Research on
the electrodynamics
of moving bodies

动体电动力学研究

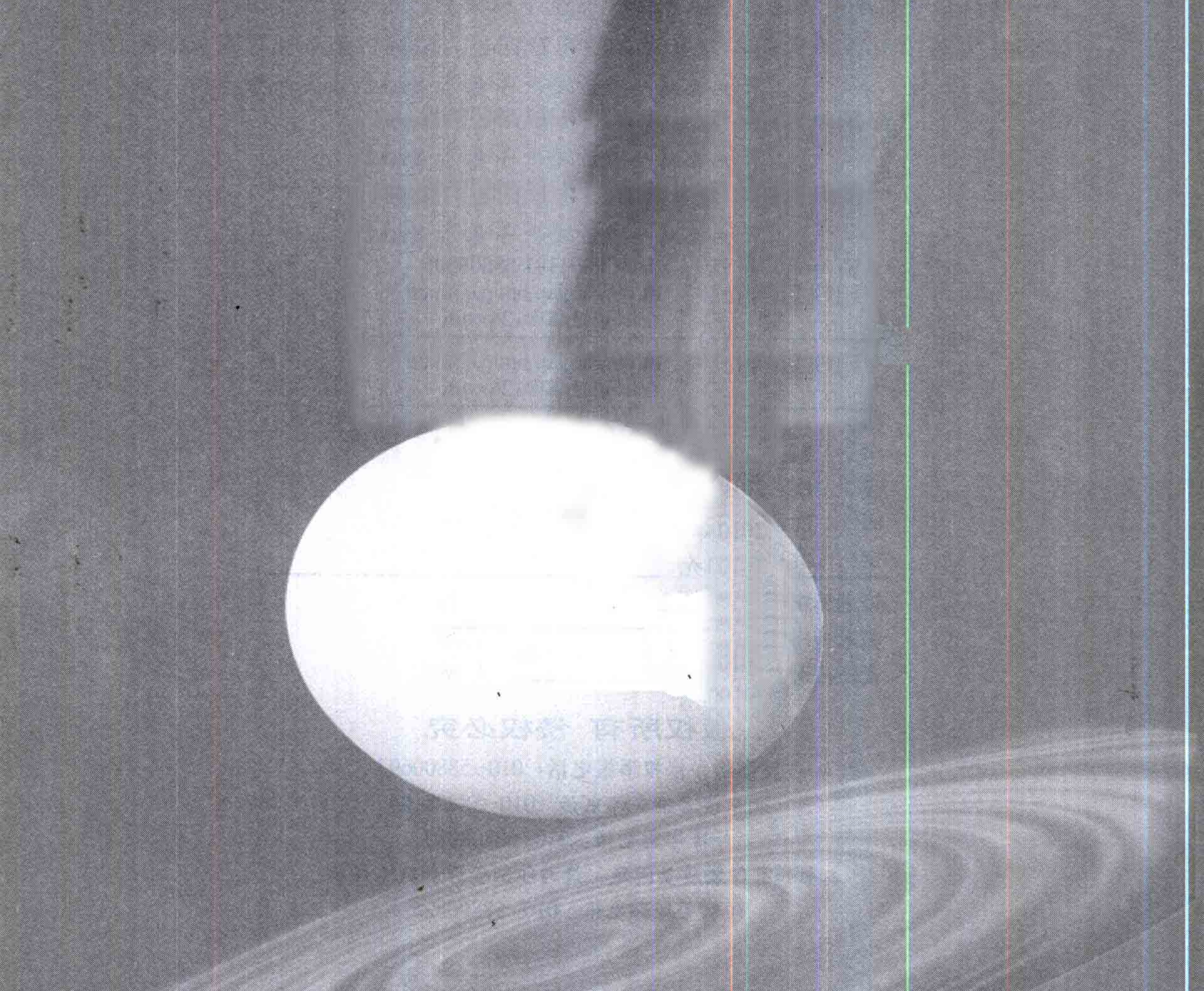
刘显钢 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

Research on
the electrodynamics
of moving bodies

动体电动力学研究

刘显钢 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

前　言

那是在一九七九年，我在北京大学无线电电子学系读一年级。《狭义相对论力学》作为《力学》课的选修章节，是老师布置给所谓“有能力的”同学自修的。自命不凡的我将书读了一遍后，发现《狭义相对论》并不像人们传说的那样难懂，无非是将三维空间加上一个速度限制后得到的一种四维表象，而且从理论的推导过程看，将限制速度定为光速完全是人为的，如果将这个限制速度定为音速，完全相同的推导过程可以得到形式上完全相似的理论表述，差别仅仅在于光速变成了音速！我曾经跟同学调侃：如果这种理论能够成立，就可以推导出“音速是宇宙间的最大速度”，在超音速飞机横行霸道的今天，得到这样的结论岂不荒谬！最终让我相信“限制速度是光速”的原因是 Bertozzi 实验。Bertozzi 用静电加速器加速电子，令人信服地证明了“用静电加速器加速电子，电子的速度最多只能达到光速，而不能超过光速”，从而被普遍认为是直接证明了爱因斯坦狭义相对论的“光速是最大速率”的推论。事情由此告一段落，为此我荣幸地被同学们冠以“大吹”的雅号。

这是在大学一年级发生的事情。到了三年级学习电动力学的时候，我发现电磁波的传播速度就是光速（本该在二年级学习电磁学的时候就知道电磁波的传播速度就是光速，不知道为什么，当时竟然没有特别注意此事），这意味着电磁场的传播速度就是光速，又使我想起了 Bertozzi 实验，疑问又来了：形象地说，电磁场是包裹着电子使其运动的，就像我们抱着篮球跑一样，我们跑的速度决定了篮球的运动速度，但不能说我们跑的最大速度就是篮球运动可以达到的最大速度！电磁场的传播速度是光速，电子加速器靠电磁场加速电

子，那么电子的运动速度不能超过光速是常人也能想象得到的结论，怎么能够拿来证明“光速是最大速率”这么深奥的学问呢？我将此问题请教了授课的西门纪业教授。西门教授说：这是一个非常好的问题，非常有道理，但是你要用纯经典的电磁学理论去证明“电磁波不可能将电子加速超过光速”。如果你能够证明这一点，那么 Bertozzi 实验就不能成为狭义相对论的证明性实验，也许狭义相对论在这一点上就会被你证明是不正确的。接着他又面带无奈地轻轻苦笑道：狭义相对论本身就是反常识的。

西门一番话，显钢二十年。从 1983 年到 2003 年，从知识准备到不断思考，最终在“非典”横行的那个清晨，在两天三夜反复修改之后，当我敲入论文的最后一个文字的时候，已经不知道是疲惫压抑住了兴奋，还是兴奋抵抗住了疲惫。在昏沉包裹的清醒中，我打开了中央电视台十频道，孤独沉寂的房间里立刻响起了清新的音乐，伴着音乐，女播音员热情爽朗的声音立刻驱逐了我的疲惫，湿润了我的眼睛：“今天是 2003 年 5 月 4 日，是北京大学诞辰 105 周年的日子，今天我们将要介绍的世界名校是北京大学……”所有的声音都模糊了，所有的视线都混沌了，我大学毕业快二十年了，在这个特殊的日子就要到来之际，我终于用纯经典的电磁学理论证明了“电磁波不可能将电子加速超过光速”这个常识！

论文是写出来了，发表它却并不容易。一位著名的相对论专家的话可能代表了他们普遍的想法。他是我非常尊敬的一位老教授，他十分仔细地看了我的论文，把他怀疑的地方都作了批注。当我把这些地方都解释清楚之后，他语重心长地说：“从理论推导上我没有发现问题，结论也符合常理。可能是我的水平不够，没有能够发现错误。但是狭义相对论发表快一百年了，其间有多少聪明脑袋反复考验过，我不相信会遗漏下这么简单的问题没有被解决。”（的确，别看我想了二十多年，最后难以置信地发现问题竟然如此的简单：问题的症结就是“粗心大意”，具体地说就是由库仑定律直接推导出的定理和公式的应用超出了适用范围。库仑定律原本仅仅是描述两个相对静止的电荷之间相互作用的规律，应用库仑定律以及由库仑定律直接推导出的任何定理和公式时都不能忘了“电荷相对静止”这个基本实验条件，这个条件决定了库仑定律以及相关定理和公式的适用范围。遗憾的是：自从库仑定律被理论物理学家引入电场强度的概念变换成为另一种形式之后，这个限制条件就被忘记了。电荷间的相互作用靠相对应的电磁场传送。在电荷间相对运动速度远小于电磁场的传播速度的情况下，不会发现这样应用库仑定律会存在问题；如果电荷间相对运动速度接近电磁场的传播速度时，这样应用库仑定律存在的问题便暴露无遗了。但是

在这样的时候，由于几百年形成的应用习惯和那些在低速条件下应用的成功经验，有几个人还能相信麦克斯韦方程组的第一个方程就存在适用条件的问题呢？有几个理论物理学家还能够承认这个方程的实验基础就是库仑定律呢？他们早就习惯和唯美地将那个电场强度的定义当成了电场问题的基础了）。这位著名老专家预言我的论文很难被发表。的确，在随后的两年，所有物理类的所谓“一级学术期刊”都婉言拒绝发表我的论文。但是，经过两年多的不断答辩，几经曲折，论文终于在二级学术期刊《重庆大学学报》（专刊）上发表了。这一年正好是狭义相对论发表一百周年，爱因斯坦逝世五十周年。次年我又将一篇题为《狭义相对论中的可变换假设与极限速率》的相关论文发表在《北京师范大学学报》上。

我带着登有我论文的《北京师范大学学报》去北京大学参加北京大学无线电电子学系（现称北京大学信息学院电子学系）七九级毕业二十五周年聚会，想把学报送给西门纪业老师，告诉他：我已经按照他的要求把问题解决了。遗憾的是西门教授已经在几年前就谢世了。我就把学报送给了曾经参与授予我“大吹”雅号的一位同学——曾经跟著名的朱经武教授一起研究超导的、现在本身就是很著名的电子物理学家，他居然一点也记不起这件事情了。

这件事对于我本人来说算是就此了结了。二十多年的青春时光浪费在梳理和更正这种无聊的“粗心大意”上实在是可惜。我想应该实践一下我的谋生能力了。别了，科学！

告别科学，却看到了蓬勃向上的中国。痛思良久，决定重新拿起笔，挤紧张谋生难得之闲暇，再拼上几年，权当消遣，遂将一百年前的那些老问题重新梳理一番，借爱因斯坦那篇著名论文之题目“动体电动力学”，加以“研究”二字，著书一册，让被相对论的光速禁锢的“蛋壳”世界里能有另外一种世外的声音，以期待科学的春天再次来临！

刘显钢

2008 年 9 月 15 日

目　录

第一章　电磁现象的规律与麦克斯韦方程组

本书讨论的是真空环境中带电的运动物体的电动力学，简称动体电动力学。在讨论动体电动力学之前，我们需要先简要回顾和点评一下被笔者称为“半静体电动力学”的经典电动力学的基本规律，以便在后面的章节里顺利地将静体电动力学部分地修正为动体电动力学(本章参考了虞福春、郑春开编写的《电动力学》的部分内容)。

第一节　真空中静止电荷的电场规律

本节从库仑定律这个基本实验规律出发，点评电场强度概念的引入，然后点评由库仑定律推导出的公式和定理。

1. 库仑定律

库仑定律(Coulomb's law)是法国物理学家查利·奥古斯丁·库仑(Charles Augustın de Coulomb)通过纽秤实验总结出来并于1785年发表的。它的文字表述如下：

库仑定律：真空中两个静止的点电荷之间的作用力与这两个电荷所带电量的乘积成正比，与这两个电荷间距离的平方成反比，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

在国际单位制下，库仑定律的数学公式为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{1.1.1}$$

式中，ε_0 是真空介电常数；q_1，q_2 是静止点电荷的电量；$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 分别为 q_1，q_2 的位置坐标矢量；$\boldsymbol{F}_{12}$代表 q_1 对 q_2 的作用力。

点评：注意我们对库仑定律文字表述中的“静止的”三个字加了着重号，意在提醒读者注意这三个字，这三个字决定了库仑定律的适用范围！

如果一个点电荷 q 位于 $\boldsymbol{r}$ 处，同时受到许多静止点电荷 q_1，q_2，…，q_n 的作用，那么 q 所受到的作用力是各个点电荷 q_i($i=1$，2，…，n)单独存在时对

q 作用力的矢量和，可以表示为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{1.1.2}$$

式中，$\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个点电荷的空间位置坐标矢量。使用这个公式时必须注意：(1)所有电荷必须是静止的；(2)所有电荷必须是点电荷。

2. 电场强度

如果在某空间的 $\boldsymbol{r}$ 处放置一个试探点电荷 q，它将受到该空间中原来已经存在的静止点电荷 q_1，q_2，…，q_n 的共同作用。如果在试探点电荷 q 加入后，所有电荷还能保持静止，那么 q 所受到的作用力由(1.1.2)式表示。将(1.1.2)式改写为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.3}$$

其中

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{1.1.4}$$

显然，在满足“在试探点电荷 q 加入后所有电荷还能保持静止”的条件下，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 可以完全不依赖试探电荷 q，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 是由源电荷 $q_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的大小及其位置 $\boldsymbol{r}_i$ 所决定的空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数，称为电场强度。

当 $n=1$ 时，(1.1.4)式就变成了单个点电荷 q_1 的电场公式，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{1.1.5}$$

对于连续的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$，计算空间某位置 $\boldsymbol{r}$ 的电场强度的(1.1.4)式可以改写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.1.6}$$

积分区域 V 包括全部电荷分布的区域。以上公式的更详细的推导和说明请参考大学电动力学教材。

点评：原来库仑定律(1.1.1)式表现出的静止点电荷间的超距离作用，在引入电场强度概念以后，变成了由(1.1.3)式表现的点电荷 q 受到它所在位置 $\boldsymbol{r}$ 处的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的近距离作用。正是由于(1.1.3)式表现出的这种简单美，使得某些理论物理学家们将它作为解决某些问题的出发点，而忘却了无论是对 q 还是对 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 内部形成的静止要求，使得对(1.1.3)式的应用超出了它的适用范围。因此，在解决涉及运动、尤其是高速运动的电荷的问题时，一定不能忘了(1.1.3)式对电荷 q 和对电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 内部的静止要求！

3. 高斯定理

高斯定理是一个以库仑定律为基础、联系麦克斯韦方程组的第一个方程的电动力学定理。它的文字表述为：穿过任意闭合曲面 S 的电通量等于该曲面所包围的电荷除以 ε_0。其数学表达式为

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.1.7}$$

(1.1.7)式的证明过程如下：

证明：令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\boldsymbol{S}$ 的外法向单位矢量，$\mathrm{d}\Omega$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 对 $\boldsymbol{r}'$点所张的立体角，有

$$\oiint_S \mathrm{d}\Omega=\begin{cases}4\pi & \text{当 } \boldsymbol{r}' \text{ 在 } S \text{ 面内}\\ 0 & \text{当 } \boldsymbol{r}' \text{ 在 } S \text{ 面外}\end{cases}$$

所以，将(1.1.6)式代入(1.1.7)式，有

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\iiint_{V_\infty}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\oiint_S\frac{\boldsymbol{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^3}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\oiint_S \mathrm{d}\Omega\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

式中，V_∞ 代表全空间；V 代表封闭面 S 所包围的体积。证毕。

点评：从高斯定理的证明过程可以看出，高斯定理是完全依赖库仑定律的，因此高斯定理的适用范围应该与库仑定律完全一致。所以，从严格意义上讲，高斯定理只适用于静止的电荷分布。

4. 真空中静电场的规律

根据亥姆霍兹定理，在一个有限区域内，如果某矢量场的散度和旋度处处已知，则该矢量场就能被唯一地确定。电场是矢量场，因此，知道电场的散度和旋度所遵循的规律，电场所遵循的规律也就清楚了。下面我们来求静电场的散度和旋度。

(1)静电场是有源场

(1.1.7)式是高斯定理的积分形式。利用矢量场论中的高斯定理可以得到

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V'=\iiint_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V' \tag{1.1.8}$$

由于对任意取的封闭面 S，(1.1.8)式都成立，所以必须要求被积函数相等，于是有

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)式为静电场高斯定理的微分形式。(1.1.9)式说明静电场是有源场，其散度等于$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$。

(2)静电场的无旋性

对任一闭合回路 O，作电场的环路积分，并把(1.1.6)式代入，得到

$$\begin{aligned}\oint_O \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_O \iiint_V \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\oint_O \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\oint_O \mathrm{d}\left(\frac{1}{R}\right) = 0\end{aligned}$$

这证明静电场满足

$$\oint_O \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.1.10}$$

(1.1.10)式是静电场无旋性的积分形式。利用斯托克斯定理，可以将上式左边的环路积分变为面积分：

$$\oint_O \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla\times \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.1.11}$$

其中 S 是以 O 为边界的任一曲面。由于对任意取的闭合回路 O 和以 O 为边界的封闭面 S，(1.1.11)式都成立，于是必有

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.1.12}$$

(1.1.12)式是静电场无旋性的微分形式。静电场的无旋性表明静电场是保守场。

我们将真空中体分布电荷产生的静电场的规律总结如下：

$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times \boldsymbol{E} = 0\end{cases} \tag{1.1.13}$$

只要给定空间的电荷分布，电场的散度和旋度就完全确定，再给定边界条件，电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$就可以被唯一地确定。

点评：到后面讨论麦克斯韦方程组的章节中，我们就会看到：方程组(1.1.13)中的第一个方程就是麦克斯韦方程组的第一个方程，方程组(1.1.13)

中的第二个方程加上涡旋电场部分后就成为了麦克斯韦方程组的第二个方程。从前面的讨论我们知道方程组(1.1.13)中的第一个方程只能应用于电荷静止的情况，所以麦克斯韦方程组的第一个方程也只能应用于电荷静止的情况，而麦克斯韦方程组的其他方程没有这个限制，这就是笔者将经典电动力学称为半静体电动力学的原因之一。因此，严格地讲，麦克斯韦方程组只有在产生电场的所有电荷都静止的参考系内才成立，在其他参考系内都是近似成立。而关于麦克斯韦方程组的洛伦兹协变性问题则与参考系内使用的测量系统的性质有关，这一点将在后面第四章“洛伦兹变换的实验意义”的“麦克斯韦方程组的洛伦兹协变性及其实验意义”中进行探讨。

第二节　真空中稳恒电流的磁场规律

本节从稳恒电流的概念开始，讨论安培定律、比奥-萨伐尔定律，点评稳恒电流激发磁场的基本规律及其性质。

1. 电流密度和电流连续性方程

当电荷做定向运动时，便形成电流。若以 ρ 表示电荷密度，$\boldsymbol{v}$ 表示电荷定向运动的速度，则可以定义电流密度为

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \tag{1.2.1}$$

$\boldsymbol{j}$ 和 ρ 都是空间位置和时间的函数。$\boldsymbol{j}$ 的方向代表电流流动的方向，它的数值表示在单位时间内流过垂直于电流方向的单位横截面积上的电量。通过曲面 S 的电流为

$$I = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.2.2}$$

实验证明：电荷是守恒的。在有电荷流动的区域内，任取一闭合曲面 S，根据电荷守恒定律，单位时间内从闭合曲面 S 内流出的电荷必然等于闭合曲面 S 所包围的体积 V 内相同单位时间内总电荷的减少量。即

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \mathrm{d}V = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

利用高斯定理 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{j}\mathrm{d}V$，有

$$\iiint_V \left(\nabla\cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = 0$$

因为上式对任意的区域 V 都成立，所以

$$\nabla\cdot j+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)式称为电流连续性方程，它是电荷守恒定律的数学表示式。

在稳恒电流条件下，电荷分布不随时间变化，即$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，则有

$$\nabla\cdot j=0$$

这就是稳恒电流应满足的条件，表明稳恒电流总是闭合的。

2. 安培定律

1820年，安培用实验研究两个电流闭合回路间相互作用的规律。他得到四个概念：(1)两个闭合回路中的一个闭合回路的电流反向后，作用力也反向；(2)将闭合回路的电流细分为电流元，则电流元应该是一个矢量；(3)作用力既与磁场垂直，也与电流元垂直；(4)电流元之间的作用力与其距离的平方成反比。并发表了以下公式：

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{F}_{12}=-kI_1I_2\boldsymbol{r}_{12}\left[\frac{2}{r_{12}^3}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2)-\frac{3}{r_{12}^5}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\right]$$

安培假设电流元之间的作用力满足牛顿第三定律，因此上式的积分式和微分式都满足牛顿第三定律。但是上式不能全部反映上述的四个概念。由于实验不可能用电流元来做，而是用闭合回路来做，作用力也是两个回路之间的总作用力，$\mathrm{d}^2\boldsymbol{F}_{12}$是倒推出来的，这样的公式很多，大数理学家Laplace参与给出了目前电动力学教材中常用的形式：

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{F}_{12}=k\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{1.2.4}$$

式中，k是常量，在国际单位制中$k=\mu_0/4\pi$。(1.2.4)式表示电流元$I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$对电流元$I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$的作用力$\mathrm{d}^2\boldsymbol{F}_{12}$。只需将上式中的下标1和2交换，就得到电流元$I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$对电流元$I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$的作用力$\mathrm{d}^2\boldsymbol{F}_{21}$的公式。上述结果与库仑定律比较，电流元之间的作用力也是与其距离的平方成反比的，但是作用力方向不一定在电流元的连线上，说明此公式给出的电流元之间的作用力不一定严格满足牛顿第三定律。但是可以证明由此公式积分导出的两个闭合回路之间的作用力是严格满足牛顿第三定律的。

证明：因为闭合回路1对闭合回路2的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_2\oint_1\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{1.2.5a}$$

闭合回路2对闭合回路1的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_1\oint_2\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{21})}{r_{21}^3} \tag{1.2.5b}$$

式中，$\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_{21}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$，即 $\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{r}_{21}$。

根据矢量公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$，和 $\nabla\dfrac{1}{r_{12}}=-\dfrac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}$，$\oint_O \mathrm{d}\left(\dfrac{1}{r}\right)=0$，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\oint_2\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)\\
&= \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\left[\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_2\left(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\nabla\frac{1}{r_{12}}\right)-\oint_2\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]\\
&= \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\left[-\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_2 \mathrm{d}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)-\oint_2\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right]\\
&= -\frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\oint_2\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}
\end{aligned}
$$

同样的过程也可以得到

$$
\boldsymbol{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\oint_2\oint_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}
$$

因为 $\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{r}_{21}$，所以 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$。证毕。

3. 比奥-萨伐尔定律

同是在 1820 年，比奥和萨伐尔用无穷长载流直导线做实验，研究电流产生磁场的规律，结合他们以及安培的实验结果，得到

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1.2.6}
$$

(1.2.6)式就是比奥-萨伐尔定律的数学表示式。对其积分得到

$$
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{1.2.7}
$$

(1.2.7)式就是磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 的定义式。与电场强度概念类似，安培定律所表示的电流元之间的远距离作用在引入(1.2.7)式后就变成了电流元在其所在位置受到的另外的电流元在此位置产生的磁场的近距离作用。在此定义下，安培力可表示为

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.8}
$$

其积分形式为

$$
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \tag{1.2.9}
$$

4. 真空中稳恒电流的磁场规律

从(1.2.7)式看到，只要知道电流密度分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$，就可以得到磁感应强度

分布 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$。求真空中稳恒电流的磁场规律就是求磁感应强度分布 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 的散度方程和旋度方程。

由(1.2.7)式，令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，注意到 $\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\nabla\frac{1}{R}$，有

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}=\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')+\frac{1}{R}\nabla\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\frac{1}{R}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\nabla\times\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\\&=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

因为 ∇ 是对不带撇变量微商，所以有上面的 $\nabla\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$ 和积分号可以与 ∇ 变换位置。引入磁场的矢量势，简称磁矢势。

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{1.2.10}$$

于是有

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.2.11}$$

即：磁感应强度是磁矢势的旋度。根据矢量场论，$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.2.12}$$

同样根据矢量场论：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

将(1.2.10)式代入，得到

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\nabla\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'-\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\ \nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V'\right] \tag{①}$$

利用 $\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}$，及稳恒电流条件 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$，和高斯定理，以及积分区域遍布了所有电流存在的空间形成的边界条件 $\boldsymbol{j}=0$ 或 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}=0$，上面①式右边第一项的体积分

$$\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=-\iiint\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'=-\oint\!\!\!\oint_S\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}}{R}\mathrm{d}S=0 \tag{②}$$

利用 $\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，①式右边第二项

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\ \nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=-\mu_0\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=-\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{③}$$

将②式、③式的结果代入①式，令 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$，得到

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{1.2.13}$$

利用矢量分析中的高斯定理和斯托克斯公式可以得到

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V=0 \tag{1.2.14}$$

$$\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\nabla\times\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mu_0\iint\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mu_0 I \tag{1.2.15}$$

最后将体电流分布的稳恒电流的磁场规律总结如下：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}\end{cases} \tag{1.2.16}$$

第三节　真空中的麦克斯韦方程组

本节介绍麦克斯韦方程组的导出过程，点评其适用范围。

1. 法拉第电磁感应定律和涡旋电场

1820 年，奥斯特发现电流的磁效应后引起轰动，电与磁之间有什么内在的联系成为当时科学研究的热点。安培、比奥、萨伐尔研究电流产生磁场的规律，而法拉第则探讨磁能否产生电流的问题。法拉第通过实验发现：当通过一个线圈的电流发生变化时，在其邻近的另一个线圈中的电流也会发生变化；或通过一个线圈的磁通量发生变化时，在这个线圈中会产生电流。这种由于磁通量变化而产生的附加电流称为感生电流，这种现象称为电磁感应现象。通常电路中电流的产生是由电源的电动势引起的。既然变化的磁场能够引起线圈中电流的变化，在这一点上，它的作用相当于电动势，即变化的磁场在线圈中产生了感生电动势。经过十余年研究，法拉第终于从实验中总结出、并在 1831 年发表了他的著名的电磁感应定律：任一闭合回路上的感生电动势与穿过它的磁通量随时间的变化成正比。其数学表示式为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.3.1}$$

式中，S 代表以闭合回路 O 为周界的任一曲面，曲面的法向由回路 O 的右手螺旋方向确定，式中的负号是按楞次定律规定的。楞次定律指出：感生电流的方向应使其产生的磁通量抵抗原来穿过回路的磁通量的变化。这种方向的规定实际上反映了能量守恒定律。

因为电流是电荷在电场驱动下发生定向运动而产生的，所以电磁感应现象