

●中学数理化发展智能丛书●

怎样学好 立体几何



常相舜 周长生 刘 坤

中学数理化发展智能丛书

怎样学好立体几何

常相舜 周长生 刘 坤

河南科学技术出版社

中学数理化发展智能丛书

怎样学好立体几何

常相舜 周长生 刘 坤

责任编辑 孙允萍

河南科学技术出版社出版

北京市门头沟区印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

787×1092毫米 32开本 9.25印张 187千字

1990年2月第1版 1991年5月第2次印刷

印数10,370—16,570

ISBN7-5349-0468-4/G·369

定价：3.00元

目 录

第一章 对象、内容、体系、方法	(1)
1.1 立体几何研究的对象	(1)
1.2 立体几何的体系和研究方法	(3)
1.3 空间图形的基本元素	(8)
1.4 直观图的画法	(13)
1.5 立体几何的内容概述	(20)
1.6 平面的基本性质——公理	(27)
1.7 确定平面的条件	(33)
1.8 立体几何的四把“刀” ——化为平面几何问题的手段	(47)
1.9 结论的范围性	(50)
1.10 平行的传递性	(53)
第二章 平面和直线的位置关系	(61)
一 空间两条直线的位置关系	(61)
2.1 异面直线	(61)
2.2 两条异面直线所成的角	(65)
2.3 异面直线的距离	(68)
二 一直线和一平面的位置关系	(73)

2.4 用公共点区分一直线和一平面 的位置关系	(73)
----------------------------------	--------

2.5 直线和平面平行的判定和性质	(76)
-------------------------	--------

2.6 直线和平面垂直的判定和性质	(83)
-------------------------	--------

2.7 点到平面的距离、直线和平面 的距离	(93)
--------------------------------	--------

2.8 直线和平面所成的角	(96)
---------------------	--------

2.9 三垂线定理	(103)
-----------------	---------

三 两个平面的位置关系	(112)
-------------------	---------

2.10 概述	(112)
---------------	---------

2.11 两平面平行	(114)
------------------	---------

2.12 二面角	(127)
----------------	---------

2.13 两个平面垂直的判定和性质	(132)
-------------------------	---------

2.14 分别在两个平面上的两点间距离	(135)
---------------------------	---------

2.15 本章小结	(149)
-----------------	---------

第三章 多面体和旋转体	(159)
-------------------	---------

一 多面体	(160)
-------------	---------

3.1 多面体	(160)
---------------	---------

3.2 棱柱	(164)
--------------	---------

3.3 棱锥	(176)
--------------	---------

3.4 棱台	(187)
--------------	---------

二 旋转体	(198)
-------------	---------

3.5 旋转面和旋转体	(198)
-------------------	---------

3.6 圆柱、圆锥、圆台	(201)
--------------------	---------

3.7 球	(216)
三 多面体和旋转体的体积	(231)
3.8 体积的概念和公理	(231)
3.9 柱、锥、台的体积	(237)
3.10 拟柱体及其体积公式	(253)
3.11 球和球缺的体积公式	(257)
参考答案	(266)

第一章 对象、内容、体系、方法

1.1 立体几何研究的对象

几何学是研究几何图形的性质及其应用的一门科学。

所谓几何图形就是点的集合，简称点集。

几何图形的性质，概括起来有三个方面，就是图形的大小、形状和位置关系。

在初中，我们已经学过平面几何。平面几何研究的是平面图形的形状、大小和位置关系，还有平面图形的画法和计算，以及它们的应用。

所谓平面图形是指所有点都在同一平面内的图形。例如，一个点，一条直线，一个角，两条平行线，一个三角形，一个平行四边形，一个圆等都是平面图形。

除了平面图形以外，还有非平面图形。就是所有点不都在同一个平面内的图形。例如，正方体、长方体、柱、球等都是非平面图形。

平面图形和非平面图形统称之为空间图形。立体几何研究的对象就是空间图形。这是因为在解决实际问题时，只知道平面几何知识是不够用的，例如，建筑厂房、制造机器、

修筑堤坝等都需要进一步研究空间图形的形状、大小和位置关系。

思 考 题

1. 由三个点组成的集合，是平面图形还是非平面图形？
由四个点组成的集合呢？

2. 由一个点和一条直线构成的图形是平面图形还是非平面图形？

3. 由两条直线构成的图形是平面图形还是非平面图形？
由三条直线构成的图形呢？

4. 已知 M 是 $\triangle ABC$ 外的一个点，由 M 和 $\triangle ABC$ 构成的图形是平面图形还是非平面图形？

5. “下列命题，你认为正确的，在后面括号内画“√”，不正确的画“×”。

(1) 由 AB 、 BC 、 CD 、 DA 四条任意的线段构成的图形是平面图形； ()

(2) 由 AB 、 BC 、 CD 、 DA 四条任意的线段构成的图形是非平面图形； ()

(3) 平面图形是空间图形的一部分； ()

(4) 由一个点和一个平面构成的图形可能是平面图形也可能是非平面图形； ()

(5) 由一条直线和一个平面构成的图形是非平面图

• 这样的题目，本书今后就简称“判断题”。

1.2 立体几何的体系和研究方法

1.2-1 定理系列

如同平面几何一样，立体几何里的图形也是按照由简到繁的顺序安排的。先学习简单的图形再学习较复杂的图形。但是，拿到一个图形以后应该用什么方法去研究呢？

立体几何的研究方法，是与物理化学的研究方法截然不同的。我们知道，说一个物体具有某种物理性质或化学性质，正确与否，用什么方法去判断呢？主要靠实验，但是，一个几何性质的正确与否，就不是这样，而是要靠推理、证明。证明就得有论据。几何里有个规定：证明的论据必须是本书以前学过的图形的性质。经过证明的几何性质就叫做定理。所以，在几何里，有一串先后有序的反映图形性质的定理：定理1、定理2、定理3等等。这就是定理系列。这样就产生了一个问题，第一个定理的正确性又是靠什么论据来证明的呢？依据公理。至于公理本身的正确性，我们就不加证明而予承认了。

1.2-2 定义系列

还要指出，在研究一个新图形的时候，首先得对这一新图形下一个定义。定义的方法，也是有规定的，必须用本书以前学过的图形来定义新的图形。所以，在几何里还有一串

说明图形意义的定义：定义1、定义2、定义3等等。这就是定义系列。这样，同定理系列类似，也产生了一个问题，第一个定义应该怎样去下呢？用基本概念。几何的基本概念的意义就不再用其他的词去解释了。

有一些不予定义的基本概念，有一些不予证明的基本性质（公理），这就是研究几何的出发点。从这个地方出发定义出一系列几何概念，推导出一系列几何定理，这就是立体几何的研究方法。这个方法称为公理的方法。

1.2-3 公理和基本概念的关系

在公理体系里，不定义的基本概念与被定义的概念之间的关系，以及前面的定义和后面的定义之间的关系，我们已经说明了；不予证明的公理与定理之间的关系，以及前面的定理和后面的定理之间的关系，我们也说明了；但是，基本概念和公理之间，同一图形的定义和定理之间有没有关系呢？如果有的话，它们又是什么关系呢？

公理反映基本概念（基本元素）的性质。

我们知道，点和直线是几何里的两个基本概念（基本元素），是不予定义的。这一点，读者可能会感到奇怪。对于点和直线的意义加以解释有何不好呢？事实上，并不是人们不去解释而是难以办到。试想用什么词儿去解释点和直线呢？当然，我们可以这样说：“点没有大小，没有长短，没有宽窄。”但是如果进一步追问：大小，长短，宽窄又该用其他什么语词去解释呢？同样，直线也是如此，比如说，可

以把直线说成是“一根拉得很紧很紧的线”或“一条笔直的线。”但是，“很紧”、“笔直”，又是什么意思呢？岂不是还是难以说明吗？事实上用“紧”说明“直”，尚不如用“直”说明“紧”更为恰当。

如此说来，点和直线难道就没有自己的特性吗？直和曲难道就没有区别吗？点和直线是有其本质属性的，它的本质属性可以通过公理反映出来。在平面几何我们学过这样的公理：过两点可以画直线而且只能画一条直线（图1-1）。

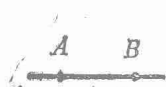


图1-1



图1-2

这个公理指出：“过两点能且只能画一条直线”就充分体现出直线的特性。因为，假设过两点画的线不是直线而是曲线，那就不只可以画一条而且可以画无数条了（图1-2）。同时，这个公理也体现了点的特性，因为，假设点有一定的大小（图1-3），那么过两点岂不可以画很多条直线吗？

以上事实说明，基本概念（基本元素）的性质是通过公理反映出来的，这就是公理和基本概念之间的关系。



图1-3

1.2-4 定义和定理的关系

现在来说明定义和定理的关系。

要了解定义和定理的关系，需指出以下两点：

1. 定义反映的是图形的本质属性。
2. 一个图形的本质属性往往不是唯一的，并且它们之间具有内在的联系，从而可以互相推导。

例如，平行四边形有以下本质属性：

- (1) 两组对边分别平行；
- (2) 两组对边分别相等；
- (3) 两组对角分别相等；
- (4) 两条对角线互相平分；
- (5) 任意两个相邻内角互补；等等。

选取哪一条本质属性做为定义是人为约定的。通常都是把具有“两组对边分别平行”做为平行四边形的定义，而把其他的本质属性做为平行四边形的性质定理。这样，在以前知识的基础上，根据平行四边形的定义就可以推导出平行四边形的性质定理。

需要指出，一个图形的非本质属性也是可以从定义推出的，因此，一个图形的性质定理也可以是这个图形的非本质属性，如对顶角相等是对顶角的性质定理，就是对顶角的非本质属性，从两个角相等这一事实就不能推导出这两个角一定是对顶角。总之，一个图形的性质定理，可能是它的本质属性，也可能是它的非本质属性。如果是本质属性，这个性

质定理就有逆定理，如果是非本质属性，这个性质定理就没有逆定理。

由此可知，一个图形的定义是证明这个图形的（性质）定理的根本依据。这就是定义的重要意义，这就是我们之所以强调要弄清概念的一个原因。

1.2-5 粗略的公理体系

根据以上所说，我们可以把立体几何的（公理）体系和研究方法概括为以下四点：

1. 给出不予定义的基本概念（基本元素）。

2. 建立反映这些基本概念的性质公理。

3. 用这些基本概念去定义其他几何概念，用已知的概念去定义新的概念。

4. 根据基本概念或公理或定义的概念证明定理，在此基础上再证明新的定理。

事实上平面几何的体系和研究方法也是这样。

不过需要指出的是，中学学习的平面几何和立体几何，限于读者的接受能力，不可能完全按照严格的公理体系处理。为了易于接受，省略了某些定理的证明，有些定理就以公理的形式出现。恰当地说，中学几何的体系只是粗略的公理体系。

练 习1.2

1. 证明定理：同一平面上的两条直线最多只能有一个公共点。

2. 两条曲线的公共点可能有多少个呢?

3. 第1题里的定理是不是也表明直线的一个特性呢?

4. 现在把第1题里的定理做为公理, 试证明: 过两点最多只能引一条直线。

5. 我们把平行四边形的定义改成: 两组对边相等的四边形叫做平行四边形。试根据这一定义证明: 平行四边形的两组对边分别平行。

6. 如果把平行四边形的定义改成: 对角线互相平分的四边形叫做平行四边形, 试根据这个定义证明: 平行四边形的两组对边分别相等。

7. 圆的切线的定义是“和圆只有一个公共点的直线”。试根据这个定义证明: 在半径外端与半径垂直的直线是圆的切线。

8. 现在把圆的切线定义改成: 在半径外端与半径垂直的直线叫做圆的切线。试根据这个定义证明: 与圆只有一个公共点的直线是圆的切线。

1.3 空间图形的基本元素

1.3-1 点、直线、平面

立体几何研究空间图形的大小、形状和位置关系。空间图形, 千形百状, 千姿百态, 从哪入手研究呢?

今天研究桌椅板凳, 明天研究厂房建筑, 后天又研究机器制造……。这个办法好不好呢? 很显然, 这样研究是研究

不完的，而且也是不可能的，这不是科学的研究问题的方法。正确的方法是什么呢？就像化学那样应把重点放在化学元素的研究上。大家知道，在自然界里，化合物的种类有千千万万。倘若不着眼于组成各种化合物的化学元素的研究而去逐个研究每一个化合物的话，必然使我们的思维陷于纷繁杂乱之中。

所以，研究立体几何，首先应着眼于构成各种空间图形的基本元素。所谓基本元素，也就是最基本最简单的图形，由于复杂的图形都是由简单的基本图形组成的，在弄清基本图形的性质以后，进而研究复杂图形的性质就比较容易了。

构成立体图形的基本元素共有三个：点、直线、平面。

我们知道，当我们只考虑一个物体的位置而不考虑其大小和形状的时候，我们就用点来表示这些物体。例如，地图上的许多城镇都是画了许多小点点。又如，电子和原子核的相互位置关系，行星和太阳的相互位置关系，也都是用点来表示的。几何里所说的点就是从这样一些实物中抽象出来的。所以，几何里的点只有位置而没有大小和形状。

我们还知道，常见的桌子边、黑板边以及拉紧的绳子等，都给我们以直线的形象，几何里所说的直线就是从这样一些实物中抽象出来的，但是，几何里的直线是无限伸长的。

与直线类似，常见的桌面、黑板面以及平静的水面等，都给我们以平面的形象，几何里所说的平面就是从这样一些实物中抽象出来的，但是，几何里的平面是无限延展的。

1.3-2 平面的画法

点和直线仍采用平面几何中的表示方法：用 A 、 B 、 C 、……表示点；用 a 、 b 、 c 、……或 AB 、 BC 、……表示直线。

现在我们来说明平面的画法和表示方法。

我们知道，直线是无限伸长的，把它全画出来是不可能的，只能画出直线的一部分来表示直线。同样，由于平面是无限延展的，我们也只能画出平面的一部分来表示平面。当我们从适当的角度和距离观察桌面和窗户时，它们的形象就是平行四边形(图1-4、1-5)。因此，在立体几何中，通常用

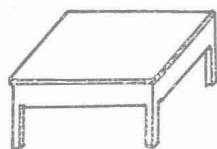


图1-4

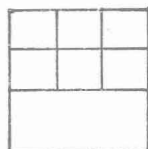


图1-5

平行四边形来表示平面(图1-6)。当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成邻边的两

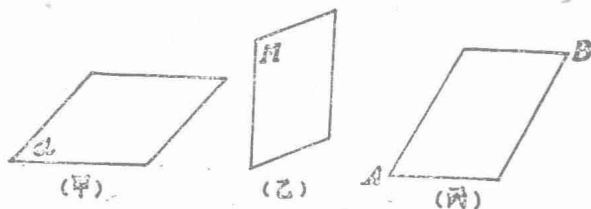


图1-6

倍，如图1-6（甲）。

平面可用一个希腊字母（如 α 、 β 、 γ ）或一个大写英文字母（如 M 、 N 、 P ）来表示，如图1-6（甲）中的平面记作平面 α ，图1-6（乙）中的平面记作平面 M 。平面也可以用平行四边形相对两个顶点的字母来表示，如图1-6（丙）中的平面记作平面 AB 。

当一个空间图形是由若干平面组成时，为增强立体感，对于那些被遮住的线，或者画成虚线（图1-7），或者不画（图1-8）。

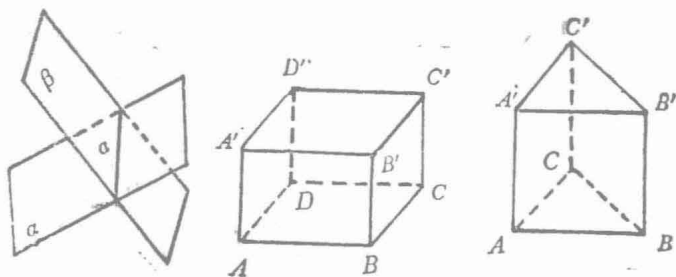


图1-7

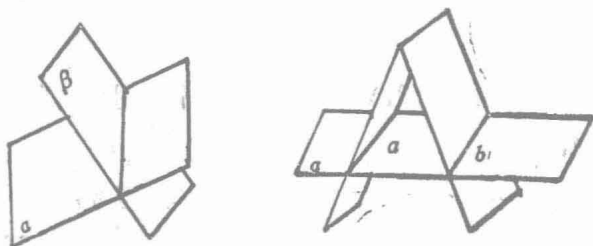


图1-8