龙门状元

状元笔记

教材详解

高中数学必修 4

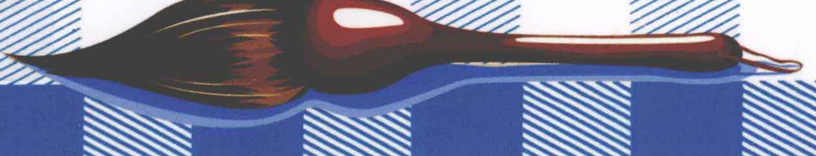
JS

龙门书局教育研究中心组编
学科主编：王思俭　本册主编：张默

★内含教材习题答案★

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE



龍門書局　龙门品牌・学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE

高中数学必修4

JS

龙门书局教育研究中心组编
学科主编：王思俭　　本册主编：张　默

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解:JS版课标本.高中数学.必修4/龙门书局教育研究中心组编;王思俭学科主编;张　默本册主编.—北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-2119-1

Ⅰ.状… Ⅱ.①龙… ②王… ③张… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第123238号

策划编辑:田旭　刘娜　责任编辑:王美容　刘童　封面设计:魏晋文化

龍門書局出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
丽源印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2009年7月第一版　开本:A5(890×1240)
2011年6月第二次修订版　印张:9 1/2
2011年6月第三次印刷　字数:296 000

定价:20.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

思路决定未来

状元的成功规律

① 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

② 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之：假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

③ 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

好书可以改变一个人的命运！

① 没有什么比基础更重要！ 第一秘诀：以教材为中心，夯实基础

曾经有位高考状元跟我说，考试中真正的难题很少，题目不会做或者做错了，多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错，其实对知识点的掌握还是似是而非，往往“知其然不知其所以然”，并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说：平时看的最多的书就是教材，每次看都会有新体会，看教材不是简单的记忆，而是深刻的理解，要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候，每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话，大家都深以为然，教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的“基础知识全解”这个栏目中，我们将知识点按照重要程度采用“能级”区分，每个知识点是应该“记忆”还是“理解”，存在什么样的“误区”，如何进行“延伸拓展”、“思维发散”等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材，真正夯实基础。

② 素质、能力比成绩更重要，方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习，最终要归结在素质的养成和能力的提升上。靠不断地机械地做题，考试是不能提升素质和能力的，最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力，就能生发解决问题的方法与技巧，也就拥有了打开一切的“金钥匙”。拥有素质与能力，也定将能考出相当理想的成绩！

在本书的“方法·技巧·能力”栏目中，我们用案例的方式，帮助你发散拓展、突破思维障碍，学会综合运用、举一反三，破解误区和陷阱，最终实现从知识向能力的转化、迁移，培养你的创造性思维和创新能力。

③ 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师，人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中，我们力求使用最新颖的素材，让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题；我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目，当然也要保留多年沉淀下来的经典题目；我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中，“随风潜入夜，润物细无声”，在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

《状元笔记教材详解》专家团队

龙门专家团队

丛书组编：龙门书局教育研究中心
总 策 划：田 旭
执行编委：刘 娜 王美容
各学科主编：**语文：**郭能全 王丽霞 涂木年
数学：李旦久 李新星 傅荣强 王思俭
英语：于 静 张成标 赵炳河 朱如忠 陈 俊
物理：胡志坚 张忠新
化学：曹丽敏 张希顺 朱智铭
生物：姚登江
历史：胡 希 魏 明 张华中
地理：何纪延 王太文
政治：张 清

专家团队：

语文
方钧鹤（江苏省扬州中学副校长，特级教师，教授级高级教师）
蒋念祖（江苏省扬州中学语文教科室主任，教授级高级教师）
郭能全（山东省莱芜二中高级教师）
王丽霞（山东省潍坊市安丘实验中学高级教师，省级教学能手）
涂木年（广东省广州六中语文组组长，特级教师）

数学
王思俭（江苏省苏州中学数学教研组组长，教授级高级教师）
周敏泽（江苏省常州高级中学数学教研组组长，特级教师，中国数学奥赛高级教练）
李旦久（山东省烟台一中中级教师）

英语
张成标（山东省济宁市育才中学高级教师，济宁市教学能手）
赵炳河（山东省东营市利津一中高级教师，省级教学能手）
朱如忠（江苏省扬州中学副校长，高级教师）
陈 俊（安徽省安庆教研室特级教师，安徽省学术带头人）
朱尔祥（山东省潍坊一中高级教师）
刘德梁（安徽省安庆一中高级教师）

物理
朱 浩（江苏省苏州中学特级教师，国际物理奥赛金牌教练）
陈连余（江苏省南京市金陵中学特级教师，市学科带头人）
张忠新（山东省潍坊一中高级教师，潍坊市教学能手，全国奥赛优秀指导老师，中国物理学会终身会员）
胡志坚（广东实验中学物理教研组组长，高级教师）

化学
顾德林（江苏省苏州中学特级教师）
朱智铭（北京市平谷中学化学组组长，高级教师）
张希顺（山东省潍坊中学化学组组长，高级教师）
曹丽敏（江苏省常州高级中学化学教研组组长，高级教师，市学科带头人）

生物
王苏豫（江苏省金陵中学教授级高级教师，苏教版生物教材编委会委员）
姚登江（山东省邹城实验中学生物组组长，高级教师）

思想政治
赵浩岭（江苏省扬州中学特级教师）
马维俊（江苏省常州高级中学高级教师）
张 清（山东省烟台一中备课组组长，中级教师）

历史
王 雄（江苏省扬州中学高级教师，教授级高级教师）
魏 明（山东省实验中学高级教师，省级骨干教师，市学科带头人）

地理
何纪延（江苏省苏州中学高级教师）

读者意见调查表

亲爱的读者朋友：

您好！感谢您选购龙门书局的图书(高中数学必修4·JS)。为了更好的满足您的学习需求,请将您的想法以及在使用过程中发现的不足和建议反馈给我们,以便不断提高图书质量。

1. 您认为本书的封面:A. 不错　B. 一般　C. 改进的地方____________

2. 您认为本书哪些栏目对您学习帮助比较大(　　),您认为本书哪些栏目对您帮助不大(　　)

   A. 基础知识全解　B. 方法能力探究　C. 从教材看高考

   D. 课后习题　F. 教材习题答案

3. 吸引您购买本书的理由　(　　)

   A. 知识点讲解全面　B. 方法能力讲解细致　C. 例题选取经典　D. 有易错提示

   E. 有课后练习　F. 有教材与高考的联系　G. 有教材习题答案　H. 其他______

4. 您所在学校使用的教材版本(如R、JS等)

   语文______　数学______　英语______　物理______　化学______

   生物______　地理______　历史______　政治______

5. 您周边同学使用最多的同步图书____________

6. 您在学习过程中遇到哪些困难?____________

7. 您在使用本书时发现的错误(请标明页码、题号)____________

8. 您认为本书需要改进的地方及其他建议____________

您的个人档案(请务必详细填写)

姓名:　学校:

年级:　通讯地址:　省　市

邮编:　职业:教师　学生　其他

联系方式:

来信请寄:北京市东城区东黄城根北街16号龙门编辑部　王美容(收)

邮编:100717

目录

第三章 三角恒等变换

第一章 三角函数

1.1 任意角弧度

芝麻开门

在初中阶段，我们学习的角都在 $0°\sim360°$之内，而在实际生活中，角的范围更广，如在奥运会上，体操、跳水等比赛中经常出现这样的术语："转体 720°"，"翻腾两周半"等．又比如，时钟的指针每天都在不停地转动，那么在一天之内，分针究竟转过了多少角度呢？通过本节的学习，这些问题就都能解决了．

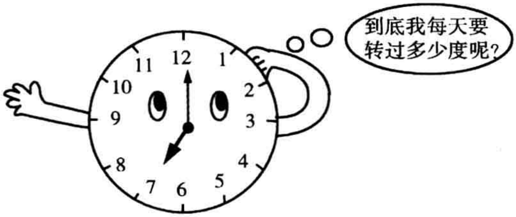


图 1-1-1

知识感悟

知识点一 ★★任意角的概念

［掌握］ 任意角的概念：一个角可以看作平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形．射线的端点即角的顶点，射线旋转的开始位置和终止位置即为角的始边和终边．

〈点拨〉 如图 1-1-2，射线 OA 绕端点 O 逆时针转动到 OB 位置，形成角 α，其中 O 点—顶点，OA—始边，OB—终边．

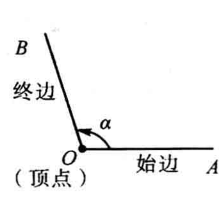


图 1-1-2

［记忆］ 正角：按逆时针方向旋转所成的角叫正角．

负角：按顺时针方向旋转所成的角叫负角．

零角：射线没有做任何旋转，叫做零角．

〈比较〉 正角、负角、零角可以与正数、负数、零的概念作比较，有助于我们对弧度制的理解．

〈点拨〉 由定义知，要正确理解正角、负角、零角的概念，关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动．

【例 1】 若 $90°<\beta<\alpha<135°$，则 $\alpha-\beta$ 的范围是______，$\alpha+\beta$ 的范围是______．

思路分析：利用不等式的性质，在给定角的范围内求出两角和、差的范围．

规范解答：∵ $90^\circ<\beta<\alpha<135^\circ$，则有

$$\begin{cases}90^\circ<\alpha<135^\circ\\90^\circ<\beta<135^\circ\\\beta<\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}90^\circ<\alpha<135^\circ\\-135^\circ<-\beta<-90^\circ,\\\alpha-\beta>0^\circ\end{cases}$$

∴ $180^\circ<\alpha+\beta<270^\circ$，$0^\circ<\alpha-\beta<45^\circ$.

规律总结：在正角、零角、负角范围内求角的和与差时，要注意不等式不能相减，只能进行同向不等式相加.

【例 2】 (1)时针走过了 2 小时 40 分，则分针转过的角度是________.

(2)若将时钟拨慢 5 分钟，则分针转了______度，时针转了______度.

思路分析：钟表的指针在正常状态下是顺时针旋转的，转过的角度是负角，若将时钟拨慢，则为逆时针旋转，则转过的角度为正角.

规范解答：(1)时针走过 1 小时，分针恰好转一圈，即转过-360°，又 2 小时 40 分＝$2\frac{2}{3}$小时.

∴$-360^\circ\times2\frac{2}{3}=-960^\circ$，∴ 应填$-960^\circ$.

(2)分针转过的角度是$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$，

时针转过的角度是$\frac{30^\circ}{12}=2.5^\circ$，

∴ 应填 30，2.5.

规律总结：考查钟表上的指针转过的角度时需注意两点：

(1)明确旋转方向，确定角的正负. 一般地，若经过一段时间，每种指针均顺时针转动，形成的角为负角；若拨慢一段时间，指针要逆时针转动，形成的角为正角.

(2)因为分针转动一周时，时针旋转$\frac{1}{12}$周，所以时针转过的度数是分针转过的度数的$\frac{1}{12}$倍，一般通过分针所转角度去求时针所转角度较为方便.

知识点二 ★象限角、轴线角

[记忆] 为了便于研究，我们把角放到直角坐标系中，规定：角的顶点为坐标原点，角的始边为 x 轴正半轴，根据角的终边所在的位置来确定角是象限角还是轴线角.

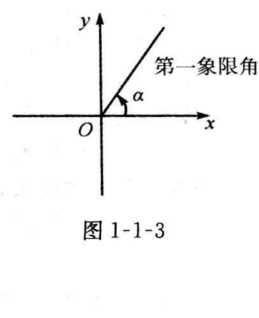


图 1-1-3

(1)象限角：角的终边落在第几象限，就称是第几象限角.

〈点拨〉 比如：60°，420°，-300°都是第一象限角，如图1-1-3.

150°，480°，-240°都是第二象限角；

210°，570°，-150°都是第三象限角；

300°，660°，-60°都是第四象限角.

(2)轴线角：角的终边落在坐标轴上，就称为轴线角.

〈点拨〉 比如：0°，90°，180°，270°，360°，－90°，－270°，－360°，－1080°等都是轴线角，如图 1-1-4.

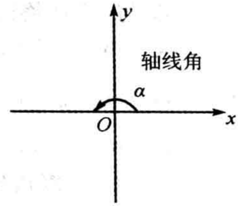


图 1-1-4

〈比较〉 你能区分锐角、0°～90°的角、小于 90°的角和第一象限角这四个概念吗？

锐角：(0°,90°)，

0°～90°的角：[0°,90°]，

小于 90°的角：(－∞,90°)，

第一象限角：($k\cdot360°$,$k\cdot360°+90°$)，($k\in\mathbf{Z}$).

【例 3】 (1)－45°是第________象限角，800°是第________象限角.

(2)540°的终边在________，－720°的终边在________.

思路分析：将角放到直角坐标中，看终边所在的位置.

规范解答：(1)如图 1-1-5，可知，－45°是第四象限角. 如图 1-1-6，800°＝360°×2＋80°是第一象限角.

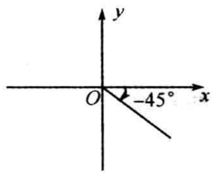


图 1-1-5

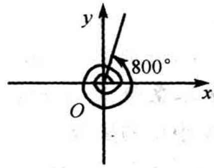


图 1-1-6

(2)如图 1-1-7，540°＝360°＋180°，终边在 x 轴负半轴.

如图 1-1-8，－720°＝(－360°)×2，终边在 x 轴正半轴.

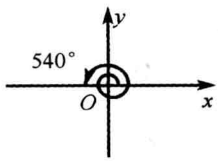


图 1-1-7

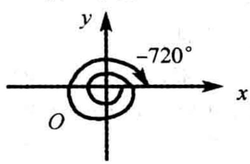


图 1-1-8

知识点三 ★★终边相同的角

[理解] 与角 α 终边相同的角的集合：$\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

〈提醒〉 (1)α 为任意角.

(2)终边相同的角有无数个，相差 360°的整数倍.

(3)相等的角终边一定相同，终边相同的角不一定相等.

【例 4】 求在－360°和 720°之间与－702°角终边相同的角，并判断是第几象限角.

思路分析：只需将这些角表示成 $k\cdot360°+\alpha$(－360°≤α≤720°)的形式，然后根据 α 来确定它们所在的象限.

规范解答：∵ －702°＝－2×360°＋18°，

∴ 与$-702°$终边相同的角为$\beta=k\cdot 360°+18°(k\in\mathbf{Z})$.

∵ $-360°<k\cdot 360°+18°<720°$,

∴ $-1-\frac{1}{20}<k<2-\frac{1}{20}(k\in\mathbf{Z})$,

∴ $k=-1,0,1$分别代入得$\beta=-342°,18°,378°$,且β是第一象限角.

规律总结:终边相同的角之间相差$360°$的整数倍.

【变式】 若角α的终边与$30°$角的终边相同,求在$[-360°,360°)$内与$\frac{\alpha}{3}$角终边相同的角.

规范解答:由角α的终边与$30°$角的终边相同,可得$\alpha=k\cdot 360°+30°,k\in\mathbf{Z}$.

故$\frac{\alpha}{3}=k\cdot 120°+10°,k\in\mathbf{Z}$.

根据题意可得$-360°\leqslant k\cdot 120°+10°<360°$,

即$-37°\leqslant k\cdot 12°<35°$.

∴k的取值为$0,1,2,-1,-2,-3$.

所求的角有6个,分别是$10°,130°,250°,-110°,-230°,-350°$.

知识点四 ★★各象限角与轴线角的集合的表示

[理解] (1)象限角的集合

第一象限角:$\{x|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

第二象限角:$\{x|k\cdot 360°+90°<x<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

第三象限角:$\{x|k\cdot 360°+180°<x<k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

第四象限角:$\{x|k\cdot 360°+270°<x<(k+1)\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

(2)轴线角的集合

终边在x轴的正半轴:$\{x|x=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在x轴的负半轴:$\{x|x=k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在y轴的正半轴:$\{x|x=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在y轴的负半轴:$\{x|x=k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在x轴上:$\{x|x=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在y轴上:$\{x|x=k\cdot 180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在坐标轴上:$\{x|x=k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在$y=x$这条直线上:$\{x|x=k\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$

〈提醒〉 象限角与轴线角的表示并不唯一,还有其他表示.例如:终边落在x轴负半轴的角的集合也可以表示为$\{x|x=k\cdot 360°-180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

【例5】 如图1-1-9,分别写出顶点在原点,始边重合于x轴正半轴,终边落在阴影部分(包括边界)的角α的集合.

思路分析:首先要明确构成阴影部分的两条终边的表示,然后必须明确在$360°$内由哪条边逆时针旋转至哪条边形成阴影.

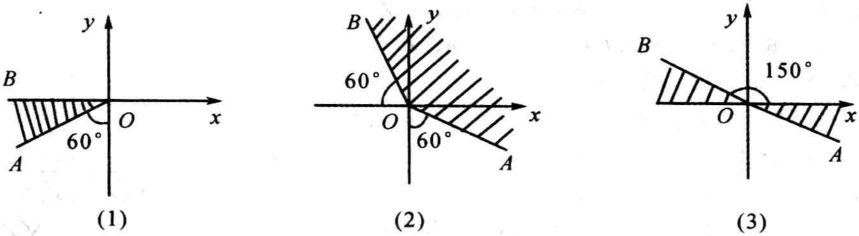


图 1-1-9

规范解答:(1)图中以 OB 为终边的角可表示为 $k\cdot 360°+180°(k\in\mathbf{Z})$,因让 OB 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 30°后便与 OA 重合,故以 OA 为终边的角为 $k\cdot 360°+210°(k\in\mathbf{Z})$,故终边落在阴影部分角的集合为 $\{\alpha|k\cdot 360°+180°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+210°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)图中以 OA 为终边的角可表示为 $k\cdot 360°-30°(k\in\mathbf{Z})$,让 OA 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 150°得 OB,故以 OB 为终边的角为 $k\cdot 360°+120°(k\in\mathbf{Z})$,则终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot 360°-30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 180°而得到的,故终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot 180°+150°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 180°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

方法规律:"扇形"区域的周期为 360°,即每旋转一周恰好一次覆盖该区域;而"对角形"区域的周期为 180°,即每旋转一周恰好两次覆盖该区域.

误区:第(2)题有同学会写成 $\{\alpha|k\cdot 360°+330°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$ 或写成 $\{\alpha|k\cdot 360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+330°,k\in\mathbf{Z}\}$. 第一种写法中虽然两条终边都没有写错,但是没有考虑到大小关系,即未考虑到两个角须要落在同一个"数量级"内,只需把 330°改成 −30°或把 120°改成 480°. 第二种错误考虑到了角的大小关系,但是忽略了旋转的方向,要得到图中的阴影,必须从 OA 逆时针旋转到 OB. 因此要把 OA 表示的角写在左边,把 OB 表示的角写在右边.

【例 6】 若 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

思路分析:只需将 $\frac{\alpha}{2}$ 所满足的范围用不等式表示出来,再画出不等式表示的图形(图 1-1-10),即可判断象限.

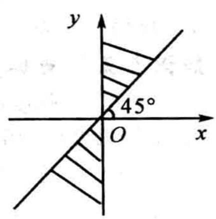


图 1-1-10

规范解答:∵ α 是第二象限角,

∴ $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

∴ $k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°,k\in\mathbf{Z}$,

∴ 由图象知,$\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

【变式 1】 若 α 是第二象限角,则 $180°-\alpha$ 是第几象限角?

规范解答:∵ $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore k\cdot 360°-180°<-\alpha<k\cdot 360°-90°, k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore k\cdot 360°<180°-\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 180°-\alpha$ 是第一象限角.

【变式2】 若 3α 是第三象限角,那么 α 是第几象限角?

规范解答:$\because k\cdot 360°+180°<3\alpha<k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore k\cdot 120°+60°<\alpha<k\cdot 120°+90°, k\in \mathbf{Z}$.

由图 1-1-11 知,α 为第一或第三或第四象限角.

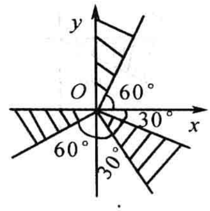


图 1-1-11

误区:学生解决此类问题往往喜欢凭感觉,如 α 在第二象限,则认为 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限,从而产生错误.此类问题只需写出角的范围,从图象上直观地得到结果.

【例7】 已知集合 $A=\{x|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+180°, k\in \mathbf{Z}\}$. 集合 $B=\{x|k\cdot 360°+45°<x<k\cdot 360°+225°, k\in \mathbf{Z}\}$. 在直角坐标系内,分别用阴影部分表示集合 A、B 中角的位置,并求 $A\cap B$,$A\cup B$.

思路分析:可先在直角坐标系内分别作出集合 A、B 中的角所对应的终边的区域,并求出它们的交集与并集所对应的区域.

规范解答:A、B 中角的终边表示的区域分别如图 1-1-12,图 1-1-13 所示:

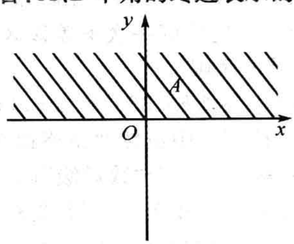


图 1-1-12

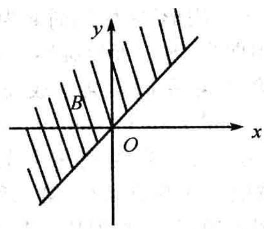


图 1-1-13

由图知,$A\cap B=\{x|k\cdot 360°+45°<x<k\cdot 360°+180°, k\in \mathbf{Z}\}$.

$A\cup B=\{x|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+225°, k\in \mathbf{Z}\}$.

规律总结:对较复杂的类似问题,一般可以先分别求出各个集合所表示的区域,再将几个区域合起来考虑.

知识点五　★弧度制的定义

[记忆] 弧度制的定义:长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角,记作 1 rad. 用弧度作为单位来度量角的单位制叫弧度制.

〈比较〉 角度的定义与弧度的定义.

角度:1 个圆周角的 $\frac{1}{360}$ 称为 $1°$.

弧度:弧长等于半径的弧所对的圆心角称 1 rad.

[理解] 弧度数

(1)由弧度制的定义,弧长为 r 的弧所对的圆心角的弧度数为 1 rad.

图 1-1-14

即$\frac{r}{r}=1$ rad.(如图 1-1-14(2)所示).

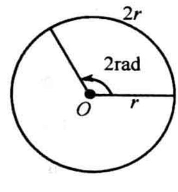


图 1-1-15

(2)若弧长为 $2r$,如图 1-1-15,则它所对的圆心角的弧度数为$\frac{2r}{r}=2$ rad.

(3)若弧长为 $2\pi r$,即整个圆周,则它所对的圆心角的弧度数为$\frac{2\pi \mathrm{r}}{r}=2\pi$ rad

〈提醒〉 如果圆心角为负角,且它所对的弧的长 $l=4\pi r$,则这个角的弧度数的绝对值为$\frac{l}{r}=\frac{4\pi r}{r}=4\pi$,而这个角的弧度数为$-4\pi$.

〈点拨〉 正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数是零,角 α 的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$(其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长,r 是圆的半径).

〈说明〉 用弧度表示角的大小时,只要不引起误解,可以省略单位,例如:1rad ,2rad,2π rad 可以写成 1,2,2π.

【例 8】 下列命题中,真命题有________.

①1 弧度是 1 度的圆心角所对的弧;

②1 弧度是长度为半径的弧;

③1 弧度是长度等于半径的弧所对的圆心角;

④“度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位;

⑤1 度的角是周角的$\frac{1}{360}$,1 弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$.

思路分析:根据角度和弧度的定义,要明确角度和弧度的区别以及 1 弧度与 1 度的概念.

规范解答:③④⑤.

规律总结:无论是角度制还是弧度制,角的大小与圆的半径长短无关,只与弧长与半径的比值有关.

【例 9】 若圆弧长度等于其内接正方形的边长,求其所对圆心角的弧度数.

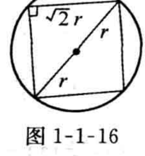


图 1-1-16

思路分析:要求此圆弧所对的圆心角的弧度数,只需知道此圆弧的长度与圆半径 r 的倍数关系,由弧度的定义即可求出弧度数.

规范解答:如图 1-1-16,设圆半径为 r,则其内接正方形边长为$\sqrt{2}r$,

$\therefore$此圆弧长为$\sqrt{2}r$.

根据弧度的定义,长度为 r 的圆弧所对的圆心角为 1rad,则长度为

$\sqrt{2}r$ 的圆弧所对的圆心角为$\sqrt{2}$rad.

规律总结：利用弧长与半径的倍数关系可求其所对圆心角的弧度数.

知识点六 ★角度与弧度的互化

［理解］ 角度与弧度的互化.

根据 $360°=2\pi$ rad，可得$1°=\frac{\pi}{180}$rad，$1\text{rad}=\frac{180°}{\pi}$.

〈提醒〉 1 rad≈57.3°

［记忆］ 须熟记的特殊角的弧度数：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
度	180°	210°	225°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

［理解］ 各象限角与轴线角的弧度制表示：

第一象限角：$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

第二象限角：$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

第三象限角：$\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

第四象限角：$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

终边在 x 轴正半轴：$\{\alpha|\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 x 轴负半轴：$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 y 轴正半轴：$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 y 轴负半轴：$\{\alpha|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 x 轴上：$\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 y 轴上：$\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在坐标轴上：$\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 $y=x$ 上：$\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

【例 10】 角度与弧度的互化.

(1)$\frac{2\pi}{3}$弧度=________度；(2)$-135°$=________弧度；(3)$-300°$=________rad；

(4)$\frac{8\pi}{5}$rad=________度.