

高 等 学 校 教 材

# 高等数学

(下册)

■ 天津大学数学系 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 高等数学

Gaodeng Shuxue

(下册)

天津大学数学系 编著



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容简介

本书是在天津大学数学系多年教学实践基础上,参考“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,为高等院校理工科及经济管理类专业学生编写的教学用书。

全书分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。

本书内容丰富、思路清晰、结构紧凑、体系完整,具有推理严密、概念准确、叙述详略得当的特点,并对传统教材中长期存在的问题进行了有益的探索与改进。书中的大量例题都是经过精心编选的,每节都配了难度适中且数量适当的习题,每章还配备了类型齐全的综合性习题。

本书也可作为相关读者的学习参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/天津大学数学系编著. —北京:高等教育出版社,2010.12

ISBN 978 - 7 - 04 - 031343 - 7

I. ①高… II. ①天… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 215580 号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 崔梅萍 封面设计 赵阳  
责任绘图 尹文军 版式设计 范晓红 责任校对 姜国萍  
责任印制 尤静

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landraco.com">http://www.landraco.com</a> <a href="http://www.landraco.com.cn">http://www.landraco.com.cn</a>
印 刷	潮河印业有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/16	版 次	2010 年 12 月第 1 版
印 张	22.25	印 次	2010 年 12 月第 1 次印刷
字 数	410 000	定 价	30.30 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 31343-00

# 目 录

第七章 向量代数与空间解析几何 .....	1
第一节 空间直角坐标系 .....	1
习题 7-1 .....	4
第二节 向量及其线性运算 .....	5
一 向量概念 .....	5
二 向量的线性运算 .....	6
三 向量的坐标 .....	8
四 向量的方向角与方向余弦 .....	11
五 二向量间的夹角 .....	12
习题 7-2 .....	13
第三节 向量的数量积与向量积 .....	13
一 向量的数量积 .....	13
二 向量的向量积 .....	16
三 向量的混合积 .....	18
习题 7-3 .....	20
第四节 平面的方程 .....	21
一 曲面与方程的概念 .....	21
二 平面的点法式方程 .....	22
三 平面的一般式方程 .....	23
四 两平面的夹角 .....	26
五 点到平面的距离 .....	27
习题 7-4 .....	28
第五节 空间直线的方程 .....	29
一 空间直线的一般方程 .....	29

二 空间直线的参数方程与点向式方程 .....	30
三 两直线的位置关系 .....	33
四 直线与平面的位置关系 .....	34
五 平面束 .....	36
习题 7-5 .....	38
<b>第六节 常见曲面的方程 .....</b>	<b>39</b>
一 柱面 .....	39
二 旋转曲面 .....	40
三 二次曲面 .....	43
习题 7-6 .....	49
<b>第七节 空间曲线 .....</b>	<b>49</b>
一 空间曲线的方程 .....	49
二 空间曲线在坐标面上的投影 .....	50
三 一元向量值函数 .....	54
四 空间曲线的切线与法平面 .....	56
五 空间曲线的弧长 .....	58
习题 7-7 .....	59
复习题七 .....	60
<b>第八章 多元函数微分学及其应用 .....</b>	<b>62</b>
<b>第一节 多元函数的基本概念 .....</b>	<b>62</b>
一 平面点集与 $n$ 维空间 .....	62
二 多元函数概念 .....	65
三 多元函数的极限 .....	66
四 多元函数的连续性 .....	69
习题 8-1 .....	70
<b>第二节 多元函数的偏导数与全微分 .....</b>	<b>71</b>
一 偏导数的概念 .....	71
二 高阶偏导数 .....	74
三 多元函数的全微分 .....	78

习题 8 - 2 .....	83
第三节 多元函数微分法 .....	84
一 复合函数的求导法则 .....	84
二 全微分形式的不变性 .....	87
三 由一个方程确定的隐函数的微分法 .....	88
* 四 由方程组确定的隐函数的微分法 .....	92
习题 8 - 3 .....	96
第四节 方向导数与梯度 .....	97
一 方向导数 .....	97
二 梯度 .....	100
习题 8 - 4 .....	101
第五节 多元函数微分学的几何应用 .....	101
一 曲面的切平面与法线 .....	101
二 面交式曲线的切线与法平面 .....	106
习题 8 - 5 .....	108
第六节 多元函数的泰勒公式与极值 .....	109
* 一 多元函数的泰勒公式 .....	109
二 多元函数的极值 .....	111
三 条件极值 .....	116
习题 8 - 6 .....	120
复习题八 .....	121
<b>第九章 重积分 .....</b>	<b>124</b>
第一节 二重积分的概念与性质 .....	124
一 二重积分的概念 .....	124
二 二重积分的性质 .....	127
习题 9 - 1 .....	129
第二节 二重积分的计算 .....	129
一 直角坐标系中二重积分的计算方法 .....	130
二 二重积分的变量代换 .....	137

习题 9 - 2	142
第三节 三重积分	144
一 三重积分的概念	144
二 直角坐标下三重积分的计算	146
三 三重积分的变量代换	151
习题 9 - 3	159
第四节 重积分的应用	161
一 曲面的面积	161
二 物体的质心	164
三 物体的转动惯量	167
四 物体间的引力	169
习题 9 - 4	170
* 第五节 含参变量的积分	171
一 含参量的正常积分	171
二 含参量的反常积分	175
习题 9 - 5	179
复习题九	179
第十章 曲线积分与曲面积分	182
第一节 第一类曲线积分	182
一 第一类曲线积分的概念及性质	182
二 第一类曲线积分的计算	185
习题 10 - 1	188
第二节 第二类曲线积分	189
一 向量场与有向曲线的概念	189
二 第二类曲线积分的概念及性质	190
三 第二类曲线积分的计算	193
四 两类曲线积分之间的联系	197
习题 10 - 2	199
第三节 格林公式及其应用	200

一 格林公式 .....	200
二 平面曲线积分与路径无关的条件 .....	206
三 全微分方程 .....	212
习题 10 - 3 .....	212
第四节 第一类曲面积分 .....	214
一 第一类曲面积分的概念 .....	214
二 第一类曲面积分的计算 .....	216
习题 10 - 4 .....	220
第五节 第二类曲面积分 .....	221
一 曲面的侧与有向曲面 .....	221
二 第二类曲面积分的概念 .....	222
三 第二类曲面积分的计算 .....	225
四 两类曲面积分之间的联系 .....	229
习题 10 - 5 .....	231
第六节 高斯公式与散度 .....	232
一 高斯公式 .....	232
二 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 .....	236
三 向量场的散度 .....	238
习题 10 - 6 .....	241
第七节 斯托克斯公式与旋度 .....	242
一 斯托克斯公式 .....	242
二 空间曲线积分与路径无关的条件 .....	246
三 向量场的旋度 .....	248
习题 10 - 7 .....	251
复习题十 .....	252
<b>第十一章 级数</b> .....	<b>255</b>
第一节 数项级数的基本概念 .....	255
一 数项级数及其收敛性 .....	255
二 收敛级数的性质 .....	257



* 三 柯西收敛准则 .....	261
习题 11 - 1 .....	262
第二节 正项级数敛散性判别法 .....	262
一 基本定理 .....	262
二 比较判别法 .....	263
三 比值判别法 .....	266
四 根值判别法 .....	268
五 积分判别法 .....	269
习题 11 - 2 .....	270
第三节 一般项级数敛散性判别法 .....	271
一 交错级数 .....	271
二 绝对收敛与条件收敛 .....	273
三 绝对收敛级数的性质 .....	274
* 四 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法 .....	277
习题 11 - 3 .....	278
第四节 幂级数 .....	278
一 函数项级数的基本概念 .....	278
二 幂级数的收敛域 .....	279
三 幂级数的性质 .....	284
习题 11 - 4 .....	288
第五节 函数的幂级数展开 .....	288
一 泰勒级数 .....	288
二 函数展开成幂级数 .....	290
习题 11 - 5 .....	297
* 第六节 函数项级数的一致收敛性 .....	297
一 一致收敛性的概念及判别法 .....	297
二 一致收敛级数的性质 .....	303
习题 11 - 6 .....	305
第七节 傅里叶级数 .....	306
一 三角函数系的正交性 .....	306

---

二 傅里叶级数 .....	307
三 正弦级数与余弦级数 .....	312
四 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 .....	316
习题 11 - 7 .....	319
复习题十一 .....	320
附录 二阶与三阶行列式简介 .....	324
习题答案与提示 .....	326
参考文献 .....	344

# 第七章 向量代数与空间解析几何

平面解析几何通过坐标系将平面上的点与二元有序实数组之间建立了一一对应关系,从而使联系着两个变量的函数  $y = f(x)$  有了直观的几何意义,使我们可以用代数和微积分的方法来研究平面中的某些几何问题.本章将要介绍的空间解析几何是利用坐标系建立空间中的点与三元有序实数组的对应关系,从而使我们能够通过代数方程来描述曲面与空间曲线,可以用代数和微积分的方法来研究曲面与空间曲线.

本章首先建立空间直角坐标系,然后介绍应用极为广泛的向量概念、向量的运算及其坐标表示,并以向量为工具讨论空间的平面与直线,最后介绍一些重要的曲面和空间曲线.

## 第一节 空间直角坐标系

在空间中取定一点  $O$ ,以  $O$  为公共原点作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴,依次记为  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴.这就建立了一个空间直角坐标系,记为  $Oxyz$ .点  $O$  称为坐标原点. $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴分别称为横轴、纵轴和竖轴,并把它们统称为坐标轴.通常规定三个坐标轴的正向顺序符合右手规则,即若右手手掌贴近  $z$  轴,大拇指指向  $z$  轴正向,则当右手的其余四个手指从  $x$  轴正向出发握拳时只需旋转  $\frac{\pi}{2}$  的角度便与  $y$  轴正向同向(见图 7-1).符合右手规则的空间直角坐标系称为右手系.在本书中,如无特别说明,所使用的空间直角坐标系都是右手系.

空间直角坐标系的三条坐标轴中任意两条确定一张平面,称其为坐标面.由  $x$  轴和  $y$  轴确定的平面称为坐标面  $xOy$ ,由  $y$  轴和  $z$  轴确定的平面称为坐标面  $yOz$ ,由  $z$  轴和  $x$  轴确定的平面称为坐标面  $zOx$ .三张坐标面把空间分割成八个部分,每一个部分称为一个卦限.图 7-2 中分别用 I, II, ..., VIII 表示第一卦限,第二卦限, ..., 第八卦限.

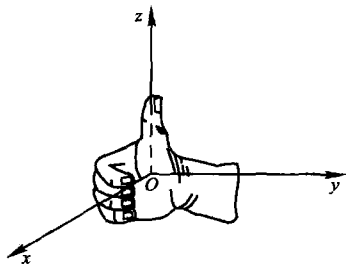


图 7-1

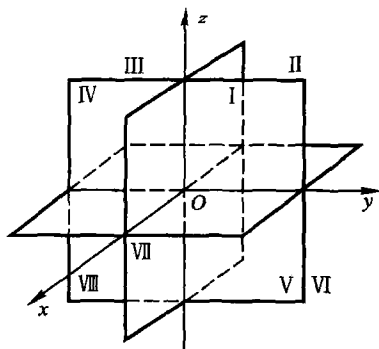


图 7-2

设  $P$  是空间中一点. 过  $P$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的平面, 它们与坐标轴交点依次为  $A, B, C$  (见图 7-3). 设这三个交点在各自坐标轴上的坐标分别为  $x, y$  和  $z$ . 于是得到一个三元有序数组  $(x, y, z)$ . 这个有序数组由  $P$  点唯一确定. 反之, 对于任何一个三元有序数组  $(x, y, z)$ , 在三个坐标轴上分别找出坐标为  $x, y$  和  $z$  的三个点. 过这三个点分别作垂直于坐标

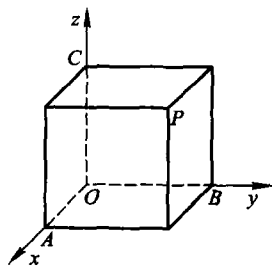


图 7-3

轴的平面, 三张平面交于一点  $P$ . 这个点  $P$  由数组  $(x, y, z)$  唯一确定. 按照这种方法可以建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系. 因此可以用三元有序数组表示点. 与点  $P$  对应的数组  $(x, y, z)$  称为点  $P$  的坐标, 记为  $P(x, y, z)$ , 数  $x, y$  和  $z$  分别称为点  $P$  的横坐标、纵坐标和竖坐标.

显然, 原点  $O$  的坐标为  $(0, 0, 0)$ .  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上点的坐标分别具有形式  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$  和  $(0, 0, z)$ . 坐标面  $xOy$  上点的坐标形如  $(x, y, 0)$ , 其中  $(x, y)$  是点在  $xOy$  坐标平面中的坐标. 同样, 坐标面  $yOz$  上点具有形如  $(0, y, z)$  的坐标, 坐标面  $zOx$  上点具有形如  $(x, 0, z)$  的坐标. 各个卦限内的点的坐标符号如下表所示:

卦限	I	II	III	IV
坐标符号	$(+, +, +)$	$(-, +, +)$	$(-, -, +)$	$(+, -, +)$
卦限	V	VI	VII	VIII
坐标符号	$(+, +, -)$	$(-, +, -)$	$(-, -, -)$	$(+, -, -)$

给定两点  $P$  和  $Q$ , 如果线段  $PQ$  垂直于坐标面  $xOy$  且被其所平分, 则称  $P$  和  $Q$  关于坐标面  $xOy$  对称.

类似地可定义两点关于坐标面  $yOz$  对称及关于坐标面  $zOx$  对称.

若已知  $P$  点的坐标为  $(x, y, z)$ , 则  $P$  点关于坐标面  $xOy$  的对称点的坐标为  $(x, y, -z)$ ,  $P$  点关于坐标面  $yOz$  的对称点的坐标为  $(-x, y, z)$ ,  $P$  点关于坐标面  $zOx$  的对称点的坐标为  $(x, -y, z)$ .

给定两点  $P$  和  $Q$ , 如果线段  $PQ$  与  $x$  轴垂直相交且被  $x$  轴平分, 则称  $P$  和  $Q$  关于  $x$  轴对称.

类似地可定义两点关于  $y$  轴对称和关于  $z$  轴对称.

点  $P(x, y, z)$  关于  $x$  轴的对称点的坐标为  $(x, -y, -z)$ , 关于  $y$  轴的对称点的坐标为  $(-x, y, -z)$ , 关于  $z$  轴的对称点的坐标为  $(-x, -y, z)$ .

如果线段  $PQ$  通过原点且被其所平分, 则称  $P$  与  $Q$  关于原点对称.  $P(x, y, z)$  关于原点的对称点的坐标为  $(-x, -y, -z)$ .

过点  $P$  作直线段垂直于坐标面  $xOy$ , 则称垂足  $P'$  为  $P$  在坐标面  $xOy$  上的投影点 (见图 7-4). 若已知点  $P(x, y, z)$ , 则  $P'(x, y, 0)$ . 类似地, 可定义  $P$  在坐标面  $yOz$  上的投影点和在坐标面  $zOx$  上的投影点, 并可由  $P$  的坐标确定其投影点的坐标.

给定两点  $P(x_1, y_1, z_1)$  和  $Q(x_2, y_2, z_2)$ , 过  $P$  和  $Q$  分别作垂直于坐标轴的平面得一长方体, 如图 7-5 所示. 因为  $A, B$  和  $C$  的坐标分别为  $(x_1, y_1, 0)$ ,  $(x_2, y_2, 0)$  和  $(x_2, y_2, z_1)$ , 所以

$$PC = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

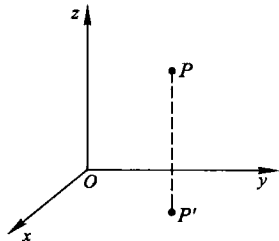


图 7-4

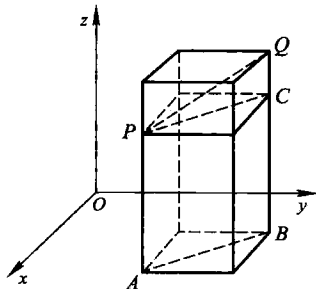


图 7-5

于是

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{PC^2 + CQ^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

这是空间中两点间的距离公式. 特别地, 若  $Q$  为坐标原点, 则得到点  $P(x, y, z)$  到原点的距离公式

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**例 1** 验证以原点  $O(0, 0, 0)$ , 点  $A(1, -2, 2)$  和点  $B(3, -1, 0)$  为顶点的三角形为等腰三角形, 但不是等边三角形.

**解** 由两点间距离公式得

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \\ OB &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}, \\ AB &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1+2)^2 + (0-2)^2} = 3. \end{aligned}$$

从而  $OA \neq OB$ ,  $OA = AB$ , 三角形  $AOB$  为等腰三角形, 但不是等边三角形.

**例 2** 已知两点  $A(-4, 1, 7)$  与  $B(3, 5, -2)$ , 在  $z$  轴上求一点  $P$ , 使  $AP = BP$ .

**解** 因为点  $P$  在  $z$  轴上, 所以它的坐标可写成  $(0, 0, z)$ , 由两点间距离公式得

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2}, \\ BP &= \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}. \end{aligned}$$

因  $AP = BP$ , 故

$$\sqrt{66 - 14z + z^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}.$$

由此解得  $z = \frac{14}{9}$ . 所求的点为  $P\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ .

### 习题 7-1

1. 在空间直角坐标系中指出下列各点所在的卦限:

$$A(3, -1, 1), \quad B(-3, 2, -1), \quad C(-3, -2, -1),$$

$$D(3, -2, -1), \quad E(-3, -2, 1), \quad F(-3, 2, 1).$$

2. 指出下列各点在空间直角坐标系中所处的特殊位置:

$$A(0, 1, -2), \quad B(0, 0, -2), \quad C(1, -1, 0),$$

$$D(3, 0, -2), \quad E(3, 0, 0), \quad F(0, -2, 0).$$

3. 指出点  $P(3, -1, 2)$  关于原点、各坐标轴、各坐标面的对称点的坐标.

4. 求点  $P(4, -3, 5)$  到坐标原点、各坐标轴、各坐标面的距离.

5. 在  $x$  轴上求一点  $P$ , 使它到点  $A(1, 3, -4)$  的距离为 5.

6. 在坐标面  $yOz$  上求与三点  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  等距的点.

7. 证明以  $A(4, 1, 9)$ ,  $B(10, -1, 6)$ ,  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

## 第二节 向量及其线性运算

### 一 向量概念

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小又有方向, 例如位移、速度、加速度和力等, 这种既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**.

通常用黑体字母  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  或用  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  表示向量.  $\mathbf{a}$  的大小称为  $\mathbf{a}$  的模, 记为  $|\mathbf{a}|$ . 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记为  $\mathbf{0}$ . 零向量没有确定的方向, 其方向也可看成是任意的.

在几何上用有向线段, 即有方向的线段表示向量 (见图 7-6). 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以  $A$  为起点,  $B$  为终点的有向线段所表示的向量记为  $\overrightarrow{AB}$ .

若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的模相等且方向相同, 则称  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  相等, 记为  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . 据此可知, 大小相等且方向相同的向量, 不论它们的起点是否相同都视为同一个向量. 这种只由大小和方向确定而与起点无关的向量称为**自由向量**. 本书将只研究自由向量.

例如, 在图 7-7 所示的平行四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

与  $\mathbf{a}$  方向相反而模相等的向量称为  $\mathbf{a}$  的**负向量**, 记为  $-\mathbf{a}$ . 在图 7-7 中,  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ .

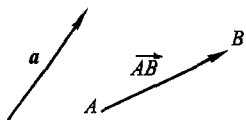


图 7-6

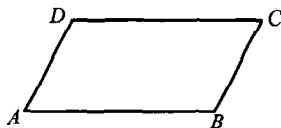


图 7-7

如果向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的方向相同或相反, 则称向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  平行, 并记为  $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ . 例如, 对于图 7-7 所给的平行四边形,  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ . 两个平行向量经过平行移动可使它们处于同一条直线上, 而向量经平行移动后所得的向量与原来向量相等, 所以两个向量平行也称为两个向量共线.

## 二 向量的线性运算

### 1. 加法

将物理学中使用的力、速度等的合成法则加以抽象, 我们给出向量加法的定义.

设  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  是二非零向量, 且  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  不平行. 任取一点  $A$ , 作向量  $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$ , 则以  $AB$  和  $AD$  为邻边的平行四边形  $ABCD$  的对角线向量  $\overrightarrow{AC}$  称为向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  之和, 记为  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$  (见图 7-8).

上述确定二向量之和的方法称为平行四边形法.

在图 7-8 中, 因为  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$ , 所以  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ . 因此,  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  之和又是将  $\boldsymbol{b}$  的起点接到  $\boldsymbol{a}$  的终点上, 以  $\boldsymbol{a}$  的起点为起点、 $\boldsymbol{b}$  的终点为终点的向量 (见图 7-9). 这种求和的方法称为三角形法.

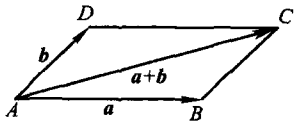


图 7-8

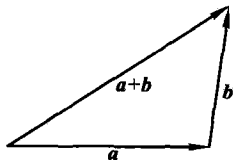


图 7-9

如果二非零向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  平行, 则当  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的方向相同时, 规定  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$  是与它们同向且  $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$  的向量; 当  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的方向相反时, 规定  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$  是与它们中模较大的同向且  $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = ||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}||$  的向量.



对任意向量  $\mathbf{a}$ , 规定  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .

求两个向量之和的三角形法, 可以推广到求多个向量之和. 若有三个或三个以上的空间向量, 则通过平移将第二个向量的起点接在第一个向量的终点上, 将第三个向量的起点接在第二个向量的终点上, 如此继续, 将这些向量连接起来, 然后由第一个向量的起点向最后一个向量的终点作向量, 这个向量便是这些向量的和向量. 如图 7-10 所示, 有

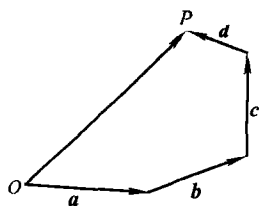


图 7-10

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

这种求多个向量之和的方法称为折线法.

不难看出, 向量加法满足如下的运算性质:

- (1) 交换律:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;
- (2) 结合律:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

### 2. 减法

给定向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 称  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$  为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  之差, 记为  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , 即

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

给定向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 从点  $O$  作向量  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ , 则由图 7-11 不难看出, 以向量  $\mathbf{b}$  的终点  $B$  为起点, 向量  $\mathbf{a}$  的终点  $A$  为终点的向量  $\overrightarrow{BA}$  就是向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的差.

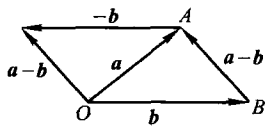


图 7-11

根据三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

其中前一个不等式等号仅在  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  同向时成立, 后一个不等式等号仅在  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  反向时成立.

### 3. 数乘向量

**定义 7.1** 实数  $\lambda$  与向量  $\mathbf{a}$  的乘积是一个向量, 记为  $\lambda\mathbf{a}$  或  $\mathbf{a}\lambda$ , 它的模为  $\mathbf{a}$  的模的  $|\lambda|$  倍, 即  $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ , 它的方向是当  $\lambda > 0$  时与  $\mathbf{a}$  同向, 当  $\lambda < 0$  时与  $\mathbf{a}$  反向.

数乘向量具有下列运算性质: