台港及海外中文报刊资料专辑

基础科学

KX

第4辑

1986

书目文献出版社

基 础 科 学（4）

——台港及海外中文报刊资料专辑（1986）

北京图书馆文献信息服务中心剪辑

书目文献出版社出版

（北京市文津街七号）

北京新丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

787×1092毫米　1/16开本　5　印张　128　千字

1987年3月北京第1版　1987年3月北京第1次印刷

印数1—3,000 册

统一书号：13201·2　定价：1.30元

〔内部发行〕

目　次

多項式問題研究進展

楊重駿

一年前在數播決定刊登拙文“一些有關多項式的問題”〔1〕時，承審核先生表示希望今後能再報導些此類問題的研究進展。現似乎是有了些相類似的問題及再作報導的時候了。但撰寫本文另一個更重要的心意是希望再次引起國內數學愛好者對這類人人都可插手來做的問題的興趣及共鳴，作進一步的研究。

首先要報出的是在文〔1〕中介紹了下面一研究問題：

臆測1. 設 p，q 爲兩同次的非常數多項式，若 $p(p-1)=0 <=> q(q-1)=0$（不計重複度，即使 $p(p-1)=0$ 的集與使 $q(q-1)=0$ 的集相同）則或

$$p \equiv q \quad 或 \quad p+q \equiv 1$$

（不計重複度：例如 $x^2(x-1)(x+2)^3=0$ 與 $x(x-1)^2(x+2)^5=0$ 有相同的根）。

迄今爲止，仍無人提供一個證明或反證。相信這個問題的困難度不可能與費馬最後定理（$x^n+y^n=z^n$，$n \geq 3$ 無正整數解）或最近被證明的有近 70 年歷史的Bieberbach臆測可相提並論的。相信數播的讀者中一定會有人接受這個問題的挑戰，而下決心把它解決。這也將是撰寫文〔1〕及本文的最大報償。

本文所要討論的是筆者在 1977 年刊登在羅馬尼亞的一篇文章〔2〕中的一個結果。

命題1：設 $p(x)$ 及 $q(x)$ 爲兩個複變數 x 的多項式。若

$$p=0 <=> q=0 \quad（不計重複度）$$

及

$$p'=0 <=> q'=0 \quad（不計重複度）$$

則必存在有兩個正整數 m，n 使得

$$p^m(x) \equiv q^n(x)；x 表複變數。$$

但這個結果在 1981 年承一位以色列的數學家 M. Roitman 在他的一份研究報告〔3〕中指出文〔2〕中對上命題的證明不完全正確，事實上是不一定成立的。他並對此問題作了一個仔細的研究。本文主要就是把文〔3〕中的結果作一報導，以饗讀者。

爲了解說方便起見，我們先介紹一些記號及已知的事實。我們以 C 表所有複數的集合，$C[x]$ 表所有具複數係數的複變數 x 的多項式的集合。我們稱一個首項係數爲1的多項式爲“首一多項式”（monic polynomiol），這也是我們將所要討論的多項式。

事實1：設 p 及 q 爲兩首一多項式，則存在有兩整數 m，n 使得 $p^m=q^n$ 的充要條件（<=>）是 p，q 同爲 $C[x]$ 中某首一多項式的冪次

（即 $p=s^{\alpha}$，$q=s^{\beta}$，s 爲首一多項式，α，β 爲正整數），這時 p 與 q 必有相同的根（不計重複度）。

記號：$p\sim q$ 是表示 $p^m=q^n$ 成立，m，n 爲兩正整數。

現以下我們都假設 p，q 爲 $C[x]$ 中非常數的首一多項式並且具有相同的根：x_1，x_2，$\cdots$，x_k，其中只要 $i\neq j$，就 $x_i\neq x_k$。我們可設

$$p(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i},$$

m_i，$i=1,2,\cdots k$ 皆爲正整數 (1)

$$q(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i},$$

n_i，$i=1,2,\cdots k$ 皆爲正整數 (2)

則不難見

p 的次數 $=\deg\ p=\sum_{i=1}^{k} m_i$

q 的次數 $=\deg\ q=\sum_{i=1}^{k} n_i$

事實2：$p(x)$ 的導函數 $p'(x)$ 可表爲

$$p'(x)=\deg p\left(\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i-1}\right)u(x) \quad (3)$$

其中 $u(x)$ 爲首一多項式次數爲 $k-1$ 且與 $p(x)$ 互質（無共同因子或根）。這個事實是由於 $p(x)$ 的一個具重複度爲 m_i 的根 x_i，在 $p'(x)$ 中見有重複度 m_i-1。因此 $p'(x)$ 必具有因有 $\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i-1}$ 其它因子無一可與 $p(x)$ 的相同。現

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=\deg p-k$$

而 $p'(x)$ 的次數爲 $\deg\ p-1$。由式(1)有

$$\deg p-1=(\deg p-k)+\deg u$$

因而 $\deg u=k-1$

同樣我們有

事實3：$q(x)$ 的導函數 $q'(x)$ 可表爲

$$q'(x)=\deg q\left(\prod (x-x_i)^{n_i-1}\right)v(x) \quad (4)$$

其中 $v(x)$ 爲首一多項式，次數爲 $k-1$ 且與 $q(x)$ 互質。

綜合事實2與3得到下面一個常會被用到結果。

事實4：若多項式 p，q 有相同的 k 個根（不計重複度），則相應的 $u(x)$ 與 $v(x)$ 爲等次的且次數爲 $k-1$。

現令

$$F(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)$$

則由此及式(1)及(3)得

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\deg p\cdot\frac{u(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{x-x_i} \quad (3)$$

於是對任何 j，上式兩邊乘以 $(x-x_j)$：$1\leq j\leq k$，下式成立

$$\deg p\frac{u(x)}{\prod_{i\neq j}(x-x_i)}=m_j+\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ i\neq j}} m_i\frac{x-x_j}{x-x_i}$$

上式中以 $x=x_j$ 代入得

$$m_j=\deg p\frac{u(x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}=\deg p\frac{u(x_j)}{F'(x_j)}$$

同法施之于 v 及 q，因而我們立即有

事實5：$\dfrac{v(x_j)}{u(x_j)}=\dfrac{\deg p}{\deg q}\cdot\dfrac{n_j}{m_j}$ 爲一正有理數。

記號：我們以 $p\to q$ 表示 p' 所有非 p 的根皆爲 q' 的根，這也就是說所有 u 的根皆爲 v 的根。

我們以 $p\leftrightarrow q$ 表示 u 與 v 有相同的根。

定理1（參看〔3〕）：下列幾個條件爲等價的（即互爲充要條件）

(i) $p\sim q$

(ii) 式(1)及式(2)中所涉及的序列 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$，$\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ 滿足下比例關係：

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\cdots\cdots=\frac{m_k}{n_k}$$

(iii) 有一常數 α（其事實上必得爲 $\dfrac{\deg p}{\deg q}$）存在，使得

$$\frac{p'}{p}=\alpha\frac{q'}{q}$$

(iv) $u=v$

證明：

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 是很明顯的。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

（是因爲 $\dfrac{p'}{p}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{x-x_i}$ 及 $\dfrac{q'}{q}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i}$）

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) 是因 $\dfrac{p'}{p}=\deg p\dfrac{u}{F}$

及 $\dfrac{q'}{q}=\deg q\dfrac{v}{F}$

由定理1立即可得下面系理

系理1：若所有 p 的根皆爲實根且 $p\to q$，則 $p\sim q$。

證：由Rolle氏定理：一連續具導函數的實函數 f，在 f 的兩個實根間必有其導函數 f' 的一個根。（參看圖1）

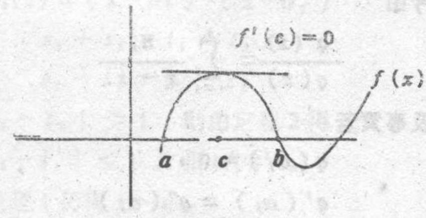


圖1

因此在 p 的 k 個實根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ 中存在 p' 的 $k-1$ 個實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$，其滿足

$x_1<\alpha_1<x_2<\alpha_2<\cdots<\alpha_{k-1}<x_k$。

現由事實4知 u，v 爲 $k-1$ 次，故 $\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$ 爲 u 所有的根，加上 $p\to q$ 故 $u\equiv v$，因而由定理1得 $p\sim q$。

由上面系理的證明可見只要 $p\to q$ 及所有 u 的根皆爲單重根時 $p\sim q$，此一結果並不是什麼創新之見，本文要介紹的是此結果的加強結論，爲此先介紹下面一輔理。

輔理1：設 R 及 v_1 爲兩同次的首一多項式，且 $v_1\mid R$（即 v_1 爲 R 的因子），則

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}=\sum_{i=1}^{k} n_i=\deg q$$

證：設 $v_1(x)=\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)^{r_j}$，$\alpha_j\in C$，

且若 $i\neq j$，$\alpha_j\neq\alpha_i$，

則有複數 β_{jt}（$1\le j\le s$，$1\le t\le s_j$），使得

$$\frac{R(x)}{v_1(x)}=1+\sum\frac{\beta_{jt}}{(x-\alpha_j)^t}$$

於是

$$\sum n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{k} n_i+\sum_{1\le j\le s,\,1\le t\le r_j}\beta_{jt}/\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{(x_i-\alpha_j)^t}\right] \tag{5}$$

今由

$$\frac{q'(x)}{q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i} \qquad (6)$$

及事實若

$$q(\alpha_j)\neq 0,$$
$$q'(\alpha_j)=q''(\alpha_j)$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=q^{(r)}(\alpha_j)$$
$$=0$$

則 $$\frac{d^{t-1}}{dx^{t-1}}\left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=\alpha}=0$$

從而由式(6)對任何 j 及 t：$1\leq j\leq s$，$1\leq t\leq r_j$，可有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{(x_i-\alpha_j)^t}=0 \qquad (7)$$

(7)代入(5)得

$$\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{R(x_i)}{v_1(x_i)}=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

輔理1得證。

定理2：u，v 如上面所定，如 $u\mid v^2$，則 $p\sim q$，特別當所有 u 的根的重複度 ≤ 2 及 $p\rightarrow q$，則 $p\sim q$。

證：由假設 $u\mid v^2$，設 $u=u_0T$ 及 $v=v_0T$，其中 u_0，v_0 及 T 皆爲首1多項式，$T=(u,v)$（即 u，v 的最大公因式）不難得 $u_0\mid v_0^2T$，$u_0\mid T$，$u_0\mid v$ 及 $\frac{v}{u}=\frac{v_0}{u_0}$，令

$$q_i=\frac{v(x_i)}{u(x_i)}\quad,$$
$$i=1,2,\cdots,k$$

由輔理1得

$$\sum_{i=1}^{k}n_iq_i=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}n_i \qquad (8)$$

而另一方面

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{q_i}=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{u(x_i)}{v(x_i)}=\sum_{i=1}^{k}n_i \qquad (9)$$

由式(8)及(9)得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{q_i}=\sum_{i=1}^{k}n_iq_i=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

但 q_i 皆爲正有理數，故上式唯有在所有的

$$q_i=1\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

才能成立。

而 $$q_i=\frac{\deg p\ n_i}{\deg q\ m_i}\quad i=1,2,\cdots,k$$

因而

$$\{m_1,m_2,\cdots,m_k\}\text{ 與 }\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$$

成比例，故由定理1，$p\sim q$。定理得證。

註：我們不難證明，若 $q\rightarrow p$，則總可找到一正整數 g 使得 $v\mid u^g$，我們上面證明的是，若 $g\leq 2$，則 $p\sim q$。但在 $g\geq 3$ 時，可證明 $p\sim q$ 不一定成立。

定理2的一個推廣如下：

定理3：設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 爲互異的數

$$u(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{s_i}$$
$$v(x)=\sum_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{t_i}$$
$$(s_i\geq 0,\ t_i\geq 0)$$

假使整數 s_i-t_i（$1\leq i\leq r$）有一共同的公因子 $d\geq 2$ 則 $p\sim q$。

證：由假設我們有

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\left[\frac{u_0(x)}{v_0(x)}\right]^d$$

其中 u_0，v_0 爲同次的首一多項式。由輔理1，置 $q_i=\frac{v_0(x_i)}{u_0(x_i)}$ 我們得

$$\sum_{i=1}^{k}n_i(q_i^d+1)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}n_i(q_i^{d-1}+q_i) \qquad (10)$$

我們需要下面事實：

輔理2：對任何複數c及正整數d，若c^d為正實數，則

$$c^d+1 \geqslant |c|^{d-1}+|c| \qquad (11)$$

$$\geqslant Re\,(c^{d-1}+c) \qquad (12)$$

$Re\,w$ 表複數w的實數部份。

註：不等式(12)等號成立的充要條件是$c=1$

證：對任何正實數a，$(a^d-1)(a-1) \geqslant 0$。故不等式(11)成立。不等式(12)及註的成立不難證明。

現回到等式(10)。由輔理2，由兩邊取實數部份可推得式(10)成立的必要條件為對所有的i，

$$\begin{aligned} Re\,n_i\,(q_i^d+1) &= n_i\,(q_i^d+1) \\ &= Re\,n_i\,(q_i^{d-1}+q_i) \\ &= n_i\,(q_i^{d-1}+q_i) \end{aligned} \qquad (13)$$

成立。注意此處的q_i可為複數，但q_i^d為正實數！

于是由式(13)得

$$q_i^d+1=q_i^{d-1}+q_i$$

或

$$(q_i^{d-1}-1)(q_i-1)=0$$

因而

$$q_i=1 \quad 或 \quad q_i^{d-1}=1$$

即使$q_i^{d-1}=1$，由q_i^d為正實數仍可得$q_i=1$，故不論如何

$$q_i=1,\ i=1,2,\cdots,k$$

因而由定理1。得$p\sim q$。

定理4：設 $u=u_1 s$， $v=v_1 s$. 其中s為u，v中具有同重複度的根的乘積，（即s為具形式$(x-\alpha)^t$ 的因子乘積，α為u，v的根，且具有共同重複度t者）。若$p\leftrightarrow q$及u_1至多有兩個不同的根，則$p\sim q$。

證：若$u_1\equiv 1$（為一常數）或u_1僅有一個根，則$u=v$，故$p\sim q$。現若u_1有兩個根，α_1及α_2；

$$u_1(x)=(x-\alpha_1)^{t_1}(x-\alpha_2)^{t_2}$$

$$v_1(x)=(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2}$$

則 $$s_1+s_2=t_1+t_2$$

或 $$s_1-t_1=t_2-s_2$$

故若$|s_1-t_1|>1$，則由定理2得$p\sim q$。若$|s_1-t_1|\leq 1$，則$u\,|\,v^2$。

由定理1仍得$p\sim q$。

定理5：p，q及u，v，u_1，v_1等如定理3中所述。若$p\leftrightarrow q$成立及$\deg u_1\leq 5$，則$p\sim q$。

證：我們用反證法，即假設在$\deg u_1\leq 5$之下，但$p\sim q$不成立。設$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$為$u_1$所有的不同的根，

$$u_1(x)=\prod_{i=1}(x-\alpha_i)^{t_i}$$

$$v_1(x)=\prod_{i=1}(x-\alpha_i)^{s_i}$$

則由定理3，存在有一正整數i_0，$1\leq i_0\leq r$，使得$t_{i_0}>2s_{i_0}$，因而$t_{i_0}>3$。依據定理4，$r\geqslant 3$，所以當$\deg v_1\leq 5$時，$v_1(x)$正好有3個根，其重複度分別為3，1，1。同理$u_1(x)$也有同樣結果。故對任何u的根α

$$s\equiv t \pmod 2$$

其中s及t分別為α為u及v的根的重複度。現由定理2，我們仍得$p\sim q$。故定理得證。

由上面的定理我們看到若$p(x)$的不同的根的數目$k\leq 6$及$p\leftrightarrow q$成立，則$p\sim q$。

在上面討論了許多$p=0 \iff q=0$，及$p'=0 \iff q'=0$，在某些附加的條件下可得$p\sim q$之結論。現最後大略說明一般並不一定可得$p\sim q$的結論。

定理6：我們可建造兩個首一多項式，p，q，其皆具整數係數，且p與q有相同的根，p'與q'有相同的根，但$p\sim q$不成立。

證：我們如能找到兩個有理數為係數的多項式p，q滿足所要求的條件就可以了。特別我們若能找到一個具有理數為係數的首1多項

式 $p(x)$，其滿足

$$x^4(x-1)(x+5) \mid p'(x)$$

及使得對所有 $p(x)$ 的根 x_i，$i=1,2,\cdots k$，

$$\frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i} = q_i \qquad (14)$$

q_i 爲正有理數且至少有兩個值不相等。

因如果我們可建造如此的一多項式 $p(x)$：

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{m_i}$$

及

$$q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}$$

其中

$$n_i = d\frac{m_i q_i}{\deg p}, \ d \text{爲一正整數} \qquad (15)$$

使得 n_i ($1 \le i \le k$) 皆爲整數。

現依據輔理 1，我們有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{d}{\deg p}\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3}$$

$$= \frac{d}{\deg p}\cdot \deg p$$

$$= d$$

故 $\qquad d = \deg q$

及對所有的 i

$$\frac{v(x_i)}{u(x_i)} = q_i = \frac{(x_i-1)^2(x_i+5)}{x_i^3}$$

現因

$$v_0(x) = \frac{u(x)(x-1)^2(x+5)}{x^3}$$

爲一次數 ($k-1$) 的多項式，且滿足對任何 i，$1 \le i \le k$

$$v_0(x_i) = v(x_i) = q_i u(x_i)$$

因此

$$v_0(x) = v(x) \quad \text{及} \quad p \leftrightarrow q$$

現我們取 p^2 代 p，q^2 代 q，則不難見 p^2 及 q^2 有相同的根，$(p^2)'$ 及 $(q^2)'$ 亦有相同的根。而 p^2 及 q^2 間無 $p^2 \sim q^2$ 之關係，是由於條件(14) k 個 q_i 取的值至少有兩個爲不同的，及式(15)可得 $\{m_1,\cdots m_k\}$ 與 $\{n_1, n_2, \cdots n_k\}$ 不可能逐項成比例。證明到此告結束。

在證明上定理，條件(14)的成立是主要關鍵，却並沒給予證明，原因是由於所用的步驟涉及一些較冗長的向量及矩陣的計算。有興趣的讀者可向M. Roitman教授 (Haifa university Isreal) 索取〔3〕有關的論文。

最後筆者在此提出一個似乎比命題1較難的二個問題：

(1) 設 p，q 爲兩多項式，n 爲一個大於1但小於 $\min(\deg p, \deg q)$ 的正整數，

若 $\quad p=0 \iff q=0$

及 $\quad p^{(n)}=0 \iff q^{(n)}=0$

則 p，q 有何關係？

(2) 有無兩多項式 p，q，其至少皆有二個不同的根，而滿足

$\quad p=0 \iff q=0$

及 $\quad p^{(m)}=0 \iff p^{(n)}=0$

m，n 爲某兩個不等的正整數？

參考文獻

1. 楊重駿"一些有關多項式的問題"，數播第八卷第二期，1984 pp. 43-47.
2. Chung-Chun Yang, "A Problem on Polynomials", *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XXII (1977), pp. 595-598.
3. M. Roitman, On Roots of Polynomials and their derivatives, Dept of Math. *Haifa mirersity. Report* # 36, Sept 1981.

——本文作者任職於美國海軍研究實驗所——

（原载：数学传播〔台〕1986 年 10 卷 2. 期 127—132 页）

純多項式的k次方展開

唐翰文

定理：若

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_{nk}x^{nk}$$

則 $a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)$
$+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots\cdots$
$+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-n)$
$+\cdots\cdots$

證明：

1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$。首先我們求當"$r\leq n$"時之$a_r$值。現令

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=g^k(x)=g(x)\cdot g(x)\cdots g(x)$$

在k項$g(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)$中，取每一個$g(x)$中的$x^b$項（$b$為變數等於0或1或2……或$n$）所有$k$項$g(x)$之$x^b$之乘積，其指數和等於$r$而$a_r$可視為在此條件下符合者的總個數和。

$\because x^r=x^{b_1}\cdot x^{b_2}\cdot\cdots x^{b_k}$（在此定義$b_1$，$b_2$，……以便區分從不同$g(x)$中取出）

$\therefore r=b_1+b_2+\cdots+b_k$

$b_1,b_2,b_2\cdots b_k$ 都是0到n的整數。可以取重覆組合求得其總個數$S(k,r)$，故得知$a_r=S(k,r)$此乃在"$r\leq n$"條件下才能成立，與若$r>n$時b可能也會大於n與原來定義b在0到n的範圍不符，故此時

$a_r\neq S(k,r)$。

2.通式的證明

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=\frac{(1-x)^k}{(1-x)^k}(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$$
$$=\frac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$$
$$=(1-x^{n+1})^k\left[\frac{1-x^{m+1}+x^{m+1}}{1-x}\right]^k$$
$$=(1-x^{n+1})^k\left[(1+x+x^2+\cdots+x^m)+\frac{x^{m+1}}{1-x}\right]^k$$
$$=(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k+x^{m+1}\cdot p(x)$$

其中$p(x)$為一x的多項式，若我們考慮對所有$m\in N$使得$m\geq nk$。我們不難發現對$f(x)$之展開式中的任一項x^r（$0\leq r\leq nk$）必存在於$(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$中而不存在於$k^{m+1}\cdot p(x)$（因$m+1>nk$）

現將原式展開

$$(1-x^{n+1})^k(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^m)^k$$
$$-C(k,1)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^kx^{n+1}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^kC(k,k)(1+x+x^2+\cdots+x^m)^kx^{(n+1)k}$$

由所展開的各項觀察知 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 展開式中某項係數。

$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)$$
$$+C(k,2)S(k,r-2n-2)+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^kC(k,k)S(k,r-nk-k)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

試用範圍：

1. r 的定義範圍：（原來範圍在零到 nk）

一個有限項的多項式亦可視其爲無窮多項，只要我們將不包含此項的係數視爲零而已。因此現可將 r 定義爲負無窮大與無窮大之間的一個整數，而並不只在 0 到 nk 間的整數。由此我們也可得到，當 r 不在 0 至 nk 範圍時 a_r 必爲 0。

例：$f(x)=(1+x+x^2)^4$ 展開式最高次數項只到 x^8，因此

$$a_9=S(4,9)-C(4,1)S(4,6)$$
$$+C(4,2)S(4,3)-C(4,3)S(4,0)$$
$$=220-4\times84+6\times20-4=0$$

同理，a_{10}，a_{11} a_{12}……皆爲零。

此外我們還要求證當 $r<0$ 時，$S(k,r)$ 爲何爲零，現考慮 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)^k$，由前面知 $a_r=S(k,r)$ 因展開式中無 r 小於零之項，故當 $r<0$，$S(k,r)=0$，此乃爲了使此公式在整數的範圍內更具完備性而已。

2. k 的定義範圍（原來 k 的範圍是大於零的整數）

(a)推廣成大於零的實數：我們先觀察 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)^k$ 的形式，原式也等於 $\dfrac{1}{(1-x)^k}$ 而對 x 取導函數得

$$\frac{f'(x)}{1!}=\frac{-k\cdot(-1)}{(1-x)^{k+1}}=\frac{k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\frac{f''(x)}{2!}=\frac{k(-k-1)\cdot(-1)}{(1-x)^{k+2}2!}=\frac{k(k+1)}{(1-x)^{k+2}2!}$$

$$\frac{f^{(r)}(x)}{r!}=\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)}{(1-x)^{k+r}\,r!}$$

由泰勒展開式得

$$a_r=\frac{f^{(r)}(0)}{r!}=\frac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$$

$$=S(k,r)=\frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots k}{r!}$$

$$=C(k+r-1,r)$$

因此我們可知，k 若是大於零的實數也成立。同理，我們求 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 的某項係數時，可將 $f(x)$ 變成 $\dfrac{(1-x^{n+1})^k}{(1-x)^k}$ 將其展開，得

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^k}(1-C(k,1)x^{n+1}$$
$$+C(k,2)x^{2n+2}\cdots+(-1)^kC(k,k)x^{kn+k})$$
$$=(1+x+x^n+\cdots)(1-C(k,1)x^{n+1}$$
$$+C(k,2)x^{2n+2}+\cdots\cdots)$$

因我們已知當 k 是大於零的實數，同樣適合於二項式 $(1-x^{n+1})^k$ 的展開，因此 $f(x)$ 展開式中，a_r 即等於

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)$$
$$+C(k,2)S(k,r-2n-2)$$

此時我們已將 k 的範圍擴展到實數（大於零）。

(b) k 也可爲小於零的實數：當 $k<0$ 時對於(a)部分的泰勒展開同樣適合，只是有一點我們需注意的無論 $k>0$ 或 $k\leq0$，$f(x)$ 若以 $x=0$ 的泰勒展開絕無 $r<0$ 的項，因 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的一個支點，故由前面得，當 $r<0$ 時 $S(k,r)=0$（k 是實數）。

舉例：

1. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{3/2}$ 的泰勒展開式。

解：

$a_0=1$， $a_1=S(\frac{3}{2},1)=1.5$ ，

$a_2=S(\frac{3}{2},2)=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2}=\frac{15}{8}=1.1875$ ，

$a_3=S(\frac{3}{2},3)=\frac{35}{16}=2.1875$ ，

$a_4=S(\frac{3}{2},4)-C(\frac{3}{2},1)S(\frac{2}{3},0)$

$=0.961$ ，

$a_5=S(\frac{3}{2},5)-C(\frac{3}{2},1)S(\frac{3}{2},1)$

$=0.457$ ，

$\therefore (1+x+x^2+x^3)^{3/2}$

$=1+1.5x+1.875x^2+2.1875x^3+0.961x^4$

$+0.457x^5$

理論的推廣：

1. $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ ，使 $n=0$ ，則 $f(x)-1^k=1$ 。因此常數項 $a_0=1$，其餘 a_r 之值皆爲零。

$\because a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)$

$+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots$

$n=0$ 則 $a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-1)$

$+C(k,2)S(k,r-2)\cdots\cdots=0$，當然 r 是非零的整數，而 k 適合於所有的實數⋯⋯⋯(2)

舉例：

(a)令 $k=3$，$r=3$，則

$S(3,3)-C(3,1)S(3,2)+C(3,2)S(3,1)$

$-C(3,3)S(3,0)=10-3\times6+3\times3-1=0$

(b)令 $k=\sqrt{2}$ ，$r=3$ 則

$S(\sqrt{2},3)-C(\sqrt{2},1)S(\sqrt{2},2)$

$+C(\sqrt{2},2)S(\sqrt{2},1)$

$-C(\sqrt{2},3)S(\sqrt{2},0)$

$=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}{6}$

$-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)}{2}$

$+\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{2}\cdot\sqrt{2}$

$-\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{6}\cdot 1$

$=0$

2. 使 $n=1$，則

$f(x)=(1+x)^k$

$=C(k,0)+C(k,1)x+\cdots+C(k,r)x^r$

$+\cdots+C(k,k)x^k$

而當 $n=1$，$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-2)$

$+C(k,2)S(k,r-4)$⋯⋯此值即等於

$C(k,r)$，(k 爲實數)⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3)

3. 若 k 爲正整數，則 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^k$ 可展開成

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{nk}x^{nk}$

兩式同除 x^{nk} 得

$(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots\cdots+1)^k$

$=\frac{a_0}{x^{nk}}+\frac{a_1}{x^{nk-1}}+\cdots\cdots+a_{nk}$

$\Rightarrow(1+(\frac{1}{x})+(\frac{1}{x})^2+\cdots\cdots+(\frac{1}{x})^n)^k$

$=a_{nk}+\frac{a_{nk-1}}{x}+\cdots\cdots+\frac{a_0}{x^{nk}}$

$\Rightarrow a_0=a_{nk}$ ， $a_1=a_{nk-1}\cdots\cdots a_r=a_{nk-r}$

$\Rightarrow S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+\cdots\cdots$

$=S(k,nk-r)-C(k,1)S(k,nk-r-n-1)$

$+\cdots\cdots$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4)

此番道理就如同 $C(k,r)=C(k,k-r)$ 一樣。

4. k 是正整數時，

$f(1)=(n+1)^k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{nk}$

$=\sum_{r=0}^{nk}[S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)$

$+C(k,2)S(k,r-2n-2)-\cdots]$

$$= \sum_{r=0}^{nk} S(k,r) - C(k,1)\sum_{r=0}^{nk} S(k,r-n-1)$$

$$+C(k,2)\sum_{r=0}^{nk} S(k,r-2n-2) - \cdots\cdots]$$

$$= S(k+1, nk) - C(k,1)S(k, nk-n-1)$$
$$+C(k,2)S(k, nk-2n-2) - \cdots\cdots$$
$$= C(k(n+1), nk)$$
$$-C((k-1)C((k-1)(n+1), nk-n-1)$$
$$+C(k,2)C((k-2)(n+1), nk-2n-2)\cdots$$
$$= C(k(n+1), k) - C(k,1)C(k-1)(n+1)k)$$
$$+C(k,2)C((k-2)(n+1), k) - \cdots\cdots$$
$$\Rightarrow n^k = C(nk, k) - C(k,1)C(nk-n, k)$$
$$+C(k,2)C(nk-2n, k) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

已知 k 是個正整數，$f(x)$ 之展開是屬於有限項的展開，因此大於 nk 之項的係數必爲零，即 $a_{nk+1}=0$，$a_{nk+2}=0$，……

由上我們也可將上述定理(5)推廣成

$$n^k = C(nk+m, k) - C(k,1)C(nk-n+m, k)$$
$$+C(k,2)C(nk-2n+m, k) - \cdots\cdots\cdots$$

（其中 m 爲大於或等於零之整數）………(6)

如 $81=3^4=C(12,4)-C(4,1)C(9,4)$
$$+C(4,2)C(6,4)$$
$$=C(13,4)-C(4,1)C(10,4)$$
$$+C(4,2)C(7,4)-C(4,3)C(4,4)$$
$$=C(14,4)-C(4,1)C(11,4)$$
$$+C(4,2)C(8,4)-C(4,3)C(5,4)$$

5.現考慮 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^{-k}$

$$= \frac{1}{(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k}$$

$$= \frac{(1-x)^k}{(1-x^{n+1})^k}$$

$$= (1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\cdots)^k(1-x)^k$$

$$= (1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\cdots)^k(1-C(k,1)x$$
$$+C(k,2)x^2 - \cdots\cdots),$$

展開各項觀察知，x^r 係數，a_r

$$a_r = S(k, \frac{r}{n+1}) - C(k,1)S(k, \frac{r-1}{n+1})$$

$$+C(k,2)S(k, \frac{r-2}{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} S(k, \frac{r-i}{n+1}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

此種表示法純粹是爲了方便起見，當然，當 $\frac{r-i}{n+1}$ 不是整數時，$S(k, \frac{r-i}{n+1})=0$，而且前面我們也知道當 $\frac{r-i}{n+1}<0$ 時，無論 k 爲何值 $S(k, \frac{r-i}{n+1})=0$。

到目前爲止，我們還沒有討論到 k 到底要是什麼數，是不是只能爲正整數？其實，上述的推導過程，完全符合 k 爲實數的定義，而且我們還可得到一恒等式，就是定理(1)和(8)所得的 a_r 值必相等。

$$\therefore a_r = S(k, \frac{r}{n+1}) - C(k,1)S(k, \frac{r-1}{n+1})$$

$$+C(k,2)S(k, \frac{r-2}{n+1}) - \cdots\cdots$$
$$= S(-k, r) - C(-k,1)S(-k, r-n-1)$$
$$+C(-k,2)S(-k, r-2n-2) - \cdots\cdots (9)$$

例：我們展開 $(1+x+x^2)^{-2}$，$k=2$，$n=2$

$a_0=S(2, 0/3)=S(-2, 0)=1$

$a_1=S(2, 1/3)-C(2,1)S(2, 0/3)$
$=S(-2, 1)=-2$

$a_2=S(2, 2/3)-C(2,1)S(2, 1/3)$
$+C(2,2)S(2,0)$
$=S(-2, 2)=1$

$a_3=S(2, 3/3)-C(2,1)S(2, 2/3)$
$+C(2,2)S(2, 1/3)=2$
$=S(-2,3)-C(-2,1)S(-2,0)$
$=0-(-2)=2$

⋮　　⋮　⋮

$\therefore (1+x+x^2)^{-2}=1-2x+x^2+2x^3+\cdots\cdots$

若估計 $(1, 11)^{-2}$ 可得

$(1.11)^{-2} \doteqdot 1-0.2+0.01+0.002=0.812$

總結：

以上我們所討論到的公式定理有

(1) $n\in N$，$k\in R$，$r\in z$，$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^k$ 展開式中，x^r 的係數

$$a_r=S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+C(k,2)S(k,r-2n-2)\cdots\cdots$$
$$=S(-k,\frac{r}{n+1})-C(-k,1)S(-k,\frac{r-1}{n+1})+C(k,2)S(-k,\frac{r-2}{n+1})\cdots\cdots$$

若 k 爲正整數，則當 $r<0$ 或 $r>nk$ 時 $a_r=0$。

(2) $k\in R$，$r\in z-\{0\}$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-1)+C(k,2)S(k,r-2)-\cdots\cdots=0$$

(3) $k\in R$，$r\in z$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-2)+C(k,2)S(k,r-4)-\cdots\cdots=C(k,r)$$

(4) $k\in N$，$r\in z$，$n\in N$，

$$S(k,r)-C(k,1)S(k,r-n-1)+\cdots\cdots=S(k,nk-r)-C(k,1)S(k,nk-r-n-1)$$

……即 $a_r=a_{nk-r}$

(5) $n\in N$，$k\in N$，$m\in N\cup\{0\}$

$$n^k=C(nk+m,k)-C(k,1)C(nk-n+m,k)+C(k,2)C(nk-2n+m,k)-\cdots\cdots$$

理論上一點應用：

重覆做一試驗 n 次（n 次獨立相同試驗），其各種不同之成功（或失敗）次數的機率爲二項機率分佈。今考慮另一問題：重覆做一試驗直至 k 次成功爲止。令 p 表試驗失敗之機率，$1-p$ 表成功之機率，而令 X 表第 k 次成功以前失敗之次數，則 $X=x$ 之機率爲

$$(1-p)^k p^x S(k,x)。$$

我們要證明此一公式不難，現已知試行的失敗次數的變數 x，且最後一次的試行必定成功，因此最後一次以前的試行次數全部有 $k+x-1$ 次，其中包括 $k-1$ 次的成功及 x 次的失敗，其排列數有 $C(k+x-1)$ 或 $C(k+x-1,k-1)$，而每一種的排列情形機率都爲 $p^x(1-p)^k$ 故試行 x 次失敗的機率爲 $C(k+x-1,x)p^x(1-p)^k$ 亦即爲 $S(k,x)p^x(1-p)^k$。

現暫以 a_x 表示 $(1-p)^k p^x S(k,x)$，我們不難發現此 a_x 即是 $f(y)=(1-p)^k(1+py+p^2y^2+\cdots+p^ny^n+\cdots)^k$ 展開式中 y 的 x 次方的係數，而且 x 由零到無窮大。我們可由此來驗證機率和等於 1。

$$\sum_{x=0}^{\infty}S(k,x)p^x(1-p)^k=(1-p)^k\sum_{x=0}^{\infty}p^xS(k,x)$$
$$=(1-p)^k(1+p+p^2+\cdots+p^n+\cdots)^k$$
$$=(1-p)^k\cdot(\frac{1}{1-p})^k=1$$

例 1：投擲一公正的銅板，投到出現 5 次反面爲此，求在此情形下投出 0，1，2，3……各次正面的機率。

解：$p=\frac{1}{2}$，$k=5$

$$a_0=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^0S(5,0)=0.03125,$$
$$a_1=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^1S(5,1)=0.078125,$$
$$a_2=(1-\frac{1}{2})^5(0.5)^2S(5,2)=0.1172。$$

X 的期望値

$$E(x)=\sum_{i=0}^{\infty}i(1-p)^kp^iS(k,i)$$
$$=(1-p)^k\sum_{i=0}^{\infty}p^i\frac{(k+i-1)!}{(i-1)!(k-1)!}$$
$$=(1-p)^k kp\sum_{i=0}^{\infty}p^{i-1}S(k+1,i-1)$$
$$=kp(1-p)^k(1+p+p^2+\cdots)^{k+1}=\frac{kp}{1-p}。$$

變異數

$$\mathrm{Var}(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} i^2(1-p)^k p^i S(k,i)-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(1-p)^k p^i S(k,i)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} i(1-p)^k p^i S(k,i)-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\frac{k(k+1)p^2}{(1-p)^2}+\frac{kp}{(1-p)}-\frac{k^2p^2}{(1-p)^2}$$

$$=\frac{kp}{(1-p)^2},$$

$$\therefore \sigma^2=\frac{kp}{(1-p)^2} \Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{kp}}{(1-p)}$$

卜式分配 (Poisoin distribution)

現考慮 $\lambda=kp$ 爲一定値，則 $p=\frac{\lambda}{k}$ 因此

$$a_x=(1-\frac{\lambda}{k})^k(\frac{\lambda}{k})^x\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

當 $k\to\infty$ 則有

$$a_x=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{\lambda}{k})^k(\frac{\lambda}{k})^x\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}$$

$$\Rightarrow a_x=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{k\to\infty}(1-\frac{\lambda}{k})^{(-k/\lambda)(-\lambda)}$$

$$\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{(k+x-1)!}{k^x(k-1)!}$$

$\Rightarrow a_x=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 此即爲卜式分配。

例2：某生丢一粒骰子，直到丢出兩次1點才肯罷休，問全部丢出 12 次的機率多大？平均丢多少次？標準誤差？

解：(1) $k=2$，$p=\frac{5}{6}$，

$$a_{12}=(1-\frac{5}{6})^2(\frac{5}{6})^{10}S(2,10)$$

$=0.049$，機率 0.049。

(2) $\mu=\frac{kp}{1-p}=\frac{2\cdot\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=10$

$n=10+2=12$，平均投 12 次。

(3) $\sigma^2=\mathrm{Var}(x+2)=\mathrm{Var}(x)$

$$\Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{kp}}{1-p}=\frac{\sqrt{\frac{10}{6}}}{1-\frac{5}{6}}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}。$$

例3：若要從一工廠中拿出1000 個合乎樣品規格的產品，不合乎規格的即予淘汰，直至拿到1000 個合乎規格的產品爲止，假設原不合格產品佔總成品之0.5％且視爲不變，問拿到不合格產品低於5個的機率。

解：$\lambda=1000\cdot 0.5\%=5$

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}=e^{-5}(1+5^1+\frac{5^2}{2}+\frac{5^3}{6}+\frac{5^4}{24})$$

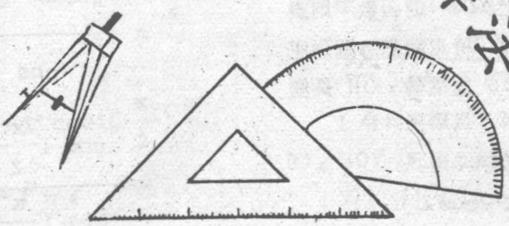
$=0.44$

故機率爲 0.44

～本文作者就讀於交大管研所～

（原载：数学传播〔台〕1986 年 10 卷 2 期133—138页）

三等分任意角的近似作法



緒言：

二等分任意角在初級數學，即已爲人熟悉，而三等分任意角爲古希臘三大難題之一，用圓規、直尺確實無法做到，19世約 Galois 和 Causs 等人所建立的方程式論，更證實此一事實。這裡介紹一個簡單的證法：

因爲只要找到一個角不可三等分即可：設一已知角θ，且$\cos\theta = g$，則變成求$X = \cos(\theta/3)$的值，

由三角公式：$\cos\theta = g$

$$= 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$\Rightarrow 4x^3 - 3x = g$

取$\theta = 60°$　則　$g = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 8x^3 - 6x = 1$

我們只需證此式無有理根即可

$\therefore$令$V = 2x$

$\Rightarrow V^3 - 3V = 1$

則若有有理根$\frac{r}{s}$（r，s互質）

$\Rightarrow (r/s)^3 - 3(r/s) = 1$

$\Rightarrow r^3 - 3s^2 r = s^3$

$\Rightarrow r(r^2 - 3s^2) = s^3$

若$r^2 - 3s^2 = 0$ 則$r = 0$，$s = 0$不合

$\therefore r$爲s的因數

$\therefore$方程式無有理根　　　　（得證）

（有關超越數和代數數的理論可參閱F. Klein，Famous Problems of elementary geometry）

前陣偶翻到「數學傳播」26期，一位蓋廟多年的老師傅，以他數十年來的經驗，提出此一構想，並送至本校數學系研究，登出黃武雄教授簡化的方法。經過驗算因發現簡化的作法乃適合銳角部分，所以將原法亦分述於後，並利用MBASIC（Cp/M－80）計算誤差，均不超過0.3％，十分準確。

一、作圖法：

㈠原法：已知：$\angle XOY$ 爲任意角

求作：三等分$\angle XOY$ 的兩射線

作法：1.以O爲圓心，任意長爲半徑，交$\overrightarrow{OX}$，$\overrightarrow{OY}$ 及其反射線於H. J. K. L.

2.作$\overrightarrow{OZ}$ 平分$\angle XOY$，交HJ 於Q，連接OK。

3.作$\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OX}$，交OK 於P。

4.以K爲圓心，HK 爲半徑，作一弧交$\overrightarrow{OZ}$ 於R。

5.在$\overrightarrow{OZ}$ 上取I，使$\overline{RI} = \overline{QP}$。

6.連接$\overline{IK}$，$\overline{IL}$交$\widehat{HJ}$於M、N。

7.$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$ 即爲所求

（見圖１）

誤差計算：

若∠YOM 可表爲∠YOX 的函數，則誤差可由g(x)－x/3來計算，所以我們將圖形座標化。令$\overline{OX}$爲縱軸，$\overline{OS}$爲橫軸，$\overline{OH}$長度爲1，

則(1)H點座標H（0，1）

J點座標J（sinX，cosX）

K點座標K（0，－1）

L點座標L（－sinX，－cosX）

Q點座標Q（$\sin\frac{x}{2}$，$\cos\frac{x}{2}$）

(2)線段QP ＝QK－PK

$$=2\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\sec\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

(3)求$\overline{IO}$線段長：$\overline{IO}=\overline{RO}+\overline{QP}$

①以參數式表$\overrightarrow{OZ}$，t爲參數

$$X=t\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$Y=t\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

圖一