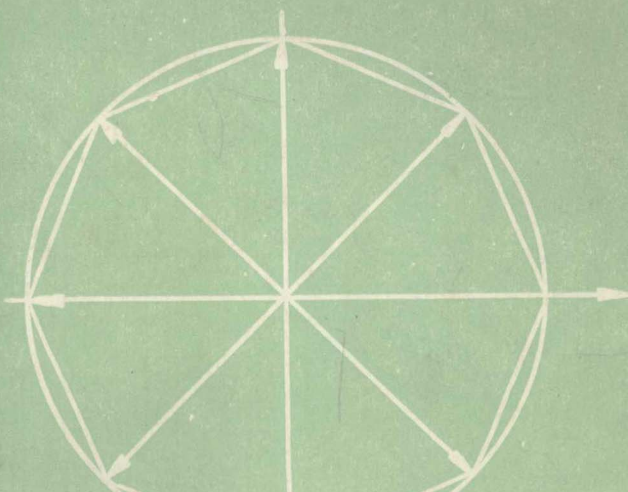
高中数学自测训练

代数

编著者：《高中数学自测训练》编写组



$$\omega^1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7=?$$

上海翻译出版公司

高中数学自测训练

（代　数）

顾　问　　苏步青

主　编　　黄松年

编著者　　《高中数学自测训练》编写组

上海翻译出版公司

高中数学自测训练

代　　数

黄松年　主编

上海翻译出版公司

（上海复兴中路 597 号　邮政编码 200020）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 16.5　字数 400,000

1991 年 6 月第 1 版　1991 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—15,000

ISBN 7-80514-683-7/O·87　　定价：5.50元

内 容 提 要

本书是结合高中数学(代数)课内外学习的自测练习读物,按教材每章的节单元来撰写的,完全和课堂教学同步. 每节单元有【内容提要】和典型性【范例】,有及时帮助领会课内知识的【想想练练】,有针对实际使知识能力得到巩固、熟练和运用的【自测练习题】,在每章结束时,还有对全章内容的【复习】和【自我测试题】便于读者针对自己学习水平进行评估.

本书完全根据高中代数教学大纲及教材的内容和体系撰写的. 所精选的范例和习题既与教材同步又不和教材重复. 为了做好初高中代数知识的衔接,在学习高中代数以前,特编写了"初中代数的复习和补教内容"以便学生能系统地循序渐进地学好高中代数的知识. 本书是伴随教师的教和学生的学,促进课堂教学质量不断提高的一本好读物.

前　言

数学是一门基础学科，全面提高学生的数学水平，是大家极为关注的问题．为了适应不同层次和不同水平的学生课内外学习的需要，我们特编著一套《高中数学自测训练》，敦请数学界老前辈、著名数学家苏步青教授为顾问，邀请长期从事高中数学教学工作并有丰富经验的上海市著名中学数学教师、特级教师、高级教师等10余人组成编写组，由黄松年同志为主编，撰写《代数》、《几何》（包括立体几何和解析几何）、《三角》和《高中数学综合训练》共四册．在编写前集大家的智慧和经验，多次讨论编写意图、编写提纲和编写方式，为了与现行课本和课堂教学完全同步，特按每篇章的节单元编写．

在每章的开始，先有【学习导引】扼要叙述本章的知识结构、能力要求、教材的重点、难点和关键．然后按节单元撰写，每节有【内容提要】简述本节的知识内容、有关的思想方法和应注意的问题．【范例】针对本节的知识结构与能力要求精编典型例题，范例中一般有"分析"——研究解题思路；"解法"——由因导果叙述解题过程；"说明"——揭示解题规律和思想方法，剖析常见的错误．【想想练练】主要用以巩固基本概念、掌握基本技能、提高学习兴趣．【自测练习题】是用以配合教材、加强基础、发展智力、培养能力的练习题，题型新颖、灵活、多样．其中A组题是由一些对双基的理解、掌握和简单运用的形成性的基础题所组成，通过对本组题的训练，以求达到高中毕业数学的合格水平，并力求培养学生的学习毅力和信心，在知识与能力上步入"懂"和"会"的境界，对学习后进的学生如同雪中送炭．B组题是由一些对双基和能力综合运用的总结性的提高题所组成，通过本组题的训练，以求达到高中毕业数学学习的优秀水平，并力求激发学生的刻苦钻研精神，使之对知识与能力能灵活运用、融会贯通，进入"熟"和"活"的境界，对基础较好的学生如同锦上添花．在每章后面，有对本章知识与能力进行简单小结的【复习】．最后还配备了对本章教学内容进行学习效果检查的【自我测试题】，也分A、B两组，A组着重基础测试，B组则予以适当提高，供不同层次和水平的学生进行自我评估．因此本书的出版将伴随高中师生顺利地完成数学教学任务．

代数分册内容包括有：一、初中代数的复习，由柴志洪同志撰写；二、二次函数的图象和性质与一元一次不等式，由顾慧娟同志撰写；第一章幂函数、指数函数和对数函数，由孙兆桂同志撰写；第二章不等式，由李汉云同志撰写；第三章数列与数学归纳法，其中"数列"由杨安澜、李家元同志撰写，"数列的极限"由黄松年、李家元同志撰写，"数学归纳法"由朱云清同志撰写；第四章复数由杨安澜同志撰写；第五章排列、组合与二项式定理，由滕永康同志撰写．顾慧娟、李家元同志对有关章的习题进行了核查．邵龙章同志对有关章节进行了认真的审稿和修改．黄松年同志对全书进行了审定，对某些章节内容作了修改、删节和补充．

本编写组顾问、著名数学家苏步青教授，长期以来对中小学基础教育十分关注，对本套书的编写给予热情的支持，在编写思想和编写方式等方面曾提出既中肯又精辟的建议，给编写组全体同志以莫大的鼓励和教育，谨表示崇高的敬意和感谢．

《高中数学自测训练（代数）》虽经编写组认真编写，但因限于水平，肯定有不足之处，敬希广大读者予以指正．

《高中数学自测训练》编写组

1990年7月

目　　录

初中代数的复习与补教内容

一、初中代数的复习……1
　1．实　数……1
　2．代数式……3
　3．指数与对数……7
　4．代数方程……9
　5．函　数……15
　6．解三角形……17
二、二次函数的图象和性质与一元一次不等式组……21
　1．二次函数的图象和性质……21
　2．一元一次不等式组，$|x|>a$，$|x|<a$ 型不等式及一元二次不等式……29

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集　合……37
二、映　射……45
三、函　数……50
四、幂函数……54
五、函数单调性和奇偶性……60
六、一一映射、逆映射和反函数……65
七、指数函数和对数函数……73
八、指数方程和对数方程……79

第二章　不　等　式

一、不等式的证明……89
　1．不等式、不等式的性质……89
　2．不等式的证明……94
二、不等式的解法……101
　1．不等式的解法……101

2. 含有绝对值的不等式 ……108

第三章 数列与数学归纳法

一、数　列……117
1. 数　列 ……117
2. 等差数列 ……122
3. 等比数列 ……129
二、数列的极限……136
三、数学归纳法……146

第四章 复　数

一、复数的概念……153
1. 数的概念的发展、复数的有关概念……153
2. 复数的向量表示 ……157
二、复数的运算……161
1. 复数的加法与减法 ……161
2. 复数的乘法与除法 ……166
三、复数的三角形式……171
1. 复数的三角形式 ……172
2. 复数的三角形式的运算 ……179
3. 复数的开方 ……187

第五章 排列、组合与二项式定理

一、排列与组合……199
1. 加法原理与乘法原理 ……199
2. 排列与排列数公式 ……202
3. 组合与组合数公式 ……207
4. 组合数的两个性质 ……214
二、二项式定理……218
1. 二项式定理 ……218
2. 二项式系数性质 ……223
答案……229

初中代数的复习与补教内容

一、初中代数的复习

1. 实　　数

【内容提要】

1．实数的分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

2．数轴：规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴．

数轴上的每一个点都可表示为一个实数；反之，每一个实数都可在数轴上找到一个表示它的点．数轴上的点越往右，它所表示的实数越大．

3．绝对值：

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

绝对值相同而符号相反的两个数叫做互为相反数，零的相反数是零．

4．在实数范围内加、减、乘、除(除数不为零)、乘方运算总能实施，而开方运算有时不能实施(如负数不能开偶次方)．

注意： 非负数的算术平方根和实数的绝对值都是非负数．

5．科学计数法：对任意一个正实数 N 总可记为 $N=a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 为整数．

【范例】

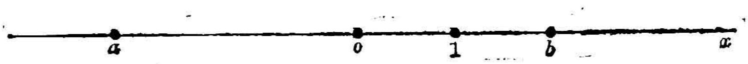
例 1 计算：

$$\{[-2^2\div(-2)^2-3^3\div(-3)^3]\times(-5)^0\}-\sqrt{(-2)^2}$$

解： 原式 $=\{[-4\div4-27\div(-27)]\times1\}-2=\{[-1+1]\times1\}-2=-2$

注意： $-2^2=-4$，$(-2)^2=4$，$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$．

例 2 已知实数 a，b，1 在数轴上的对应点的位置如下图(其中 0 为原点)：



试化简：$|a+b|+|a-b|-|b-1|+\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$

分析：由图可知：$a<0<1<b$，且$|a|>|b|$；$\therefore a+b<0,\ a-b<0,\ b-1>0$，$\therefore$ 它们的绝对值均可确定.

解：原式$=-(a+b)-(a-b)-(b-1)-a+b=-a-b-a+b-b+1-a+b$
$=-3a+1$

例 3 用科学记数法把下列各数表示出来.

(1) 0.000107；(2) 310.5

解：(1) $0.000107=1.07\times10^{-4}$；

(2) $310.5=3.105\times10^{2}$.

【想想练练】

1．选择题

(1) 若实数 a 的绝对值是它的本身，那么 a 一定是 ( )

(A) 正数；(B) 零；(C) 负数；(D) 以上三种情况都不对.

(2) 以下四个式子中可以表示实数 a，b 一定同时为 0 的是 ( )

(A) $a+b=0$；(B) $ab=0$；(C) $a-b=0$；(D) $a^2+b^2=0$.

(3) 计算$(-2)^{1991}+(-2)^{1990}$所得的结果是 ( )

(A) 2^{1990}；(B) -2；(C) -2^{1990}；(D) -2^{1991}.

(4) 下列四个说法之中正确的个数是 ( )

① 同号两数的和是正数，那么这两个数都是正数.

② 同号两数的差是正数，那么这两个数都是正数.

③ 同号两数的积是正数，那么这两个数都是正数.

④ 同号两数的商是正数，那么这两个数都是正数.

(A) 1 个；(B) 2 个；(C) 3 个；(D) 4 个.

2. 填空题

(1) 如果 $x>2$，则$|x-2|-|x+2|=$__________.

(2) 如果 $x<y<0$，则$|x|$__________$|y|$(填一个不等号).

(3) 1990 按四舍五入保留 2 个有效数字的近似值为__________.

【自测练习题】

A 组

1．把下列各数按从小到大的顺序，用“<”符号连接起来.

$$0.1;\quad -0.1;\quad 3;\quad \sqrt{10};\quad -1.$$

2．计算：$1\frac{1}{3}\times\left(-2^2+4-5\frac{1}{2}\div11\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

3．已知：x、y 为实数，且$(2x-1)^2+(y+8)^2=0$，求：$x+y$ 的值.

原书缺页

原书缺页

分析：已知条件$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$反映了$x$和$y$的一个关系式，从中可明确得出$x$用$y$表示的关系式，再代入要求值的代数式即可解出本题.

解：

$\because\ \sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$.

$\therefore\ (\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}-15(\sqrt{y})^2=0$.

$(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})=0$.

$\because\ x>0,\ y>0$.

$\therefore\ \sqrt{x}+3\sqrt{y}\neq0\quad\therefore\ \sqrt{x}=5\sqrt{y}$. 即$x=25y$,

$$\therefore\ \frac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}=\frac{2\times25y+\sqrt{25y\times y}+3y}{25y+\sqrt{25y\times y}-y}=\frac{58y}{29y}=2.$$

例4 计算$\sqrt{8}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+3\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

解：原式$=2\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+3\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=2\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{13}{4}\sqrt{2}$.

【想想练练】

1．判断题(对加✓；错加×)

(1) 因式分解：

$x^2-16y^2=(x+4y)(x-4y)=(x+4y)(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$ (　　)

(2) 当$x\neq0$时，分式$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$有意义 (　　)

(3) 当$x<0$时，$x\sqrt{2}=-\sqrt{2x^2}$ (　　)

(4) 若$\sqrt{(2-x)^2}=x-2$，那么$x\geqslant2$ (　　)

2．填充题

(1) 当$x=$ ______时，分式$\dfrac{x-2}{x^2-4}$无意义.

(2) 已知$1<x<3$，则$\dfrac{|x-3|}{x-3}-\dfrac{\sqrt{(1-x)^2}}{1-x}=$ ______.

(3) 计算：$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=$ ______.

(4) 化简根式：$\sqrt{-a^3}=$ ______.

3．选择题

(1) 在下列各式中正确的是 (　　)

(A) $\dfrac{3a}{3a+b}=\dfrac{a}{a+b}$；　(B) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2}{y^2}$；

(C) $\dfrac{x-0.1y}{0.1x+y}=\dfrac{10x-y}{x+10y}$；　(D) $\dfrac{m+n}{k+n}=\dfrac{m}{k}$.

(2) 把二次三项式$2x^2+4x-4$分解因式，正确的答案是 (　　)

(A) $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$；　(B) $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$；

(C) $2(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$；　(D) $2(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$.

【自测练习题】

A　组

1．计算

(1) $\left(-\frac{3}{2}a^3b^2c^n\right)(+4ac^{2-n})$；　　(2) $(x+y-z)^2-(x-y-z)(x+y-z)$；

(3) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+2b}+\frac{a^2+ab+b^2}{(b-a)(2b+a)}$；　(4) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{6}}$.

2．如果最简根式 $\sqrt[a+b]{2a-b}$ 和 $\sqrt[3a-3]{4a-5b}$ 是同类根式，求 a，b 的值.

3．已知：$x=\frac{a-b}{a+b}$，$y=\frac{b-c}{b+c}$，$z=\frac{c-a}{c+a}$

求证：$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

4．化简：$\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\div 4\sqrt{ab}$.

5．已知：$\frac{19-x}{(x-1)(x+5)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}$求：$A$，$B$ 的值.

B　组

1．选择题

(1) 如果 $x<-2$，那么 $\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}+\frac{2|x|}{x}$ 的值为　　(　　)

(A) 3；(B) 1；(C) -1；(D) -3.

(2) 下列四个等式中，不一定成立的个数为　　(　　)

① $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$；　　② $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$；

③ $\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$；　　④ $\frac{a(c^2+1)}{b(c^2+1)}=\frac{a}{b}$.

(A) 1 个；(B) 2 个；(C) 3 个；(D) 4 个.

2．填充题

(1) 化简：

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{x}}}=\underline{\qquad\qquad}.$$

(2) 分解因式：$4x^4-5x^2+1=$________.

3．已知：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}$．求：$\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ 的值.

4．如果 a，b，x 都是实数，并且$\left(x^3+\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}-b\right)^2=0$，求证：$b(b^2-3)=a$.

5．化简：$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$（其中 $x\geqslant1$）.

6．求证：$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$.

提示：设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，两边同时立方后，再求出 x 的值即可.

3. 指数与对数

【内容提要】

1．有理数指数幂：

(1) 正整数指数幂：$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}^{n个}$ (其中 n 为正整数)；

(2) 零指数幂：$a^0=1(a\neq 0)$；

(3) 负整数指数幂：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0,\ n$ 是正整数)；

(4) 分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0,\ m,\ n$ 都是整数，且 $n>1)$.

2．有理数指数幂的运算法则：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}(a>0,\ m,\ n$ 是有理数)； (2) $a^m\div a^n=a^{m-n}(a>0,\ m,\ n$ 是有理数)；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}(a>0,\ m,\ n$ 是有理数)； (4) $(ab)^n=a^n\cdot b^n(a>0,\ b>0,\ n$ 是有理数).

3．对数的定义：如果 $a^b=N(a>0,\ a\neq 1)$，那么，指数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做底数，N 叫做真数.

根据对数定义可得

$$a^{\log_a N}=N(a>0,\ a\neq 1,\ N>0).$$

4．对数的性质：

(1) 零和负数都没有对数；

(2) 底数的对数等于 1；即 $\log_a a=1(a>0,\ a\neq 1)$.

(3) 1 的对数等于 0，即 $\log_a 1=0(a>0,\ a\neq 1)$.

5．对数的运算法则：$(M,\ N,\ a$ 都是正数，$a\neq 1)$.

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$； (2) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$ (n 为实数)；

(4) $\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$ (n 为大于 1 的整数).

6．常用对数：以 10 为底的对数叫做常用对数，正数 N 的常用对数一般记为 $\lg N$.

如果正数 $N=a\times 10^n(1\leqslant a<10,\ n$ 是整数)，则 $\lg N=n+\lg a$. 其中 n 叫做 N 的常用对数的首数，而 $\lg a$ 表示的数值叫做 N 的常用对数的尾数$(0\leqslant\lg a<1)$.

【范例】

例 1 计算：$(0.0081)^{-\frac{1}{4}}-\left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^0\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]\times(-\sqrt{2}\times 8^{\frac{1}{2}})$.

解：原式$=\left(\dfrac{10000}{81}\right)^{\frac{1}{4}}-[1\div(-2)]\times(-\sqrt{2}\times 2\sqrt{2})=\dfrac{10}{3}+\dfrac{1}{2}\times(-4)$

$=\dfrac{10}{3}-2=\dfrac{4}{3}$.

例 2 计算：$\lg 25+\lg 2\cdot\lg 50+\lg^2 2$.

分析：把对数式中的真数分解质因数，展开后再合并即可.

解：原式$=2\lg 5+\lg 2(\lg 2+2\lg 5)+\lg^2 2=2\lg 5+2\lg^2 2+2\lg 2\lg 5$

$=2\lg 5+2\lg 2(\lg 2+\lg 5)=2(\lg 5+\lg 2)=2.$

说明：例 2 的解法我们称之为凑合法．即凑成 $\lg 2+\lg 5=1$．但有时很难凑成这一结果．为此我们再介绍一种"代入法"：一般题中既有 $\lg 2$，也有 $\lg 5$．而 $\lg 2+\lg 5=1$，利用 $\lg 2=1-\lg 5$（或 $\lg 5=1-\lg 2$）代入，题中就变成清一色的 $\lg 2$（或 $\lg 5$）通过化简即可得结果．例：$\lg 25+\lg 2\lg 50+\lg^2 2=2\lg 5+\lg 2(1+\lg 5)+\lg^2 2=2(1-\lg 2)+\lg 2(2-\lg 2)+\lg^2 2=2$．一般地说：$N_1\cdot N_2=a$．则 $\log_a N_1=1-\log_a N_2$．反之 $\log_a N_2=1-\log_a N_1$．

例 3　已知：$a^2+b^2=3ab$，且 $a>b>0$　求证：$\lg(a-b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$

分析：本题已知条件较简单，而结论的等式较复杂，一般可采用"执果索因"的分析法来证明．

证明：要证：$\lg(a-b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$．$\because a>b>0$，只要证：$2\lg(a-b)=\lg(ab)$，只要证：$\lg(a-b)^2=\lg(ab)$，只要证：$(a-b)^2=ab$，只要证：$a^2-2ab+b^2=ab$，只要证：$a^2+b^2=3ab$，而这是已知的，且在 $a>b>0$ 的条件下，以上过程可逆，所以本题结论成立．

例 4　已知：$14^a=5$，$\log_{14}2=b$．求：$\log_{14}35=?$（用 a，b 表示）．

解：$\log_{14}35=\log_{14}5+\log_{14}7$．

$\because 14^a=5$，由对数的定义得：$\log_{14}5=a$，又 $\log_{14}2+\log_{14}7=\log_{14}14=1$，而 $\log_{14}2=b$，

$\therefore \log_{14}7=1-\log_{14}2=1-b$，

$$\therefore\quad \log_{14}35=a+1-b=a-b+1.$$

【想想练练】

1．选择题

(1) 如果 $a>0$，则 $\log_5(25a)$ 比 $\log_5\left(\frac{a}{25}\right)$ 的值要大　　(　　)

(A) 50；(B) $\log 50$；(C) 4；(D) $\frac{1}{4}$．

(2) 已知：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，那么，$\lg\frac{2}{3}$ 的尾数是　　(　　)

(A) $\bar{1}.8239$；(B) -0.1761；(C) 0.1761；(D) 0.8239．

2．填充题

(1) $\lg(\operatorname{tg}10°\cdot\operatorname{tg}80°)=$ ________．　(2) $\log_{(2-\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})=$ ________．

(3) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-2^{\frac{1}{2}}=$ ________．(4) 如果 $4^x=2$，则 $x=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$．

3．计算

(1) $\log_a\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$；　(2) $25^{\log_5 9}$；

(3) $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}\div\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$；　(4) $\lg 5\lg 8000+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2$．

【自测练习题】

A　组

1．填空

(1) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}-(x^{\frac{1}{12}})^2=$________.　　(2) $\left(1\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(-\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(+\dfrac{1}{5}\right)^{-1}=$____。

(3) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=$________.　　(4) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}=$________.

(5) $\log_3 0.375+3\log_3 2=$________.　　(6) $9^{\log_3 2}-2^{\log_3 9}=$________.

(7) 已知: $11^a=3$, 则 $\log_{11}33=$________.　(8) 已知: $\lg 2=0.3010$, 则 2^{50} 是______位数.

2．选择题

(1) 如果 $\log_2 x=-1$, 则 x 的值为　　(　　)

(A) 2; (B) -2; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) 不存在.

(2) 在下列四个等式中, 成立的有　　(　　)

① $\log_5(x+y)=\log_5 x\cdot\log_5 y$;　　② $\log_5\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_5 x-\log_5 y$;

③ $\log_5 x^y=y\log_5 x$;　　④ $\dfrac{\log_5 x}{2}=\log_5\sqrt{x}$.

(A) 1 个; (B) 2 个; (C) 3 个; (D) 4 个.

3．计算

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\div(2\log_6 3-\log_6 0.25)$;　　(2) $\dfrac{\frac{1}{3}\lg 5+\lg\sqrt[3]{2}}{\log_4\frac{1}{2}-4^{-\frac{1}{2}}}$.

4．已知: $\lg 3=0.4771$, 且 $\lg N=-2.5229$, 求: N 的值.

5．已知: $a>b>0$, 且 $a^2+b^2=6ab$. 求证: $\lg\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

B　组

1．填空

(1) 如果 $\log_m 2=a$, $\log_m 3=b$, 那么 $\log_m 12=$________.

(2) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(-\dfrac{9}{7}\right)^0-\left(15\dfrac{5}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-0.01^{-\frac{1}{2}}=$________.

(3) $(-2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}})^2\cdot(+x^{\frac{1}{3}}y)\div(9x^2)^{\frac{1}{2}}=$________.

(4) 如果 $\lg x=13.57$, 且 x^2 的整数部分是________位数.

2．已知5位正数 N 的常用对数的尾数与 $\mathrm{tg}\,60°$ 的常用对数的尾数相同, 求 $N=$?

3．已知: $\log_m 392=a$, $\log_m 224=b$. 求: $\log_m 14$ 的值(用 a, b 表示).

4．计算: $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)+\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})-3^{\log_9 4}$.

5．若 $3^x=5^y=15^z$, 求证: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$.

4. 代 数 方 程

【内容提要】

1．方程的概念:

(1) 定义：含有未知数的等式叫做方程.

(2) 方程的解：能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解.

(3) 方程的根：只含有一个未知数的方程的解，也可叫做方程的根.

2．代数方程的分类：

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一次或二次方程}\\ \text{高次方程}\end{cases}\\ \text{分式方程}\end{cases}\\ \text{无理方程}\end{cases}$$

3．可以化为一元二次（或一次）来解的方程解这些方程的基本思想是：

(1) 分式方程 $\xrightarrow{\text{转化：两边都乘同一整式，去分母}}$ 整式方程.

(2) 无理方程 $\xrightarrow{\text{转化：两边同次乘方，去根号}}$ 有理方程.

(3) 特殊的高次方程 $\xrightarrow{\text{通过因式分解、换元、转化降次为}}$ 一次或二次方程（指实数范围内）.

必要时可引入辅助未知数，即用换元法来解.

解分式方程与无理方程，必须注意验根.

4．方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的讨论：

(1) 当 $a=0$，方程变形为 $bx+c=0$.

① 当 $b\neq0$，$bx+c=0$ 为一元一次方程，它有唯一解：$x=-\dfrac{c}{b}$.

② 当 $b=c=0$ 方程有无穷多解.

③ 当 $b=0$，$c\neq0$ 方程无解.

(2) 当 $a\neq0$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程.

实系数一元二次方程的根的性质，可以由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来确定.

① 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

② 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数.

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}.$$

③ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述定理的逆定理也成立.

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根分别为 x_1 和 x_2，那么

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

这个定理叫做韦达定理.

韦达定理的逆定理也成立且有广泛应用. 即如果数 x_1、x_2 适合于 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$；$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}(a\neq0)$，那么这两个数 x_1、x_2 一定是方程 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$（就是 $ax^2+bx+c=0$）的两个