

双自由度齿轮啮合理论 及应用

SHUANGZIYOU DU CHILUN NIEHE
LILUN JI YINGYONG

董学朱 李海涛 魏文军 著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

双自由度齿轮啮合 理论及应用

董学朱 李海涛 魏文军 著

机械工业出版社

前 言

产形面双自由度切齿啮合又称双参数包络，广泛用于齿轮的展成加工。双自由度齿轮传动也已用于生产。“双参数包络问题已经在微分几何中研究过，并且过去只具有理论上的兴趣”^[12]。涉及其实际应用的一些研究，采用的方法各不相同，得到的公式差别很大，而且都十分繁复，一般难用于计算。本书系统地介绍了一种容易理解、公式简捷便于计算的双自由度齿轮啮合理论和计算方法，将其用于变轴交角渐开线齿轮传动的啮合分析，解决了几何设计中的一些关键问题；用于对渐开螺旋面刀具双自由度展成齿轮进行切齿啮合分析，得到一些简捷的计算公式，其特解用于交错轴渐开线斜齿轮的几何设计和接触质量评估。

曲线刀刃展成齿轮，刀具与轮坯一般有两个独立的相对运动，即切削运动和展成运动。对于插齿、刨齿和弧齿锥齿轮铣齿，切削运动简单，且完全与展成运动分离，可简化为由刀刃曲线切削运动形成产形面，再由产形面展成齿轮。摆线齿锥齿轮用连续分度法展成，切削运动与展成运动相混，如何将二者分离是一个难题。为解决这类问题，本书提出了曲线刀刃双自由度展成曲面理论和计算公式。基于这种理论，研制成一种新型传动——直线双自由度展成环面蜗杆传动。书中以较大篇幅对这种传动的啮合分析、几何设计及蜗杆和蜗轮加工作了介绍；除此之外，还研究了渐开线刀刃双自由度展成环面蜗杆以及直线刀刃双自由度展成摆线齿锥齿轮。结果表明这种方法不仅概念清楚，计算也比较简便。

本书绪论、第1~5章作者为董学朱，第6~10章作者为李海涛和魏文军。研究生董李扬、吕红同学完成本书部分的文字录入和插图绘制工作。实验研究中得到了北京双环之星传动技术有限公司的张德华高级工程师、张丽红工程师和中国农业大学工学院施焕儒高级实验师的大力支持。

对书中的错误和缺点，恳请读者批评指正。

作 者

目 录

前言

绪论 1

- 0.1 刀具产形面的双自由度切齿啮合 1
- 0.2 双自由度齿轮啮合理论 2
- 0.3 双自由度齿轮传动 2
- 0.4 刀刃产形线双自由度展成曲面 3

第1章 双自由度齿轮啮合理论 5

- 1.1 共轭齿面 5
- 1.2 齿面接触点邻域的共轭条件 7
- 1.3 齿面 Σ_1 上的啮合界线 11
- 1.4 齿面 Σ_2 上的曲率干涉界线 14
 - 1.4.1 曲率干涉界线 14
 - 1.4.2 N_j 的不同计算公式 15
 - 1.4.3 $\Psi_{1\varphi_2} = \Psi_{2\varphi_1}$ 的证明 18
- 1.5 诱导法曲率和诱导短程挠率 19
 - 1.5.1 诱导法曲率 19
 - 1.5.2 诱导短程挠率 21
 - 1.5.3 诱导主方向和诱导主曲率 22
- 1.6 齿面 Σ_2 避免曲率干涉的条件 22

第2章 刀刃双自由度运动展成的曲面 23

- 2.1 刀刃曲线 Γ_d 的方程和曲率参数 23
- 2.2 Γ_d 与构件1的相对角速度和相对速度 24
- 2.3 Γ_d 展成曲面 Σ_1 的条件 24
- 2.4 轨迹曲面 Σ_d 的曲率参数 25
- 2.5 曲面 Σ_1 的方程和曲率参数 27

- 2.6 渐开线双自由度运动展成环面蜗杆螺旋面 29

2.7 直线刀刃双自由度运动展成摆线齿锥齿轮 36

- 2.7.1 刀刃双自由度运动的分解 36
- 2.7.2 刀刃直线 Γ_d 的方程 39
- 2.7.3 按关于 ψ 的相对角速度 $\Omega_{d\psi}$ 运动形成的曲面 Σ'_1 40
- 2.7.4 按关于 ψ 的相对角速度 $\Omega_{dp\psi}$ 运动形成产形面 Σ_p 41
- 2.7.5 按关于 φ 的相对角速度 $\Omega_{p\varphi}$ 运动展成齿面 Σ_i 43

第3章 变轴交角渐开线齿轮传动 46

- 3.1 相配两齿轮的齿面 46
 - 3.1.1 坐标系的选择 46
 - 3.1.2 直齿渐开线圆柱齿轮齿面 47
 - 3.1.3 相对角速度和相对速度 48
 - 3.1.4 啮合面方程 50
 - 3.1.5 齿轮2齿面方程 51
- 3.2 齿面上的界线 51
 - 3.2.1 齿面 Σ_1 上的啮合界线 51
 - 3.2.2 齿面 Σ_2 上的曲率干涉界线 52
 - 3.2.3 齿面 Σ_2 避免根切的条件 53
- 3.3 诱导法曲率和诱导短程挠率 55
 - 3.3.1 齿面 Σ_1 上的活动标架 55
 - 3.3.2 齿廓方向的诱导法曲率 55
 - 3.3.3 齿线方向的诱导法曲率 56
 - 3.3.4 $\Sigma=0$ 时的曲率参数 56

3.3.5 诱导短程挠率	57	5.2.2 正确啮合条件	92
3.3.6 诱导主方向和诱导主曲率	57	5.2.3 中心距可分性和轴交角可 变性	92
3.4 变轴交角渐开线齿轮的几何 设计	58	5.2.4 最紧密啮合	93
第4章 渐开螺旋面刀具展成 齿轮的双自由度切齿 啮合	69	5.2.5 无侧隙啮合方程	93
4.1 坐标系的选择	69	5.3 给定中心距时交错轴渐开线齿 轮的设计	94
4.2 渐开螺旋面刀具产形轮和齿轮 的主要参数	70	5.3.1 交错轴渐开线零变位齿轮 传动	94
4.3 轮1产形面	71	5.3.2 啮合效率最高时的螺旋 角	96
4.4 相对角速度和相对速度	73	5.3.3 交错轴渐开线非零变位齿 轮传动	96
4.5 产形面 Σ_1 的接触迹线	74	5.4 中心距不受限制的交错轴渐开 线圆柱齿轮设计	98
4.6 啮合线	76	5.5 无侧隙啮合时的轴交角和中 心距	99
4.7 被展成齿轮的齿面	79	5.6 重合度和有效齿宽	101
4.8 齿面上的界线	81	5.7 齿面过渡曲线干涉检查	103
4.8.1 齿面上的啮合界线	81	5.8 交错轴非零变位渐开线斜齿 圆柱齿轮传动算例	104
4.8.2 曲率干涉界线	82	5.9 齿面接触分析	107
4.9 切齿啮合诱导法曲率和诱导短 程挠率	84	5.9.1 接触迹线	107
4.9.1 诱导法曲率	84	5.9.2 瞬时接触椭圆参数	108
4.9.2 诱导短程挠率	85	5.9.3 齿面接触区	108
4.9.3 两齿面直母线之间的夹 角	86	5.9.4 齿面接触分析算例	110
4.9.4 相对主方向和相对主曲 率	87	第6章 直线刀刃双自由度展成 环面蜗杆螺旋面	114
4.10 齿面上接触迹线方向	87	6.1 直廓环面蜗杆传动的发展和问 题	114
4.10.1 轮1齿面 Σ_1 上接触迹线 方向	87	6.2 直线刀刃双自由度展成环面蜗 杆螺旋面的提出	115
4.10.2 轮2齿面 Σ_2 上接触迹线 方向	88	6.3 坐标系的选择	116
第5章 交错轴渐开线斜齿圆柱 齿轮几何计算	90	6.4 直线刀刃 Γ_d 的方程	117
5.1 概述	90	6.5 直线刀刃 Γ_d 和环面蜗杆1的相 对角速度和相对速度	118
5.2 交错轴渐开线齿轮传动的几个 特殊问题	90	6.6 直线刀刃 Γ_d 双自由度展成环面 蜗杆1的螺旋面 Σ_1 求解	119
5.2.1 螺旋方向与轴交角	90		

6.7 轨迹曲面 Σ_d 的方程和曲率参数	119	蜗杆副接触质量的影响研究	151
6.8 虚拟产形面 Σ_d 展成环面蜗杆螺旋面 Σ_l 的方程	121	8.5.3 双自由度直线标准环面蜗杆传动 C_p 值 (即 p_d 值) 的选择	169
6.9 双自由度直线环面蜗杆的分度环面螺旋线	125	8.6 蜗杆的仿真	170
第7章 双自由度直线环面蜗杆传动	126	8.6.1 蜗杆附加尺寸计算	170
7.1 双自由度直线环面蜗杆传动的啮合分析	126	8.6.2 蜗杆曲面的组成	172
7.2 蜗轮齿面上瞬时接触线奇点轨迹	133	8.6.3 利用 MATLAB 计算和绘制蜗杆各曲面的方法	172
7.2.1 $\Phi_{d2} = 0$ 时蜗轮齿面的共轭区 Σ_{2A} 和 Σ_{2B}	133	8.6.4 双自由度直线环面蜗杆仿真示例	173
7.2.2 $\Phi_{d2} = 0$ 的条件	134	第9章 双自由度直线环面蜗杆副的修形	175
7.2.3 蜗轮齿面接触线有奇点的标准传动	134	9.1 双自由度直线环面蜗杆修形传动的接触线和蜗轮齿面结构	175
7.3 瞬时接触线和各界线的图形参数	135	9.1.1 双自由度直线环面蜗杆 I 型传动	175
7.3.1 接触线参数和界线参数的求解	135	9.1.2 双自由度直线环面蜗杆 II 型传动	177
7.3.2 接触线和各类界线的参数换算	136	9.2 区分传动类型的准则和修形参数的筛选	180
第8章 双自由度直线环面蜗杆传动设计	138	9.2.1 单参数修形时区分传动类型的准则	180
8.1 双自由度直线环面蜗杆传动的主要参数	138	9.2.2 修形参数的筛选	183
8.2 双自由度直线环面蜗杆传动的几何参数计算	138	9.2.3 综合修形时区分传动类型的准则	183
8.3 蜗轮齿面结构和蜗杆齿厚	141	9.3 双自由度直线环面蜗杆副传动类型的选择	187
8.3.1 齿面接触区的边界	141	9.3.1 修形后蜗轮齿面结构的變化	187
8.3.2 蜗轮齿面的结构分析	145	9.3.2 传动类型的选择	188
8.3.3 蜗杆的齿厚	147	9.4 双自由度直线环面蜗杆副修形参数的选择	189
8.4 螺旋参数 p_d 的计算	150	9.4.1 I 型传动微观啮合质量	189
8.5 传动几何参数的选择	151	9.4.2 I 型传动修形参数的选择	190
8.5.1 传动几何参数的选择准则	151	9.4.3 II 型传动微观啮合质量	191
8.5.2 螺旋参数 p_d 和蜗杆头数对			

9.4.4 II型传动修形参数的选择	191
第10章 双自由度直线环面蜗杆副制造和检验	205
10.1 双自由度直线环面蜗杆副的制造	205
10.1.1 试验用双自由度直线环面蜗杆副的几何参数和尺寸计算	206
10.1.2 工装设计和毛坯准备	207
10.1.3 机床基本调整	210
10.1.4 交换齿轮的计算和选择	210
10.1.5 蜗杆的加工	214
10.1.6 滚刀的加工	215
10.1.7 蜗轮的加工	216
10.2 双自由度直线环面蜗杆的测量	217
10.2.1 测量方法	217
10.2.2 螺旋线上测量点的选择	219
10.2.3 测量数据的处理	221
10.3 双自由度直线环面蜗杆副接触区试验	221
附录	223
附录A 矢量回转	223
A.1 圆矢量函数和球矢量函数	223
A.2 回转矩阵	224
附录B 坐标变换	225
B.1 矢量的坐标变换	225
B.2 点的坐标变换	225
B.3 两种坐标变换法	226
附录C 矢量回转和坐标变换综合应用	228
附录D 附表	229
参考文献	235

绪 论

两齿轮啮合或刀具与轮坯的切齿啮合, 若其相对运动由两个独立参数确定, 则为双自由度啮合。与普通 (单自由度) 齿轮啮合相比, 多了一个自由度, 使齿轮啮合传动和切齿啮合的应用范围扩大, 但使双自由度啮合理论复杂得多。

早在滚齿工艺出现时, 就已采用双自由度切齿啮合, 而双自由度齿轮传动的研究, 则在 20 世纪 60 年代的文献中才见到。早期, 双自由度切齿啮合和双自由度齿轮传动的研究都只局限于用近似方法。20 世纪 60 年代中期, 文献中出现了双参数曲面族包络理论研究, 直到 80 年代末才形成了比较系统的双自由度齿轮啮合理论。

0.1 刀具产形面的双自由度切齿啮合

滚齿工艺中, 滚刀刀所在的螺旋面为产形面 Σ_0 。以头数为 z_0 的滚刀产形面 Σ_0 展成齿数为 z_i 齿轮的齿面 Σ_i 时, 滚刀转角为 φ , 滚刀与齿轮坯 i 按传动比 $i_{oi} = z_i/z_0$ 转动。若 φ 是唯一的相对运动参数, 则轮坯转角 $\varphi_i = \varphi/i_{oi}$, 展成的是蜗轮, 其齿槽底环面包围滚刀齿顶圆柱面。除转动之外, 若使滚刀架沿轮坯轴线方向按独立参数 s 移动, 则展成的是直齿圆柱齿轮; 若联通滚齿机的差动机构, 使轮坯 i 得到附加转角 $\Delta\varphi_i = s/p_i$ (p_i 为齿轮 i 的螺旋参数, 对于直齿轮 p_i 为 ∞), 轮坯 i 的总转角为 $\varphi_i = \varphi_i(\varphi, s) = \varphi/i_{oi} + s/p_i$, 则展成的是斜齿圆柱齿轮。此时, 有两个独立的相对运动参数 φ 和 s , 滚刀与轮坯为双自由度切齿啮合。

蜗杆砂轮磨齿时, 无论采用圆柱蜗杆砂轮或环面蜗杆砂轮, 砂轮相对于被磨齿轮的运动模式与滚齿基本相同。

剃齿或珩齿时, 剃齿刀或珩磨轮为主动件, 转角为 φ , 与被加工齿轮 i 自由啮合, 刀具相对于齿轮轴线方向位移 s , 使齿轮 i 产生附加转角 $\Delta\varphi_i = s/p_i$ 。尽管刀具与齿轮 i 自由啮合, 但 φ 和 s 为独立的运动参数, 其相对运动模式仍与滚齿相同。

增加一个刀具沿轮坯轴线方向的移动, 可将单自由度切齿啮合滚蜗轮, 扩展成双自由度切齿啮合滚齿、剃齿、珩齿和蜗杆砂轮磨齿, 几乎包含了圆柱齿轮的各种展成加工方法。

刀具与被加工齿轮不同的双自由度相对运动组合, 可以加工出各种新型传动。文献中已见到这方面的探索, 例如, 以锥面砂轮^[19]或环面砂轮^[21]双自由度

磨削展成圆柱蜗杆。由此可以看出,双自由度切齿啮合为开发新型啮合传动和提高啮合质量提供了广阔的空间。

0.2 双自由度齿轮啮合理论

双自由度啮合理论出现以前,用近似方法研究双自由度切齿啮合。例如,把滚刀称为“齿条型刀具”,用齿条与齿轮啮合近似研究滚齿;以交错轴斜齿渐开线圆柱齿轮的啮合来研究剃齿和珩齿。

20 世纪 60 年代初,变轴交角齿轮传动出现^[37],近似方法已不适合双自由度齿轮啮合性能的深入研究,于是,出现了双参数曲面族的包络理论^[38,40],用于变轴交角齿轮啮合分析,但只局限于计算啮合面和被展成齿面。到 60 年代中期,文献 [41,42] 的研究已深入到双参数曲面族包络面的根切和曲率参数的计算,在专著 [11] 中也有较详细的论述。但由于计算公式十分繁复,未见应用到具体应用。

文献 [2, 3, 6, 18] 中都有关于双自由度啮合理论的论述,并且用以研究双自由度切齿啮合。但是计算公式依然十分繁复,在这些书中很难找到具体算例。

利用文献 [10] 中研究单自由度齿轮啮合理论的方法,进行双自由度啮合研究,得到的计算公式简捷、易理解,而且便于计算^[23,45]。基于文献 [23],对渐开线螺旋面刀具双自由度切齿啮合进行了系统研究,得到的一些简捷公式用于交错轴斜齿渐开线圆柱齿轮传动的啮合分析和几何设计^[24]。根据文献 [23, 45] 中的双自由度齿轮啮合理论,进行变轴交角渐开线齿轮啮合分析^[25,46],得到的结果为其几何设计提供了可靠依据。

0.3 双自由度齿轮传动

文献 [37] 中对变轴交角等模数空间齿轮传动进行了研究。在插齿机上装辅具,使轮坯与插齿刀的轴交角在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内变化,用渐开线齿轮插齿刀展成变轴交角齿轮。由加工出的两齿轮组成轴交角在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内变化的双自由度齿轮传动模型。但由于齿轮的端面齿部严重根切和其他缺陷未能用于生产;所采用的近似啮合分析法也不能真实反映啮合特性。

若使变轴交角齿轮副的齿轮之一为直齿圆柱齿轮,其参数与插齿刀的相同,根据轴交角变化范围和避免根切要求正确选择齿轮副参数,变轴交角齿轮传动是有使用价值的。按双参数曲面族包络理论^[38],文献 [40] 中对渐开线直齿圆柱齿轮与变轴交角齿轮的啮合进行了研究,得到的啮合面是垂直于圆柱齿轮轴

线并与其中截面重合的平面；对每一固定的轴交角，啮合线是一条直线，啮合角随轴交角变化。文献[44]中将这种传动以“齿轮传动中的双参数包络”词条收入，并说明在机械手中使用这种传动。

利用文献[45]中的双自由度啮合理论，文献[46]对变轴交角渐开线齿轮传动的啮合界线、曲率干涉界线、诱导法曲率和诱导短程挠率进行了研究，得到简捷公式便于计算被加工齿轮的根切和评价齿面接触质量。文献[25]中得到变轴交角渐开线齿轮传动摆动轴线位置参数、齿轮工作齿宽、重合度和瞬时接触椭圆参数的计算公式，解决了设计中的实际问题，提供可靠的几何设计方法，并给出算例。这些有利于变轴交角渐开线齿轮传动的推广应用。

0.4 刀刃产形线双自由度展成曲面

曲线刀刃 Γ_d 单自由度运动形成轨迹曲面 Σ_i ，每一瞬时在 Σ_i 上能找到一条曲线 Γ_d 。曲线刀刃 Γ_d 双自由度运动得到曲线族 $\{\Gamma_d\}$ 展成曲面 Σ_i ，则完全不同于轨迹曲面的形成，每一瞬时在 Σ_i 上只能找到一个与 Γ_d 的相切点，不同瞬时的接触点集覆盖曲面 Σ_i 。

生产中广泛采用曲线或直线刀刃展成齿轮，刀刃相对于轮坯也有两个独立的相对运动，一个是切削运动，另一个是展成运动。当切削运动比较简单而且又完全与展成运动分离时，刀刃 Γ_d 可由切削运动形成轨迹曲面 Σ_d ，再以 Σ_d 作产形面展成曲面 Σ_i ，可简化成产形面 Σ_d 单自由度切齿啮合。插齿、刨齿、弧齿锥齿轮铣齿就属于这种情况。

直线刀刃双自由度展成摆线齿锥齿轮时，采用连续分度法，切削运动与展成运动相混，难于分开，这种情况就需要进行深入的理论研究。

文献[26]中提出曲线刀刃双自由度展成曲面理论：得到刀刃两独立相对运动不受限制时的展成曲面方程；通过设计使两独立相对运动可以分离，刀刃曲线由其中一个运动形成轨迹曲面 Σ_d ，再以虚拟的产形面 Σ_d ，由另一个运动展成曲面 Σ_i 。仍然可以把问题简化成单自由度切齿啮合。

产形面是虚拟的，可用简单的刀刃曲线，例如直线或渐开线，通过精心设计相对运动，得到最佳，甚至比较复杂的虚拟产形面。产形面多样化有利于新型传动的开发。

环面蜗杆包围渐开线齿轮传动中，环面蜗杆可用渐开线刀刃双自由度展成，其虚拟产形面与相配齿轮的渐开螺旋面相同。直线刀刃双自由度展成摆线齿锥齿轮，经过分解两独立运动参数，得到的虚拟产形面是长幅外摆线直纹面。用曲线刀刃双自由度展成齿面理论计算上述两种传动，不仅概念清楚，计算也简便。

文献 [26] 中, 研制成直线双自由度展成环面蜗杆传动, 与直廓环面蜗杆传动差别在于: 蜗杆毛坯 1 转角为 φ 时, 刀座 D 除按转角 $i_{d1}\varphi$ (i_{d1} ——刀座 D 与蜗杆 1 的速比) 回转之外, 还沿其轴线方向位移 s , 并给刀座附加转角 $\delta = s/p_d$ (p_d ——刀座关于 δ 相对运动的螺旋参数), 刀座总转角 $\varphi_d = i_{d1}\varphi + \delta$, φ 和 δ 是两个独立的相对运动参数。刀刃直线按关于 δ 的相对运动, 形成一个相切于基圆柱的不可展直纹螺旋面 Σ_d ; 由虚拟产形面 Σ_d , 按关于 φ 的相对运动, 展成蜗杆螺旋面 Σ_1 。这种新型传动与直廓环面蜗杆传动相比, 接触质量有很大提高。

综上所述, 曲线刀刃双自由度展成曲面理论和计算方法, 不仅概念清楚, 计算简便, 还可通过设计各种不同的虚拟产形面, 开发新型传动。

第 1 章 双自由度齿轮啮合理论

两齿轮啮合或刀具与轮坯的切齿啮合，若其相对运动由两个独立参数确定，则称之为双自由度啮合。此时两共轭齿面点接触连续相切，并保证要求的运动规律。

单自由度啮合是双自由度啮合的特例，可以参考已经比较完善的单自由度啮合理论，来研究双自由度啮合，并检验得到的结果。

1.1 共轭齿面

1. 齿面 Σ_1

取动坐标系 $\sigma_i(O_i; i_i, j_i, k_i)$ ($i=1, 2$) 与齿轮 i 固连，静坐标系 $\sigma(O_0; i, j, k)$ 与机架固连(见图 1-1)。

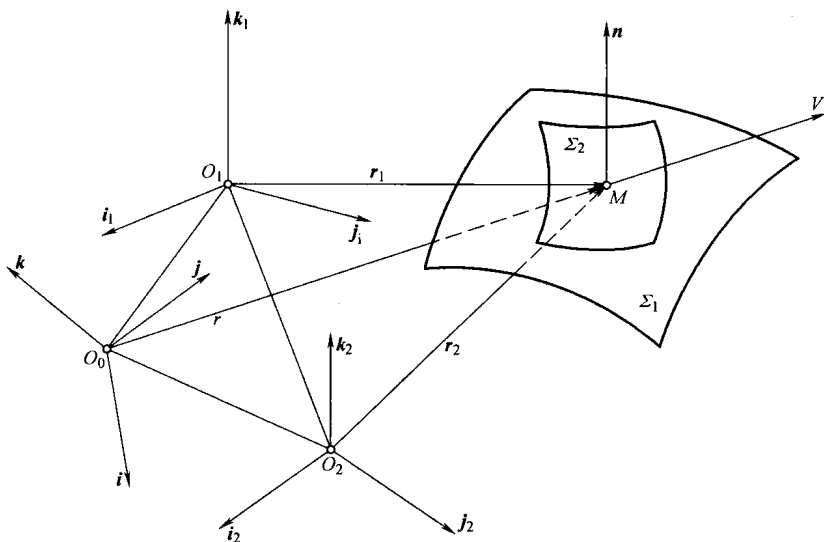


图 1-1 两接触齿面及坐标系的选择

已知齿轮 1 齿面 Σ_1 在 σ_1 里的方程

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, v) \tag{1-1}$$

式中， u, v 为齿面 Σ_1 的参数。

$\mathbf{r}_1$ 对 u 和 v 的一阶偏导数为 $\mathbf{r}_{1u}$ 和 $\mathbf{r}_{1v}$ 。齿面 Σ_1 的单位法矢量为

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{D}(\mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v}) \quad (1-2)$$

式中, $D = \pm \sqrt{EG - F^2}$ 。

Σ_1 的第一类基本量为

$$E = \mathbf{r}_{1u}^2; \quad F = \mathbf{r}_{1u} \cdot \mathbf{r}_{1v}; \quad G = \mathbf{r}_{1v}^2$$

设 $\mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v} \neq 0$, 其方向由齿的实体指向空域时, D 取正号, 反之取负号。

2. 相对角速度和相对速度

设齿轮 1 齿面 Σ_1 与齿轮 2 齿面 Σ_2 在点 M 啮合, 齿轮 1 与齿轮 2 的相对运动参数为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 。

齿轮 1 相对于齿轮 2 的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Omega}_j \frac{d\varphi_j}{dt} \quad (1-3)$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\omega}_{1j} \frac{d\varphi_j}{dt} \quad (1-4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\omega}_{2j} \frac{d\varphi_j}{dt} \quad (1-5)$$

运动参数为 φ_j , $\frac{d\varphi_j}{dt} = 1 \text{ rad/s}$ 时的相对角速度 $\boldsymbol{\Omega}_j$, 称为齿轮 1 与齿轮 2 关于 φ_j 的相对角速度。 $\boldsymbol{\omega}_{1j}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{2j}$ 分别为齿轮 1 和齿轮 2 关于 φ_j 的角速度。

齿面接触点的相对速度矢量为

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{V}_j \frac{d\varphi_j}{dt} \quad (1-6)$$

$$\text{式中 } \mathbf{V}_j = \boldsymbol{\Omega}_j \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_{2j} \times \mathbf{O}_{21} + \frac{\partial \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_j}; \quad (1-7)$$

$$\mathbf{O}_{21} = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1;$$

$\mathbf{V}_j$ ——齿轮 1 与齿轮 2 关于 φ_j 的相对速度;

$\mathbf{r}_1$ ——点 M 在 σ_1 里的径矢。

3. 齿面的接触条件

齿面接触的几何条件为, 接触点是两齿面的公共点, 而且在该点两齿面有公法线; 两齿面接触点处法线方向的速度分量相等, 才能连续相切不脱开, 即相对速度垂直于齿面接触点处的公法线, 是两齿面接触的运动条件。

如图 1-1 所示, 齿面 Σ_1 和 Σ_2 的接触条件为

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{O}_{21} \quad (1-8)$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \quad (1-9)$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1-10)$$

式中 r_2 ——点 M 在 σ_2 里的径矢；

n_2 ——齿面 Σ_2 的单位法矢量。

将式 (1-6) 代入式 (1-10)，得到

$$\sum_{j=1}^n (n_1 \cdot V_j) \frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \quad (1-11)$$

式中， φ_j 为运动参数， $\frac{d\varphi_j}{dt} \neq 0$ ，于是得到关于 φ_j 的共轭条件方程为

$$\Phi_j = n_1 \cdot V_j = \Phi_j(u, v, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1-12)$$

关于 φ_j 的共轭条件函数 Φ_j ，是齿面 Σ_1 的参数 u 、 v 和 n 个运动参数的函数。总共有 $n+2$ 个变量。由式 (1-12) 得到 n 个方程，给出两个独立运动参数，即可求解其余 n 个参数。这表明，一对齿轮传动的自由度一般最多只有两个。下文中令 $n=2$ ，得到的双自由度啮合理论具有普遍意义，也适合于 $n=1$ 的单自由度齿轮啮合的情况。

$n=2$ 时，给出独立的运动参数 φ_1 和 φ_2 ，由式 (1-12) 的两个方程求得 u 和 v 值，得到 1 个接触点，两齿面作点接触，随着 φ_1 和 φ_2 的变化，接触点覆盖齿面 Σ_2 。

$n=1$ 时，只有 1 个运动参数 φ_1 ，式 (1-12) 只有 1 个共轭条件方程。给定 φ_1 ，在 u 和 v 中给出 1 个参数，求另一个，随着 u 和 v 的变化，在齿面上得到与 φ_1 对应的一条瞬时接触线；随着 φ_1 值的变化，瞬时接触线族覆盖全齿面。

当 $n=2$ 时，由式 (1-12) 得到两个共轭条件方程。在 σ_2 里齿面 Σ_2 的方程为

$$\begin{cases} (r_2)_2 = (r_1)_2 + (O_{21})_2 \\ n_1 \cdot V_j = 0 \quad (j = 1, 2) \end{cases} \quad (1-13)$$

式中括号外的下角“2”表示矢量变换到坐标系 σ_2 里。

1.2 齿面接触点邻域的共轭条件

运动参数为 φ_j ($j=1, 2$) 时，齿面 Σ_1 以点 M_1 与齿面 Σ_2 的点 M_2 在固定空间点 M 接触。运动参数为 $\varphi_j + \Delta\varphi_j$ 时， Σ_1 与 Σ_2 以点 M'_1 和 M'_2 在点 M' 接触。当 $\Delta\varphi_j \rightarrow 0$ 时，点 M_1 、 M_2 和 M 分别为点 M'_1 、 M'_2 和 M' 的极限位置，点 M'_1 、 M'_2 和 M' 则分别是点 M_1 、 M_2 和 M 满足共轭条件的邻域。根据上述定义，将式 (1-8) ~ 式 (1-10) 在静坐标系 σ 里微分，得到点 M 邻域的接触条件为

$$dr_2 = dr_1 + dO_{21} \quad (1-14)$$

$$dn_2 = dn_1 \quad (1-15)$$

$$dn_1 \cdot V + n_1 \cdot dV = 0 \quad (1-16)$$

式 (1-6) 中微分 V 得到

$$dV = \sum_{j=1}^2 \left(dV_j \frac{d\varphi_j}{dt} + V_j \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} dt \right) \quad (1-17)$$

将式 (1-6) 和式 (1-17) 代入式 (1-16) 得

$$\sum_{j=1}^2 (dn_1 \cdot V_j + n_1 \cdot dV_j) \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \quad (1-18)$$

由于 $\frac{d\varphi_j}{dt} \neq 0$, 由式 (1-18) 得

$$dn_1 \cdot V_j + n_1 \cdot dV_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1-19)$$

为求得齿面 Σ_1 和 Σ_2 一些微分量之间的关系, 将式 (1-14)、式 (1-15) 和式 (1-19) 中关于静坐标系的普通微分变换成关于动坐标系 σ_1 和 σ_2 的相对微分^[10]。

式 (1-14) 中

$$dr_1 = d_1 r_1 + (\omega_1 \times r_1) dt \quad (1-20)$$

$$dr_2 = d_2 r_2 + [\omega_2 \times (r_1 + O_{21})] dt \quad (1-21)$$

$$dO_{21} = \frac{\partial O_{21}}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial O_{21}}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 \quad (1-22)$$

将式 (1-20) ~ 式 (1-22) 代入式 (1-14), 并考虑到式 (1-3) ~ 式 (1-7), 得

$$d_2 r_2 = d_1 r_1 + \left[\sum_{k=1}^2 \left(\Omega_k \times r_1 - \omega_{2k} \times O_{21} + \frac{\partial O_{21}}{\partial \varphi_k} \frac{d\varphi_k}{dt} \right) dt \right] = d_1 r_1 + V dt \quad (1-23)$$

式 (1-23) 还可以写成

$$d_2 r_2 = d_1 r_1 + \sum_{k=1}^2 V_k d\varphi_k \quad (1-24)$$

同理可将式 (1-15) 中普通微分变成相对微分, 有

$$d_2 n_2 = d_1 n_1 + \sum_{k=1}^2 (\Omega_k \times n_1) d\varphi_k \quad (1-25)$$

式 (1-16) 中

$$dn_1 = d_1 n_1 + \sum_{k=1}^2 (\omega_{1k} \times n_1) d\varphi_k \quad (1-26)$$

由式 (1-7) 微分 V_j 得

$$dV_j = \Omega_j \times dr_1 + d\Omega_j \times r_1 - d\omega_{2j} \times O_{21} - \omega_{2j} \times dO_{21} + d\left(\frac{\partial O_{21}}{\partial \varphi_j}\right) \quad (j = 1, 2) \quad (1-27)$$

$$dr_1 = d_1 r_1 + \sum_{k=1}^2 (\omega_{1k} \times r_1) d\varphi_k \quad (1-28)$$

$$d\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_j}{\partial \varphi_k} d\varphi_k \quad (1-29)$$

$$d\omega_{2j} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \omega_{2j}}{\partial \varphi_k} d\varphi_k \quad (1-30)$$

$$d\mathbf{O}_{21} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_k} d\varphi_k \quad (1-31)$$

$$d\left(\frac{\partial \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_j}\right) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} d\varphi_k \quad (1-32)$$

将式(1-28) ~ 式(1-32)代入式(1-27)得

$$\begin{aligned} d\mathbf{V}_j = & \boldsymbol{\Omega}_j \times d_1 \mathbf{r}_1 + \sum_{k=1}^2 \left[\boldsymbol{\Omega}_j \times (\omega_{1k} \times \mathbf{r}_1) + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_j}{\partial \varphi_k} \times \mathbf{r}_1 \right. \\ & \left. - \frac{\partial \omega_{2j}}{\partial \varphi_k} \times \mathbf{O}_{21} - \omega_{2j} \times \frac{\partial \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial^2 \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} \right] d\varphi_k \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (1-33)$$

将式(1-26)和式(1-33)代入式(1-18)得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \{ \mathbf{V}_j \cdot d_1 \mathbf{n}_1 - (\boldsymbol{\Omega}_j, \mathbf{n}_1, d_1 \mathbf{r}_1) + \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{V}_j \times \omega_{1k} + \\ \boldsymbol{\Omega}_j \times (\omega_{1k} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{C}_j] d\varphi_k \} \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (1-34)$$

$$\mathbf{C}_j = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_j}{\partial \varphi_k} \times \mathbf{r}_1 - \frac{\partial \omega_{2j}}{\partial \varphi_k} \times \mathbf{O}_{21} - \omega_{2j} \times \frac{\partial \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial^2 \mathbf{O}_{21}}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} \quad (1-35)$$

$$d_1 \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1u} du + \mathbf{n}_{1v} dv \quad (1-36)$$

$$d_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1u} du + \mathbf{r}_{1v} dv \quad (1-37)$$

式中, $\mathbf{n}_{1u}$ 和 $\mathbf{n}_{1v}$ 分别为 $\mathbf{n}_1$ 对 u 和 v 的偏导数。

将式(1-36)和式(1-37)代入式(1-34)得

$$\sum_{j=1}^2 (\Phi_{ju} du + \Phi_{jv} dv + \sum_{k=1}^2 \Phi_{j\varphi_k} d\varphi_k) \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \quad (1-38)$$

$$\Phi_{ju} = \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n}_{1u} - (\boldsymbol{\Omega}_j, \mathbf{n}_1, \mathbf{r}_{1u}) \quad (1-39)$$

$$\Phi_{jv} = \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n}_{1v} - (\boldsymbol{\Omega}_j, \mathbf{n}_1, \mathbf{r}_{1v}) \quad (1-40)$$

$$\Phi_{j\varphi_k} = \mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{V}_j \times \omega_{1k} + \boldsymbol{\Omega}_j \times (\omega_{1k} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{C}_j] \quad (1-41)$$

$n=2$ 时, 若将式(1-12)微分, 可得到式(1-38)。由此可知式(1-38)中 Φ_{ju} 、 Φ_{jv} 、 $\Phi_{j\varphi_1}$ 和 $\Phi_{j\varphi_2}$ 是 Φ_j 对 u 、 v 、 φ_1 和 φ_2 的偏导数。

式(1-38)称为齿面接触点邻域共轭条件方程。

式 (1-24)、式 (1-25) 和式 (1-34) 给出了齿面 Σ_1 和 Σ_2 接触点一些微分量之间的关系, 可以避免齿面 Σ_2 繁复的方程, 直接由齿面 Σ_1 及齿面 Σ_1 和 Σ_2 之间的相对运动参数, 计算齿面 Σ_2 的法曲率和短程挠率等参数。

$d_1 r_1$ 和 $d_2 r_2$ 在齿面接触点处的公切面上, 它所确定的方向称为共轭方向。即由 φ_j 至 $\varphi_j + \Delta\varphi_j$ 区间 $M_1 M'_1$ 沿着 $d_1 r_1$ 方向, 则 $M_2 M'_2$ 沿着由式 (1-24) 确定的 $d_2 r_2$ 方向。通常两共轭方向不重合。

设过曲面上点 M_1 处, 沿任一 α 方向曲线的弧长为 s_1 ; 沿关于 φ_j 的相对速度 V_j 方向曲线的弧长为 s'_1 。将式 (1-41) 代入式 (1-34), 除以 ds_1 后得

$$\sum_{j=1}^2 \left[V_j \cdot \frac{d_1 n_1}{ds_1} - (\Omega_j, n_1, \alpha) + \sum_{k=1}^2 \Phi_{j\varphi_k} \frac{d\varphi_k}{ds_1} \right] \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \quad (1-42)$$

式中, $\alpha = \frac{d_1 r_1}{ds_1}$ 。

式 (1-42) 中

$$V_j \cdot \frac{d_1 n_1}{ds_1} = |V_j| \frac{|V_j|}{|V_j|} \cdot \frac{d_1 n_1}{ds_1} = |V_j| \left(\frac{d_1 r_1}{ds'_1} \right)_{V_j} \left(\frac{d_1 n_1}{ds_1} \right)_\alpha$$

式中, 下角 “ V_j ” 表示 $\frac{d_1 r_1}{ds'_1}$ 为齿面 Σ_1 沿 V_j 方向的单位矢量; 下角 “ α ” 表示 $\frac{d_1 n_1}{ds_1}$ 为齿面 Σ_1 上 n_1 沿 α 方向的导矢。可以证明^[10]

$$\left(\frac{d_1 r_1}{ds'_1} \right)_{V_j} \cdot \left(\frac{d_1 n_1}{ds_1} \right)_\alpha = \left(\frac{d_1 r_1}{ds_1} \right)_\alpha \cdot \left(\frac{d_1 n_1}{ds'_1} \right)_{V_j}$$

于是

$$V_j \cdot \frac{d_1 n_1}{ds_1} = |V_j| \alpha \cdot \left(\frac{d_1 n_1}{ds'_1} \right)_{V_j} \quad (1-43)$$

由微分几何可知

$$\left(\frac{d_1 n_1}{ds'_1} \right)_{V_j} = -\kappa_{1V_j} \frac{V_j}{|V_j|} - \tau_{1V_j} \frac{n_1 \times V_j}{|V_j|} \quad (1-44)$$

式中 κ_{1V_j} ——齿面 Σ_1 沿 V_j 方向的法曲率;

τ_{1V_j} ——齿面 Σ_1 沿 V_j 方向的短程挠率。

将式 (1-44) 代入式 (1-43) 得

$$V_j \cdot \frac{d_1 n_1}{ds_1} = -\alpha \cdot [\kappa_{1V_j} V_j + \tau_{1V_j} (n_1 \times V_j)] \quad (1-45)$$

将式 (1-45) 代入式 (1-42) 得

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ -\alpha \cdot [\Omega_j \times n_1 + \kappa_{1V_j} V_j + \tau_{1V_j} (n_1 \times V_j)] + \sum_{k=1}^2 \Phi_{j\varphi_k} \frac{d\varphi_k}{ds_1} \right\} \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \quad (1-46)$$