高等学校教材

高等数学

（下册）

天津大学数学系　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

(下册)

天津大学数学系　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是在天津大学数学系多年教学实践基础上，参考"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，为高等院校理工科及经济管理类各专业学生编写的教学用书。

全书分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。

本书内容丰富、思路清晰、结构紧凑、体系完整，具有推理严密、概念准确、叙述详略得当的特点，并对传统教材中长期存在的问题进行了有益的探索与改进。书中的大量例题都是经过精心编选的，每节都配了难度适中且数量适当的习题，每章还配备了类型齐全的综合性习题。

本书也可作为相关读者的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/天津大学数学系编著．—北京：高等教育出版社，2010.12

ISBN 978-7-04-031343-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①天… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第215580号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 赵 阳
责任绘图 尹文军 **版式设计** 范晓红 **责任校对** 姜国萍
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	潮河印业有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2010年12月第1版
印　　张	22.25	**印　　次**	2010年12月第1次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	30.30元

物料号 31343-00

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

平面解析几何通过坐标系将平面上的点与二元有序实数组之间建立了一一对应关系, 从而使联系着两个变量的函数 $y=f(x)$ 有了直观的几何意义, 使我们可以用代数和微积分的方法来研究平面中的某些几何问题. 本章将要介绍的空间解析几何是利用坐标系建立空间中的点与三元有序实数组的对应关系, 从而使我们能够通过代数方程来描述曲面与空间曲线, 可以用代数和微积分的方法来研究曲面与空间曲线.

本章首先建立空间直角坐标系, 然后介绍应用极为广泛的向量概念、向量的运算及其坐标表示, 并以向量为工具讨论空间的平面与直线, 最后介绍一些重要的曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

在空间中取定一点 O, 以 O 为公共原点作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴, 依次记为 x 轴、y 轴和 z 轴. 这就建立了一个**空间直角坐标系**, 记为 $Oxyz$. 点 O 称为**坐标原点**. x 轴、y 轴和 z 轴分别称为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**, 并把它们统称为**坐标轴**. 通常规定三个坐标轴的正向顺序符合右手规则, 即若右手手掌贴近 z 轴, 大拇指指向 z 轴正向, 则当右手的其余四个手指从 x 轴正向出发握拳时只需旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的角度便与 y 轴正向同向 (见图 7–1). 符合右手规则的空间直角坐标系称为**右手系**. 在本书中, 如无特别说明, 所使用的空间直角坐标系都是右手系.

空间直角坐标系的三条坐标轴中任意两条确定一张平面, 称其为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的平面称为**坐标面 xOy**, 由 y 轴和 z 轴确定的平面称为**坐标面 yOz**, 由 z 轴和 x 轴确定的平面称为**坐标面 zOx**. 三张坐标面把空间分割成八个部分, 每一个部分称为一个**卦限**. 图 7–2 中分别用 I, II, $\cdots$, VIII 表示第一卦限, 第二卦限, $\cdots$, 第八卦限.

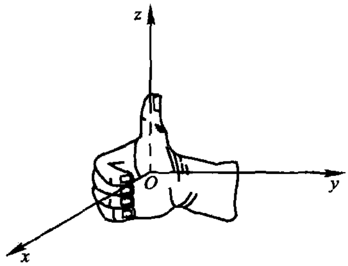

图 7-1

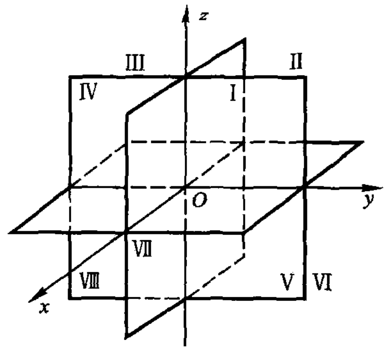

图 7-2

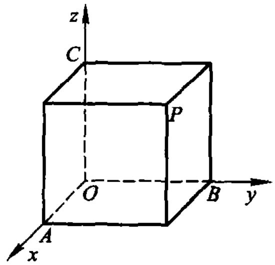

图 7-3

设 P 是空间中一点. 过 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面, 它们与坐标轴交点依次为 A, B, C(见图 7-3). 设这三个交点在各自坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z. 于是得到一个三元有序数组 (x,y,z). 这个有序数组由 P 点唯一确定. 反之, 对于任何一个三元有序数组 (x,y,z), 在三个坐标轴上分别找出坐标为 x, y 和 z 的三个点. 过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面, 三张平面交于一点 P. 这个点 P 由数组 (x,y,z) 唯一确定. 按照这种方法可以建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系. 因此可以用三元有序数组表示点. 与点 P 对应的数组 (x,y,z) 称为点 P 的**坐标**, 记为 $P(x,y,z)$, 数 x, y 和 z 分别称为点 P 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**.

显然, 原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别具有形式 $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$. 坐标面 xOy 上点的坐标形如 $(x,y,0)$, 其中 (x,y) 是点在 xOy 坐标平面中的坐标. 同样, 坐标面 yOz 上点具有形如 $(0,y,z)$ 的坐标, 坐标面 zOx 上点具有形如 $(x,0,z)$ 的坐标. 各个卦限内的点的坐标符号如下表所示:

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
坐标符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$
卦限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标符号	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

给定两点 P 和 Q, 如果线段 PQ 垂直于坐标面 xOy 且被其所平分, 则称 P 和 Q **关于坐标面 xOy 对称**.

类似地可定义两点关于坐标面 yOz 对称及关于坐标面 zOx 对称.

若已知 P 点的坐标为 (x, y, z), 则 P 点关于坐标面 xOy 的对称点的坐标为 $(x, y, -z)$, P 点关于坐标面 yOz 的对称点的坐标为 $(-x, y, z)$, P 点关于坐标面 zOx 的对称点的坐标为 $(x, -y, z)$.

给定两点 P 和 Q, 如果线段 PQ 与 x 轴垂直相交且被 x 轴平分, 则称 P 和 Q **关于 x 轴对称**.

类似地可定义两点关于 y 轴对称和关于 z 轴对称.

点 $P(x, y, z)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(x, -y, -z)$, 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(-x, y, -z)$, 关于 z 轴的对称点的坐标为 $(-x, -y, z)$.

如果线段 PQ 通过原点且被其所平分, 则称 P 与 Q **关于原点对称**. $P(x, y, z)$ 关于原点的对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$.

过点 P 作直线段垂直于坐标面 xOy, 则称垂足 P' 为 P **在坐标面 xOy 上的投影点** (见图 7–4). 若已知点 $P(x, y, z)$, 则 $P'(x, y, 0)$. 类似地, 可定义 P 在坐标面 yOz 上的投影点和在坐标面 zOx 上的投影点, 并可由 P 的坐标确定其投影点的坐标.

给定两点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 和 $Q(x_2, y_2, z_2)$, 过 P 和 Q 分别作垂直于坐标轴的平面得一长方体, 如图 7–5 所示. 因为 A, B 和 C 的坐标分别为 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ 和 (x_2, y_2, z_1), 所以

$$PC = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

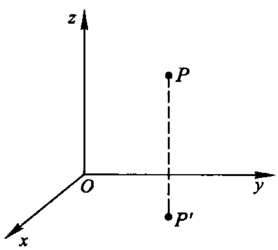

图 7–4

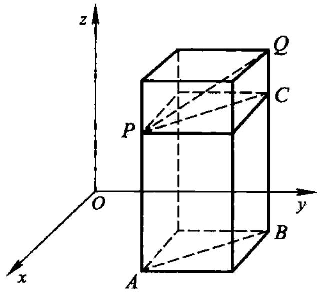

图 7–5

于是

$$PQ=\sqrt{PC^2+CQ^2}$$
$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

这是空间中两点间的距离公式. 特别地, 若 Q 为坐标原点, 则得到点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离公式

$$OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 验证以原点 $O(0,0,0)$, 点 $A(1,-2,2)$ 和点 $B(3,-1,0)$ 为顶点的三角形为等腰三角形, 但不是等边三角形.

解 由两点间距离公式得

$$OA=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$
$$OB=\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{10},$$
$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(0-2)^2}=3.$$

从而 $OA\neq OB$, $OA=AB$, 三角形 AOB 为等腰三角形, 但不是等边三角形.

例 2 已知两点 $A(-4,1,7)$ 与 $B(3,5,-2)$, 在 z 轴上求一点 P, 使 $AP=BP$.

解 因为点 P 在 z 轴上, 所以它的坐标可写成 $(0,0,z)$, 由两点间距离公式得

$$AP=\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},$$
$$BP=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

因 $AP=BP$, 故

$$\sqrt{66-14z+z^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由此解得 $z=\frac{14}{9}$. 所求的点为 $P\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 7–1

1. 在空间直角坐标系中指出下列各点所在的卦限:

$$A(3,-1,1),\quad B(-3,2,-1),\quad C(-3,-2,-1),$$

$$D(3,-2,-1),\quad E(-3,-2,1),\quad F(-3,2,1).$$

2. 指出下列各点在空间直角坐标系中所处的特殊位置:

$$A(0,1,-2),\quad B(0,0,-2),\quad C(1,-1,0),$$

$$D(3,0,-2),\quad E(3,0,0),\quad F(0,-2,0).$$

3. 指出点 $P(3,-1,2)$ 关于原点、各坐标轴、各坐标面的对称点的坐标.
4. 求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点、各坐标轴、各坐标面的距离.
5. 在 x 轴上求一点 P, 使它到点 $A(1,3,-4)$ 的距离为 5.
6. 在坐标面 yOz 上求与三点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距的点.
7. 证明以 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

第二节 向量及其线性运算

一 向量概念

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小又有方向, 例如位移、速度、加速度和力等, 这种既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**.

通常用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 或用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 表示向量. $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**, 记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向, 其方向也可看成是任意的.

在几何上用有向线段, 即有方向的线段表示向量 (见图 7–6). 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同, 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 据此可知, 大小相等且方向相同的向量, 不论它们的起点是否相同都视为同一个向量. 这种只由大小和方向确定而与起点无关的向量称为**自由向量**. 本书将只研究自由向量.

例如, 在图 7–7 所示的平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反而模相等的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{a}$. 在图 7–7 中, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}$.

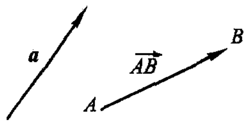

图 7–6

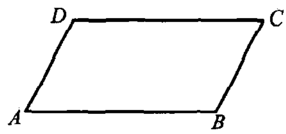

图 7–7

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 并记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 例如, 对于图 7–7 所给的平行四边形, $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$. 两个平行向量经过平行移动可使它们处于同一条直线上, 而向量经平行移动后所得的向量与原来向量相等, 所以两个向量平行也称为两个向量**共线**.

二　向量的线性运算

1. 加法

将物理学中使用的力、速度等的合成法则加以抽象, 我们给出向量加法的定义.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是二非零向量, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行. 任取一点 A, 作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 则以 AB 和 AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **之和**, 记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 7–8).

上述确定二向量之和的方法称为**平行四边形法**.

在图 7–8 中, 因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因此, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和又是将 $\boldsymbol{b}$ 的起点接到 $\boldsymbol{a}$ 的终点上, 以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 (见图 7–9). 这种求和的方法称为**三角形法**.

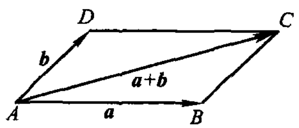

图 7–8

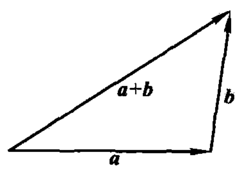

图 7–9

如果二非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时, 规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是与它们同向且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的向量; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时, 规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是与它们中模较大的同向且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$ 的向量.

对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

求两个向量之和的三角形法, 可以推广到求多个向量之和. 若有三个或三个以上的空间向量, 则通过平移将第二个向量的起点接在第一个向量的终点上, 将第三个向量的起点接在第二个向量的终点上, 如此继续, 将这些向量连接起来, 然后由第一个向量的起点向最后一个向量的终点作向量, 这个向量便是这些向量的和向量. 如图 7–10 所示, 有

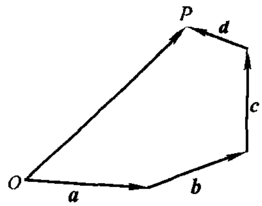

图 7–10

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

这种求多个向量之和的方法称为**折线法**.

不难看出, 向量加法满足如下的运算性质:

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 减法

给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 称 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **之差**, 记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

给定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 从点 O 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则由图 7–11 不难看出, 以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为起点, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为终点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差.

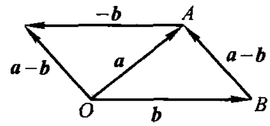

图 7–11

根据三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中前一个不等式等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时成立, 后一个不等式等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时成立.

3. 数乘向量

定义 7.1 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$, 它的模为 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍, 即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$, 它的方向是当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

数乘向量具有下列运算性质: