命题为互逆命题或互否命题,它们的真假性没有关系.

例1 命题:“若 $x^2 < 1$,则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是()

- A. 若 $x^2 \geq 1$,则 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$
- B. 若 $-1 < x < 1$,则 $x^2 < 1$
- C. 若 $x > 1$ 或 $x < -1$,则 $x^2 > 1$
- D. 若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$,则 $x^2 \geq 1$

解答 根据逆否命题的定义: 交换原命题的条件和结论,并且同时否定所得命题. 故D正确.



-3>>> 充分条件、必要条件和充要条件

给出命题“若 p ,则 q ”,

- ① 若 $p \Rightarrow q$,则称 p 是 q 成立的充分条件.
- ② 若 $q \Rightarrow p$,则称 p 是 q 成立的必要条件.
- ③ 若 $p \Leftrightarrow q$,则称 p 是 q 成立的充要条件.

POINT

(1)如果 p 是 q 成立的充分条件,那么 q 就是 p 成立的必要条件.

(2)如果 p 是 q 成立的充要条件,那么 q 也是 p 成立的充要条件.

(3)可用集合的包含关系来分析判断充分条件、必要条件和充要条件.

设命题 p, q 相应的集合分别为: $A=\{x|p(x)\}, B=\{x|q(x)\}$.

①若 $A \subseteq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件(如图1).

②若 $A \supseteq B$,则 p 是 q 的必要不充分条件(如图2).

③若 $A=B$,则 p 与 q 互为充要条件(如图3).

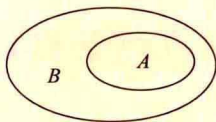


图1

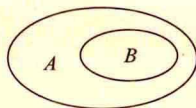


图2

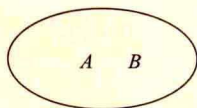


图3

例2 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件.现有下列命题: ① s 是 q 的充要条件; ② p 是 q 的充分条件而不是必要条件; ③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件; ④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件; ⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件. 则正确命题的序号是()

A. ①④⑤

B. ①②④

C. ②③⑤

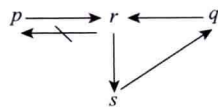
D. ②④⑤

解答 已知条件如右图所示,所以①②④正确,③不正确.

③中 r 是 q 的充要条件.④中, $\because$ 易知 $p \Rightarrow s, \therefore \neg p \Leftarrow \neg s$.

⑤不正确, r 也是 s 的充要条件.

故选B.



点评 本题已知条件较多,通过图示法,显然四个命题间的逻辑关系一目了然,对命题④的判断用到了互为逆否命题的等价性,这是常用的方法.

例3 设 $f(x)=x^2-4x(x \in \mathbf{R})$,则 $f(x)>0$ 的充分不必要条件是()

A. $x \neq 0$

B. $x < 0$ 或 $x > 4$

C. $|x-1| > 1$

D. $|x-2| > 3$

解答 $f(x)>0$ 的充要条件是 $x < 0$ 或 $x > 4$.显然选项A、B都不符合条件.

对于选项C, $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x > 2$ 或 $x < 0$,不符合条件.

对于选项D, $|x-2| > 3 \Leftrightarrow x > 5$ 或 $x < -1$,符合条件.

故选D.

点评 ①判断充分条件、必要条件和充要条件时,首先要明确条件命题和结论命题,然后再去研究它们之间的逻辑关系,这是通法.

②把结论命题 $f(x)>0$ 等价转化则是本题的关键,而运用充要条件等价转化命题也是通法.

! -4>>> 简单的逻辑联结词

① 逻辑联结词“且”“或”“非”

- 用“且”把命题 p 和命题 q 联结起来,就得到一个新命题: p 且 q ,记作 $p \wedge q$.
- 用“或”把命题 p 和命题 q 联结起来,就得到一个新命题: p 或 q ,记作 $p \vee q$.
- 对一个命题 p 全盘否定,就得到一个新命题:非 p ,记作 $\neg p$.

② 真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

POINT

用“且”“或”“非”来定义集合 A 和集合 B 的交、并、补,运算如下:

① $A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$; ② $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$;

③ $\complement_U A = \{x \in U | (x \notin A)\} = \{x \in U | x \notin A\}$.

例4 设命题 p :若 $a > b$,则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; q : $\frac{1}{ab} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$. 给出下列四个复合命题:

① p 或 q ; ② p 且 q ; ③ $\neg p$; ④ $\neg q$,其中真命题的个数为_____.

解答 $\because \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{ab} < 0$, $\therefore$ 若 $a > b$,不能得到 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. $\therefore$ 命题 p 假;

命题 q : $\frac{1}{ab} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$,显然真.

根据真值表可知, p 且 q 假, $\neg q$ 假, p 或 q 真, $\neg p$ 真. $\therefore$ ①③正确.

故真命题的个数为2.

点评 首先要判断出简单命题的真假,然后根据真值表判断复合命题的真假.

! -5>>> 全称量词与存在量词

① 短语“对所有的”“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,用“ $\forall$ ”表示.含有全称量词的命题叫做全称命题.

全称命题 p : $\forall x \in M, p(x)$; 它的否定 $\neg p$: $\exists x \in M, \neg p(x)$.

② 短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词,用“ $\exists$ ”表示.含有存在量词的命题叫做特称命题(存在性命题).

特征命题(存在性命题) p : $\exists x \in M, p(x)$; 它的否定 $\neg p$: $\forall x \in M, \neg p(x)$.