文登教育
Wendeng Education

2012

文登教育集团推荐用书

（理工类）

考研数学最后冲刺
解题思维定势与技巧

修订版

陈文灯 主编

本书重要提示：

- 数学要考高分，会做是不够的，解题速度至关重要！
- 本书旨在介绍快速解题技巧，以提高解题效率为核心，使您运筹帷幄，决胜考场！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育

Wendeng Education

2012

文登教育集团推荐用书

（理工类）

考研数学最后冲刺解题思维定势与技巧

修订版

陈文灯 主编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺解题思维定势与技巧:理工类 / 陈文灯主编.
—北京:北京理工大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5640-4711-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 124050 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 15.75
字　　数 / 332 千字
版　　次 / 2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.80 元

责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

针对考研数学试卷题量、计算量大，概念性、综合性强，技巧性高等特点，我们编写了《数学最后冲刺解题思维定势与技巧》一书。这是一本适用于复习完《数学复习指南》《数学题型集粹与练习题集》之后，在临考前复习使用的备考练习用书，可助同学们一臂之力，夺取高分。

本书特点：

(1)针对性、实用性强。将常考题型归纳成思维定势，使同学们遇到类似题型可快速找到解题突破口。

(2)方法巧妙，具有普遍性、规律性，易于掌握。变量替换、辅助函数作法是数学解题中的高难度、高技巧性解题方法。通过我们的讲解可以化难为易，轻轻松松地掌握中值定理证明中以及不等式证明中辅助函数的作法。

(3)介绍了许多快速解题的方法。数学要考高分，只是会做是不够的，还要求有速度。我们归纳总结了许多其他书中所没有的方法和技巧，这些方法和技巧可以大大提高解题速度并降低失分率。

(4)精选了许多综合题。由于篇幅所限，许多综合题没有作分析，但同学们通过看详细解答过程完全可以触类旁通。

陈文灯

2011 年 8 月

目　录

第一篇　高等数学串讲

第一讲　高等数学解题的五种思维定势

第一句话:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导时,"不管三七二十一",把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数,三阶可导函数 $f(x)$ 满足等式:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$. 求证:

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim_{x\to\infty}f''(x)=0.$$

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\xi_1\in(x,x+1), \quad ①$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\xi_2\in(x-1,x). \quad ②$$

① + ② 得,$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$, ③

① − ② 得,$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$. ④

当 $x\to\infty$ 时,$\xi_1\to\infty,\xi_2\to\infty$,于是有

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=2C-2C+\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的二阶导数,$f(0)=f(1)=0$,并且当 $x\in[0,1]$ 时,$|f''(x)|\leqslant A$,求证:$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2},x\in[0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式,即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x_0\text{ 之间}.$$

取 $x=0,x_0=x$,则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},0<\xi_1<x\leqslant1, \quad ①$$

取 $x=1,x_0=x$,则

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},0<x<\xi_2<1. \quad ②$$

②－①得 $f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

由 $|f''(x)|\leqslant A, x\in[0,1]$，得 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1)\leqslant\frac{A}{2}$（因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2x^2-2x+1\leqslant 1$）.

【例 3】 试证：若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f(0)=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，$f'(0)=0$. 又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故

$$u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

从而

$$|u_n|=\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}(n\to\infty).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$，函数 u 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续，证明：$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$.

【证明】 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$，所以由上式得 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 令 $x=u(t)$，则

$$f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0].$$

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]=af(x_0).$$

故

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

第二句话： 在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$. 证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分中值定理}} 2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)f(\eta)=f(\eta),\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1.$

于是 $f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理条件,所以存在 $\xi_1\in(\eta,2)$,使得 $f'(\xi_1)=0$, ①

又 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上满足罗尔定理条件,于是存在 $\xi_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,使得 $f'(\xi_2)=0$. ②

由 ①,② 可知 $$f'(\xi_1)=f'(\xi_2).$$

于是对 $f'(x)$ 在$[\xi_2,\xi_1]$上使用罗尔定理,证得存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$,使得 $f''(\xi)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是非负、单调递减的连续函数,且 $0<a<b<1$,证明:
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 由积分中值定理知
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\xi_1\in[0,a],$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\xi_2\in[a,b].$$

于是 $$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【另证】 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

记 $F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}x-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在$[0,a]$上可导,且
$$\begin{aligned}F'(x)&=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)\\&=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)\\&=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant0(\text{由于 }f(x)-f(t)\geqslant0,f(x)\geqslant0).\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增,又 $F(0)=0$,故

$F(a)>F(0)=0$,即 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 由此证得$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续的导数,且 $f(a)=f(b)=0,M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

【证明】 对于 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x$,所以
$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$
同样由 $f(b)=0$ 可得 $|f(x)|\leqslant(b-x)M$.

于是 $$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\,dx$$
$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\,dx=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M,\text{即}\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M.$$

【例 8】 已知在$[0,a]$上$|f''(x)|\leqslant M$，且$f(x)$在$(0,a)$内取最大值，试证：
$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证明】 由题设知存在$c\in(0,a)$，使得$f(c)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}f(x)$，于是由费马定理知$f'(c)=0$.对$f'(x)$在$[0,c]$与$[c,a]$内分别应用拉格朗日中值定理，有
$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,0<\xi_1<c,$$
$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),0<\xi_2<a.$$

于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c),$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的$f''(x)$，且$f''(x)<0$，$f(a)=f(b)=0$，则在(a,b)上$f(x)>0$，且
$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由$f''(x)<0$可知，$f(x)$在$[a,b]$上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$y=f(x)(x\in(a,b))$的图形位于连接$(a,f(a))$，$(b,f(b))$的线段之上，而此线段所在直线为$y=0$（x轴），所以在(a,b)上$f(x)>0$.由此可知，存在点$c\in(a,b)$，使得$f(c)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.由拉格朗中日值定理知，
$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a),\text{即}f'(\xi_1)=\frac{f(c)}{c-a},\xi_1\in(a,c),$$
$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c),\text{即}f'(\xi_2)=-\frac{f(c)}{b-c},\xi_2\in(c,b).$$

于是 $$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{f(c)}\int_a^b|f''(x)|\,dx>\frac{1}{f(c)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\,dx$$
$$=-\frac{1}{f(c)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\,dx=\frac{1}{f(c)}\int_{\xi_2}^{\xi_1}f''(x)\,dx=\frac{1}{f(c)}[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$
$$=\frac{1}{f(c)}\left[\frac{f(c)}{c-a}+\frac{f(c)}{b-c}\right]=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$
$$=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}\geqslant(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式$f(u)$再说.

【例 10】 求下列函数的导数（设$f(u)$是u的连续函数）：

(1)$F(y)=\int_0^y f(x-y)\,dx$，求$F'(y)$；

(2) $F(x)=\int_0^{x^2} tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_0^1 f(t\mathrm{e}^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(4) $F(x)=\int_0^{x^2} xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

【解】 (1) 由 $F(y)\xlongequal{令\,u=x-y}\int_{-y}^{0} f(u)\mathrm{d}u$ 得 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

(2) 由 $F(x)\xlongequal{令\,u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=-x\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u+\int_x^{x-x^2}uf(u)\mathrm{d}u$ 得

$$F'(x)=-\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u-x[f(x-x^2)\cdot(1-2x)-f(x)]+(x-x^2)f(x-x^2)(1-2x)-xf(x)$$

$$=\int_{x-x^2}^{x}f(u)\mathrm{d}u+x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) 由 $F(x)\xlongequal{令\,u=t\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u$ 得

$$F'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x=f(\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\mathrm{e}^x}f(u)\mathrm{d}u.$$

(4) 由 $F(x)\xlongequal{令\,u=x+t}x\int_x^{x+x^2}f(u)\mathrm{d}u$ 得

$$F'(x)=\int_x^{x+x^2}f(u)\mathrm{d}u+x[f(x+x^2)\cdot(1+2x)-f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 二阶可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{令\,u=t-x}\int_{-x}^{0}(u+x)f(u)\mathrm{d}u$

$$=-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u.$$

于是所给等式变为 $\quad x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u.$

两边对 x 求导，得 $\quad 1=f(x)-(-x)f(-x)\cdot(-1)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)\cdot(-1).$

即 $\quad 1=f(x)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u.$

上式两边对 x 求导，得 $\quad 0=f'(x)-f(-x)\cdot(-1)$，

即 $\quad f'(x)=-f(-x).$ ①

上式两边对 x 求导，得 $\quad f''(x)=f'(-x).$ ②

由 ①② 得 $\quad f''(x)=-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=0$.

解此方程得 $\quad f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

注意到 $f(0)=1, f'(0)=-1$，故 $f(x)=\cos x-\sin x$.

第五句话：在证明文字不等式时，“不管三七二十一”，将出现两次或两次以上的某个文字或数字改写成变量 x，转化成函数不等式再说.

【例 12】 当 $e < a < b < e^2$ 时，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ 成立.

【解】 将 b 改写成变量 x，得到函数不等式：

$$\ln^2 x - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(x-a)\,(a < x < e^2).$$

为此作辅助函数 $$F(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a),$$

则 $F(x)$ 在 $[a, e^2]$ 上可导，且 $$F'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}.$$

显然 $F'(x)$ 在 $[a, e^2]$ 上可导，且

$$F''(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2} < 0, F'(e^2) = 0.$$

所以 $F'(x) > 0\,(x \in [a, e^2])$，于是对于 $e < a < b < e^2$ 有

$F(b) > F(a)$，即 $\ln^2 b - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(b-a) > 0$. 由此证得 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

【例 13】 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0) = 0, f'(x) \geqslant 0, g'(x) \geqslant 0$，则对任意 $a \in [0,1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

【解】 将 a 改写成变量 t 得到函数不等式：

$$\int_0^t g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(t)g(1).$$

为此作辅助函数

$$F(t) = \int_0^t g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(t)g(1),$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且

$$F'(t) = g(t)f'(t) - f'(t)g(1) = f'(t)[g(t) - g(1)] \leqslant 0,$$

所以，对于 $a \in [0,1]$ 有 $F(a) \geqslant F(1)$，即

$$\begin{aligned}
&\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(a)g(1)\\
&\geqslant \int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(1)g(1)\\
&= \int_0^1 [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x - f(1)g(1)\\
&= f(1)g(1) - f(0)g(0) - f(1)g(1) = 0.
\end{aligned}$$

由此证得 $$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

第二讲　快速解题型

§1　函数极限运算中的快速解题型

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式快速计算法

【解题提示】　利用等价无穷代替可快速求得$\frac{0}{0}$型未定式的极限.下列等价无穷小是常用的:当 $x \to 0$ 时,

(1)$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$;
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0), 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

(2)$\int_0^x \cos t dt \sim x, \int_0^x \sin t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \tan t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \arctan t dt \sim \frac{1}{2}x^2$,
$\int_0^x \arcsin t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \ln(1+t) dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x (e^t - 1) dt \sim \frac{1}{2}x^2$.

注意:乘除运算可用等价无穷小代替,加减运算不宜使用.

【例 1】　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x \cdot \arctan 5x}{\ln(1+2x) \cdot \arcsin x}$.

【解】　原式$\xlongequal[\ln(1+2x)\sim 2x, \arcsin x - x]{\sin 3x \sim 3x, \arctan 5x \sim 5x} \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x \cdot 5x}{2x \cdot x} = \frac{15}{2}$.

【例 2】　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \arcsin t dt\right)^2}{\int_0^x \arctan t dt \cdot \int_0^x \sin t dt}$.

【解】　原式$\xlongequal[\int_0^x \arctan t dt \sim \frac{x^2}{2}, \int_0^x \sin t dt \sim \frac{x^2}{2}]{\int_0^x \arcsin t dt \sim \frac{x^2}{2}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = 1$.

【例 3】　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}$.

【解】　当 $x \to 0$ 时,$\arcsin x \sim x$,分子中的 $\arcsin x$ 不能用其等价无穷小 x 代替.

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \arcsin x}{x^3} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

二、1^∞ 型未定式快速计算法

【解题提示】　设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$,则 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}$ 是 1^∞ 型未定式.

由于 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1+f(x)]}\xlongequal{\ln[1+f(x)]\sim f(x)}e^{\lim g(x)f(x)}$，所以 1^{∞} 型未定式的极限型是，其底为 e，其幂等于括号中 1 后的变量 $f(x)$（包括符号）与括号右上角的方幂 $g(x)$ 乘积的极限.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{2}{\tan x}}$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to0}(-\sin x)\cdot\dfrac{2}{\tan x}\xlongequal[\tan x\sim x]{\sin x\sim x}\lim\limits_{x\to0}(-x)\cdot\dfrac{2}{x}=-2$，所以原极限 $=e^{-2}$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{x^2}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x^2+3}\right)^{x^2}=e^{-6}\left(因为\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{6}{x^2+3}\right)x^2=-6\right)$

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$，而

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot(1+\sin x)}\cdot\frac{1}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}\right]=\frac{1}{2},$$

故原极限 $=e^{\frac{1}{2}}$.

三、$x\to\infty$ 时，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的快速计算法

【解题提示】 当 $x\to\infty$ 时，若 $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\text{ 中 }x\text{ 的最高次幂项}}{g(x)\text{ 中 }x\text{ 的最高次幂项}}.（所谓“抓大头”法）$$

【例 7】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(100x^{50}-2x^2+5)}{\ln(2x^{10}+x^3-1)}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(100x^{50})}{\ln(2x^{10})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln100+50\ln x}{\ln2+10\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{50\ln x}{10\ln x}=5$.

【例 8】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})]$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(-2)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot(-2)}{8x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}.$$

§2 数列极限计算中的快速解题型

一、用夹逼定理来计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$

【解题提示】 适当缩小、放大$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$，使得$y_n\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则由夹逼定理得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=A$.

【例 9】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】 由于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

并且 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=1\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

所以由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

【例 10】 设$x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 对x_n作适当缩小与放大，然后利用夹逼定理，为此记

$$f_n(x)=\frac{1}{(n^x+1)^{\frac{1}{x}}},$$

则当$x>0$时，

$$f'_n(x)=f(x)\left[\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\cdot\frac{n^x\ln n}{n^x+1}\right]>f(x)\left(\frac{1}{x^2}\ln n^x-\frac{1}{x}\ln n\right)=0,$$

即$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加，所以x_n和式的各项中，第一项$\dfrac{1}{n+1}$最小，第n项$\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$最大，因此有

$$\frac{n}{n+1}<x_n<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}(n=1,2,\cdots),$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$,所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

二、用单调有界定理计算由递推式定义的数列极限

【解题提示】 设数列$\{x_n\}$,$x_0=a,x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$,它的极限往往先用单调有界定理判别其存在性,然后对递推式令 $n\to\infty$ 取极限得一个方程,解此方程即得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值,在判断$\{x_n\}$ 的单调性时可使用以下结论:

将递推式中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)$,如果 $f'(x)\geqslant 0$,则当 $x_0\geqslant x_1$ 时,$\{x_n\}$ 单调不增;当 $x_0\leqslant x_1$ 时,$\{x_n\}$ 单调不减.

【例 11】 设 $x_0=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=0,1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 由题设知 $x_n>0(n=0,1,2,\cdots)$,所以$\{x_n\}$ 有下界,记

$$f(x)=\sqrt{6+x}(x>0),$$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{6+x}}>0$,此外,$x_0=10,x_1=4$,即 $x_0>x_1$,所以$\{x_n\}$ 单调减少.因此由"单调减少有下界数列有极限"知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,记为 a.在递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限得

$$a=\sqrt{6+a},\text{解此方程得 } a=3,\text{所以}\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

【例 12】 设 $x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=0,1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 由题设知 $x_n>0(n=0,1,2,\cdots)$,此外

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{2+x_n}<2(n=0,1,\cdots),$$

所以$\{x_n\}$ 有界(即既有下界,也有上界).

记 $f(x)=\dfrac{2(1+x)}{2+x}(x>0)$,则 $f'(x)=\dfrac{2}{(2+x)^2}>0$,此外

$$x_1-x_0=\frac{2(1+x_0)}{2+x_0}-x_0=\frac{2-x_0^2}{2+x_0}\begin{cases}\geqslant 0,0<x_0\leqslant\sqrt{2},\\ <0,\quad x_0>\sqrt{2},\end{cases}$$

所以,当 $x_0\in(0,\sqrt{2}]$ 时,$x_0\leqslant x_1$,从而$\{x_n\}$ 单调不减;当 $x_0\in(\sqrt{2},+\infty)$时,$x_0>x_1$,从而$\{x_0\}$ 单调减少.

于是,对于 $x_0>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,记为 a,在递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限得 $a=\dfrac{2(1+a)}{2+a}$,解此方程得 $a=\sqrt{2},-\sqrt{2}$(不合题意,舍去),所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【例 13】 设 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x),F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5,x_0>0,x_{n+1}=F(x_n,2x_n)(n=0,1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 先求数列$\{x_n\}$ 的递推式.

由题设知 $\dfrac{1}{2}f(y-1)=\dfrac{y^2}{2}-y+5=\dfrac{1}{2}[(y-1)^2+9]$,即 $f(u)=u^2+9$,所以

$F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)=\dfrac{1}{2x}[(y-x)^2+9]$,从而,数列$\{x_n\}$ 的递推式为

$$x_0>0,x_{n+1}=F(x_n,2x_n)=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{9}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots).$$

由递推式可知，$x_{n+1}\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{9}{x_n}}=3(n=0,1,2,\cdots)$.

记 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)(x\geqslant 3)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\frac{x^2-9}{2x^2}\geqslant 0$，

此外，$x_2-x_1=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{9}{x_1}\right)-x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{x_1}-x_1\right)=\frac{9-x_1^2}{2x_1}\leqslant 0$，因此$\{x_n\}$单调不增，有下界，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记值为$a$，对递推式两边令$n\to\infty$取极限得

$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{9}{a}\right)$，即 $a=3$，-3(不合题意，舍去)，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

§3　导数运算中的快速解题型

一、利用导数的定义求极限

【解题提示】 导数的定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{ 或 }f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

设 $f'(x_0)$ 存在，如果分子的“被减式”的对应符号内的式子减去“减法”的对应符号内的式子恰等于分母，则极限就等于 $f'(x_0)$；如果以上条件不满足，则凑分母使之满足，例如：设 $f'(x_0)$ 存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=x_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)-x_0}=f'(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)-x_0}\cdot\frac{\varphi(x)-x_0}{x-x_0}=f'(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-x_0}{x-x_0}.$$

【例 14】 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}=$________；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=$________(设 $f'(x_0)\neq 0$).

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(x_0)$；

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}}=-\frac{1}{f'(x_0)}$.

【例 15】 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^3\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，令 $F(x)=f[\varphi(x)]$，求 $F'(0)$.

【解】 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\cos\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\cos\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^3\cos\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\cos\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^3\cos\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)=f'(0)\cdot 0=0.$$

【例 16】 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

【解】 当 $h\to 0$ 时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$，且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数，又注意到分母的导数 $2h\neq 0(h\to 0$，但 $h\neq 0)$，故由洛必达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=f''(x).$$

【注意】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=f''(x)$ 是由导数快算法得到的，而不是由洛必达法则得到的.

二、利用导数定义求函数在某点处的导数

【解题提示】 要计算函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数，有时利用导数定义可以快速地求得.

【例 17】 求下列函数在指定点处的导数：

(1) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，求 $f'(-2)$；

(2) 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求 $f'(0)$.

【解】 (1)
$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+100)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}x(x+1)(x+3)\cdots(x+100)=2\cdot 98!$$

(2)
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{2bx}\cdot 2b=2b\varphi'(a).$$

三、由同一中间变量构成的复合函数的微分法

【解题提示】 令该中间变量为 u，然后用复合函数求导的连锁法则求导.

【例 18】 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}$；

(2) $y=(\arccos x)^2\left(\ln^2\arccos x-\ln\arccos x+\dfrac{1}{2}\right)(|x|<1)$.