郑家顺考试捷径系列

（考试命题研究组 编）

大学自主招生历年真题精讲

数学

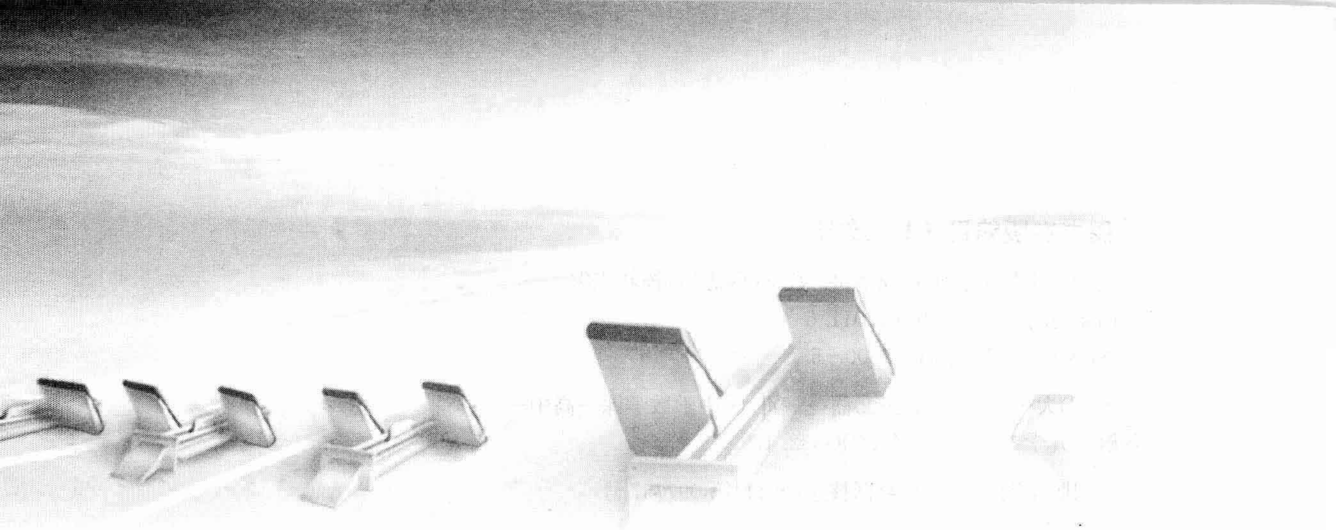
语文 数学 英语 物理 化学 招生指南

丛书主编/郑家顺

本册主编/薛志贵 嵇 新

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS



大学自主招生历年真题精讲

·数 学·

丛书主编　刘　成

本册主编　许中银　朱　亮

主　　编　许中银　朱　亮

副 主 编

编　　委　刘　成　朱玉娟　许中银　朱　亮　王　娟

东南大学出版社

·南京·

图书在版编目(CIP)数据

大学自主招生历年真题精讲. 数学/薛志贵,嵇新主编.
—南京:东南大学出版社,2011.6
ISBN 978-7-5641-2800-5

Ⅰ.①大… Ⅱ.①薛…②嵇… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 097757 号

大学自主招生历年真题精讲·数学

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
网　　址	http://www.seupress.com
责编电话	(025)83790510
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	常州市武进第三印刷有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
总 印 张	70
总 字 数	1750 千字
版　　次	2011 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-2800-5
总 定 价	144.00 元(共 6 册)

(凡有印装质量问题,请与我社读者服务部联系。电话:025—83792328)

总　序

高校自主招生的意义在于选拔出具有超常的创新和实践能力，或在文学、艺术、体育等方面有特殊才能，或综合素质名列前茅的应届高中毕业生。由于通过自主招生考试并签订协议的考生高考后可低于学校录取分数线若干分录取，近年来，这一考试方式受到广泛关注，众多品学兼优、综合素质优秀或者特长突出的学生都纷纷申请。为了帮助大家更加从容应对这一新形势与挑战，我们集多年经验编写了本套《大学自主招生历年真题精讲》丛书。

《大学自主招生历年真题精讲》丛书编写老师均为全国自主招生辅导班一线金牌教练，顾问成员为全国多家学科组带头人。六分册针对招生指南以及语文、数学、英语、物理、化学等科目分别做了权威性、实效性讲解与指导，可以有效提高考生对自主招生考试的理解度与适应度。

《大学自主招生历年真题精讲》丛书旨在帮助考生在较短时间内把握名校自主招生考试的规律并找到适合自己的备考策略，拓展创造性思维能力，适用于参加高校自主招生的学生及相关人士，对统招高考生也极有参考价值。希望广大考生能阅此丛书、顺势而为，获得骄人的成绩。

丛书编委会

前　　言

在高校自主招生考试中，数学学科既注重基础知识、基本技能的“双基”考查，同时对数学思想方法和思维策略的考查也达到了相当高的层次，有时甚至达到相当于数学竞赛的难度。这就让很多的考生无所适从，从而也让很多的考生对数学望而却步。但只有理清头绪、把握命题规律，总结出一套行之有效的应对策略，才能帮助考生在这场自主招生的考试竞争中立于不败之地。

为增强高校自主招生备考的针对性与实效性，本书按照数学学科内容以及数学自主招生考试的特点设置了函数、数列、解析几何等 11 个专题。每个专题大致安排“真题解析”、“知识点梳理”、“真题拓展”3 个板块进行编排。

真题解析——编排高校历年数学自主招生考试真题，并进行解析，供考生了解考试的题型、特点及难易程度，以及对重要的数学方法和思维策略的归纳总结。俗话说“知己知彼，百战百胜”通过真题训练巩固知识与能力掌握的深度和牢度。

知识归纳——根据高中数学学科的内容，将本章中基础的、重要的知识点进行全面归纳与总结，以帮助考生完成对高中数学知识的梳理。

真题拓展——按照数学自主招生考试的特点，根据真题的透视和分析，编排适合于复习迎考的自主招生考试真题或改编题，以帮助考试熟悉考试思路、提前热身训练、把握考试节奏，作为考前的自我审视和评估，提高自主招生的应试能力和技巧。

本书适应希望参加高校自主招生的考生，对于不参加自主招生的同学也是极有参考价值。因为目前的高考的趋势也是能力考试，创造性思维的考试，即能力“立意”。

本书的解释、真题拓展等都是经过反复推敲、实践（多年在“北京中奥赛德”等自主招生辅导班授课），但不当之处在所难免，敬请广大读者、同行专家不吝指正，以便改进。

★★★★★欢迎本书读者光临“中国英语考试网”大学自主招生版（http://www.zgyyksw.com/）及“郑家顺英语博客”（http://blog.sina.com.cn/zhengjiashun）！这里将及时更新提供各高校自主招生的最新消息。

·目　录·

第一章　函数及其性质

真题精析

例 1　(2011·清华)已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)$单调递增,$f(-1)=0$.设 $\varphi(x)=\sin^2 x+m\cos x-2m$,集合 $M=\left\{m\mid 对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\varphi(x)<0\right\}$,$N=\left\{m\mid 对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],f(\varphi(x))<0\right\}$,求 $M\cap N$.

解　$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)$单调递增,$f(-1)=0$,所以当 $x>0$ 时,$f(x)$也单调递增,且 $f(1)=0$.于是 $f(x)<0$ 等价于 $x<-1$ 或 $0<x<1$.

$$N=\left\{m\mid 对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],f(\varphi(x))<0\right\}$$

$$=\left\{m\mid 对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\varphi(x)<-1\ 或\ 0<\varphi(x)<1\right\}.$$

$$M\cap N=\left\{m\mid 对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\varphi(x)<-1\right\}.$$

由 $\varphi(x)<-1$ 得 $\cos^2 x-m\cos x+2m-2>0$.

令 $t=\cos x$,则 $0\leqslant t\leqslant 1$,于是问题等价转化为:

当不等式 $t^2-mt+2m-2>0$ 在 $t\in[0,1]$上恒成立时,求实数 m 的取值范围.

由 $t^2-mt+2m-2>0(0\leqslant t\leqslant 1)$得 $m>\dfrac{t^2-2}{t-2}$.

设 $h(t)=\dfrac{t^2-2}{t-2}(0\leqslant t\leqslant 1)$,则 $h'(t)=\dfrac{t^2-4t+2}{(t-2)^2}$.

令 $h'(t)=0$ 解得 $t=2-\sqrt{2}(t=2+\sqrt{2}$舍去).

当 $0\leqslant t<2-\sqrt{2}$时,$h'(t)>0$,$h(t)$为增函数;

当 $2-\sqrt{2}<t\leqslant 1$ 时,$h'(t)<0$,$h(t)$为减函数;

当 $t=2-\sqrt{2}$时,$h(t)$取得$[0,1]$上的最大值 $4-2\sqrt{2}$,

$M\cap N=(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

例 2　(2009·北大)已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$的单调区间;

(2) 函数 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{6}(x>0)$,求证 $a=1$ 时的 $f(x)$图象不在 $g(x)$图象的上方.

解　(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}+x(x>0)$.

若 $a\geqslant 0$,则 $f(x)>0\Rightarrow f(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$递增.

若 $a<0$,令 $f(x)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{-a}$,

$f'(x)=\dfrac{(x-\sqrt{-a})(x+\sqrt{-a})}{x}>0$，又 $x>0\Rightarrow x\in(\sqrt{-a},+\infty)$，

$f'(x)<0\Rightarrow x\in(0,\sqrt{-a})$，

所以 $f'(x)$ 的递增区间为 $(\sqrt{-a},+\infty)$，递减区间为 $(0,\sqrt{-a})$.

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{6}(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2x^2=\dfrac{1+x^2-2x^3}{x}=\dfrac{(1-x)(2x^2+x+1)}{x}$，

令 $\varphi'(x)=0\Rightarrow x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增. 当 $x>1$ 时，$\varphi(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减.

所以 $x=1$ 时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}=0$.

所以 $\varphi(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant g(x)$.

所以 $a=1$ 时，$f(x)$ 的图象不在 $g(x)$ 图象的上方.

例 3 (2007·清华)求 $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$ 的单调区间及极值.

解 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'e^x+\dfrac{1}{x}(e^x)'=-\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

当 $x<0$，或 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；$x>1$ 时，$f'(x)>0$.

因此，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$，单调递增区间为 $[1,+\infty)$. 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 e.

例 4 (2008·清华) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，$f(2x)-f(x)=x^2$，求 $f(x)$.

解 由已知，得

$f(x)-f\left(\dfrac{1}{2}x\right)=\dfrac{1}{4}x^2$，$f\left(\dfrac{1}{2}x\right)-f\left(\dfrac{1}{4}x\right)=\dfrac{1}{16}x^2$.

$f\left(\dfrac{1}{4}x\right)-f\left(\dfrac{1}{8}x\right)=\dfrac{1}{64}x^2$，…，$f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}x\right)-f\left(\dfrac{1}{2^n}x\right)=\dfrac{1}{4^n}x^2$

累加，得 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{2^n}x\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{64}x^2+\cdots+\dfrac{1}{4^n}x^2$.

即 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2^n}x\right)+\dfrac{x^2}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$，又因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，

所以 $f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{2^n}x\right)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\right]=f(0)+\dfrac{x^2}{3}=1+\dfrac{x^2}{3}$.

例 5 (2007·北大)已知 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|$，求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)$.

解 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|=(x-4)(x-49)+|(x-4)(x-49)|$，当 $4\leqslant x\leqslant 49$ 时，$(x-4)(x-49)\leqslant 0$，此时 $f(x)=0$.

因此 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=f(1)+f(2)+f(3)+f(50)=2(144+94+46\times 2)=2\times 330=660$.

例 6 (2008·浙大)已知 $a>0$，$b>0$，$\log_9 a=\log_{12}b=\log_{16}(a+b)$，

求 $\dfrac{b}{a}$ 的值.

解　设 $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)=k$，则

$a=9^k,b=12^k,a+b=16^k$，

所以 $9^k+12^k=16^k$. 两边同除以 12^k 得

$\left(\frac{3}{4}\right)^k+1=\left(\frac{4}{3}\right)^k$，即$\left(\frac{4}{3}\right)^{2k}-\left(\frac{4}{3}\right)^k-1=0$，

所以 $\left(\frac{4}{3}\right)^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 所以 $\frac{b}{a}=\frac{12^k}{9^k}=\left(\frac{4}{3}\right)^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 7　(2005・上海交大)已知 $y=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$的最大值为 9，最小值为 1，求实数 a,b.

解　由 $y=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$，得$(y-a)x^2-8x+y-b=0$，因为此方程有解，所以 $\Delta=64-4(y-a)(y-b)\geqslant 0$，得 $y^2-(a+b)y+ab-16\leqslant 0$.

由题意，9 和 1 为方程 $y^2-(a+b)y+ab-16=0$ 的两个根，所以$\begin{cases}a+b=10,\\ab-16=9.\end{cases}$

解得 $a=b=5$.

例 8　(2001・上海交大联读班)已知函数 $f(x)=x^2+2x+2$，$x\in[t,t+1]$的最小值为 $g(t)$，试写出 $g(t)$的解析表达式.

解　$f(x)=x^2+2x+2$，其对称轴 $x=-1$.

当 $t\geqslant -1$ 时，$f(x)$在$[t,t+1]$上单调递增，此时 $g(t)=f(t)=t^2+2t+2$；

当 $t+1\leqslant -1$，即 $t\leqslant -2$ 时，$f(x)$在$[t,t+1]$上单调递减，此时 $g(t)=f(t+1)=t^2+4t+5$；

当 $t<-1<t+1$，即$-2<t<-1$ 时，$g(t)=f(-1)=1$.

例 9　(2006 年复旦推优、保送生)试构造函数 $f(x)$，$g(x)$，其定义域为$(0,1)$，值域为$[0,1]$.

(1) 对于任意 $a\in[0,1]$，$f(x)=a$ 只有一个解；

(2) 对于任意 $a\in[0,1]$，$g(x)=a$ 有无穷多个解.

解　(1) 定义函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}2x\left(x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^+\right),\\3x\left(x=\frac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}^+,n\geqslant 2\right),\\0\left(x=\frac{1}{3}\right),\\x\left(x\in(0,1)\text{且 }x\neq\frac{1}{2^n},x\neq\frac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}^+\right).\end{cases}$$

(2) 定义 $g\left(\frac{1}{2^i}\right)=0(i\in\mathbf{N}^+)$. 由$(0,1)=\bigcup_{i=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^{i+1}},\frac{1}{2^i}\right)$. $\forall x\in\left(\frac{1}{2^{i+1}},\frac{1}{2^i}\right)$，先做映射 $g_i(x)=2^{i+1}\left(x-\frac{1}{2^{i+1}}\right)$，这样就把$\left(\frac{1}{2^{i+1}},\frac{1}{2^i}\right)$扩充到$(0,1)$. 再仿(1)中的定义，在此基础上再构造一个值域为$[0,1]$的映射 $g(x)$.

即 $g(x)=\begin{cases}0\left(x=\frac{1}{2^i},i\in\mathbf{N}^+\right),\\f(g_i(x))\left(x\neq\frac{1}{2^i},i\in\mathbf{N}^+\right).\end{cases}$

其中 $g_i(x)=2^{i+1}\left(x-\frac{1}{2^{i+1}}\right), i\in\mathbf{N}^+$.

注:此题的第一问还可以这样构造:

$$f(x)=\begin{cases}0\left(x=\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{n}\left(x=\frac{1}{n+2}, n\in\mathbf{N}^+\right),\\ x\left(x\in(0,1)\text{且 } x\neq\frac{1}{n+1}, n\in\mathbf{N}^+\right).\end{cases}$$

但是用这个思路不容易解决(2).

例 10 (2004·上海交大)已知 $f_1(x)=\frac{1-x}{x+1}$,对于一切正整数 n,都有 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$,且 $f_3(x)=f_6(x)$,求 $f_{28}(x)$.

解 因为 $f_1(x)=\frac{1-x}{x+1}$, $f_2(x)=\frac{1-f_1(x)}{f_1(x)+1}=x$,所以 $f_3(x)=\frac{1-x}{x+1}$, $f_4(x)=x$.

又由 $f_3(x)=f_6(x)$,得$\frac{1-x}{x+1}=x$,解得:$x=-1\pm\sqrt{2}$,所以 $f_{28}(x)=-1\pm\sqrt{2}$.

例 11 (2004·同济)试利用三角函数求函数 $f(x)=4-2x^2+x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值与最小值.

解 因 $x^2\leqslant1$,可令 $x=\sin\theta$, $f(\sin\theta)=4-2\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=3+\cos2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta=3+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\alpha+2\theta)$,其中 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$f(\sin\theta)\in\left[3-\frac{\sqrt{5}}{2}, 3+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, $f_{\max}=3+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $f_{\min}=3-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

例 12 (2004·复旦)若存在 M,使任意 $t\in D$(D 为函数 $f(x)$的定义域),都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$有界. 问函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是否有界?

解 取 $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $k\geqslant1$,则 $f\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,

当 $k\to\infty$时, $f\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\to\infty$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不是有界函数.

例 13 (2002·上海交大联读班、保送生)函数 $f(x)=|\lg x|$,有 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(1) 求 a,b 满足的关系;

(2) 证明:存在这样的 b,使 $3<b<4$.

解 (1) 由于 $x\geqslant1$ 时, $f(x)=|\lg x|=\lg x$ 为单调递增函数.

所以 $1\leqslant a<b$ 不可能使得 $f(a)=f(b)$,

故 $0<a<1\leqslant b$,此时 $f(a)=-\lg a=\lg\frac{1}{a}$, $f(b)=\lg b$,

由 $f(a)=f(b)$,得$\frac{1}{a}=b$,即 $ab=1$,

又$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 1$,所以 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\lg\frac{a+b}{2}$,

由 $f(b)=2\lg\frac{a+b}{2}$,得 $b=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$.

整理得:$b^4-4b^3+2b^2+1=0\Rightarrow(b-1)(b^3-3b^2-b-1)=0$.

又 $b\neq 1$(否则 $a=1$),所以 $b^3-3b^2-b-1=0$,

故 a,b 满足的关系为 $b^3-3b^2-b-1=0,b>1$,且 $ab=1$.

(2) 设 $g(b)=b^3-3b^2-b-1$,

由 $g(3)=-4<0,g(4)=11>0$,知 $g(b)=0$ 在$(3,4)$上至少有一根.

故存在 $b\in\mathbf{R}$,使 $3<b<4$.

例 14　(2001 · 交大)$x\in\mathbf{R}^+$,求 $f(x)=\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-(x^6+x^{-6})-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+x^{-3}}$的最小值.

解　令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,x^4+\frac{1}{x^4}=(t^2-2)^2-2$.

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=t(t^2-3)$.

$$又\ f(x)=\frac{6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+18}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+\frac{1}{x^3}}=\frac{6[(t^2-2)^2-2]+15(t^2-2)+18}{t^3+t(t^2-3)}=\frac{6t^4-9t^2}{2t^3-3t}$$

$$=\frac{3t(2t^3-3t)}{2t^3-3t}=3t=3\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 3\times 2\times\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=6.$$

所以当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,$f(x)$取得最小值 6.

考点梳理

一、函数的图象与性质

函数的图象:坐标为$(x,f(x))$的点的集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图象,其中 D 是函数的定义域.

图象变换:平移变换,对称变换.

函数性质:奇偶性、单调性、周期性.

周期性:对于函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的正数 T,使得当 x 取定义域中的每一个数时,$f(x+T)=f(x)$总成立,那么称函数 $f(x)$为周期函数,正数 T 称为这个周期函数的周期,如果所有周期中存在最小值 T_0,称 T_0 为该函数的最小正周期.

二、二次函数

二次函数在中学数学中起着十分重要的作用,也是初等数学中最常见的函数之一.形如 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的函数,它的图象简单,性质易于掌握,又与二次方程、二次不等式有联系,与之相关的理论如判别式、韦达定理、求根公式等都是中学教材的重点内容.因此有必要进一步认识二次函数的性质,研究与二次函数有关的解题规律、方法与技巧.

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的主要性质：定义域为 $\mathbf{R}$；图象是对称轴平行于 y 轴（或与 y 轴重合）的抛物线；当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，函数的值域是 $\left(\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 时，$f(x)$ 是减函数，当 $x\in\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 是增函数；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数的值域是 $\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 时，$f(x)$ 是增函数，当 $x\in\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 是减函数；当 $b^2-4ac>0$ 时，函数的图象与 x 轴有两个不同的交点，它们分别是 $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$；$b^2-4ac=0$ 时，函数的图象与 x 轴有两个重合的交点 $(-\frac{b}{2a},0)$，这时也称抛物线与 x 轴相切；$b^2-4ac<0$ 时，函数的图象与 x 轴没有交点.

函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象是连续的. 一个有用的结论是，在区间 $[p,q]$ 端点处的函数值异号，即 $f(p)\cdot f(q)<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 在 (p,q) 内恰有一个实根. 抛物线的凸性也有一定用途，当 $a>0$ 时，函数的图象是下凸形曲线，即对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；当 $a<0$ 时，函数的图象是上凸形曲线，即对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 利用二次函数图象的凸性和单调性，在某些与二次方程的范围有关的问题中可避免使用判别式和求根公式.

对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，当 a、b、c 固定时，此二次函数唯一确定，它的图象是一条抛物线；若 b、c 固定时，a 可以在某个范围内变动，则它的图象可能是“一族”抛物线. 对于 a、b、c 的不同范围和条件，得到的抛物线族具有不同的特征，如何确定这些特征，就因题而异了.

三、利用导数研究函数的性质

1. 定义：当 $\Delta x\to0$ 时，函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

3. 质点做直线运动的位移 s 是时间 t 的函数，则 $s'(t_0)$ 即为质点在 $t=t_0$ 时的瞬时速度.

4. 几个重要函数的导数.

(1) $C'=0$（C 为常数）；(2) $(x^n)'=nx^{n-1}\,(n\in\mathbf{Q})$；(3) $(\sin x)'=\cos x$；(4) $(\cos x)'=-\sin x$；(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；(6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\mathrm{e}$；(7) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；(8) $(a^x)'=a^x\ln a$.

5. 导数四则运算法则.

(1) $(\mu\pm\upsilon)'=\mu'\pm\upsilon'$；(2) $(\mu\upsilon)'=\mu'\upsilon+\mu\upsilon'$；(3) $\left(\frac{\mu}{\upsilon}\right)'=\frac{\mu'\upsilon-\mu\upsilon'}{\upsilon^2}(\upsilon\neq0)$.

6. 复合函数求导法则.

$y'=y'_\mu\mu'_x$，其中 y' 是 y 对 x 求导，y'_μ 是 y 对 μ 求导，μ'_x 是 μ 对 x 求导.

7. 导数的应用.

(1) 可导函数求单调区间或判断单调性的方法：使 $f'(x)>0$ 的区间为增区间，使 $f'(x)<0$ 的区间为减区间.

(2) 可导函数 $f(x)$ 求极值的步骤：

①求导数 $f'(x)$；②求方程 $f'(x)=0$ 的根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；③检验 $f'(x)$ 在方程的根的附近左、右侧的符号，若左正、右负，则在这个根处取极大值，若左负、右正，则在这个根处取极小值.

(3) 连续函数在闭区间上一定有最大值和最小值.

(4) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则求 $f(x)$ 最大值、最小值的步骤与格式为：

①求导数 $f'(x)$；②求方程 $f'(x)=0$ 的根 $x_1, x_2, \cdots, x_3$；③结合 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 上的根及闭区间 $[a,b]$ 端点处函数值，列出表格：$(a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b)$

x	a	(a,x_1)	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$\cdots$	x_n	(x_n,b)	b
y'		正负号	0	正负号	0		0	正负号	
y	值	单调性	值	单调性	值		值	单调性	值

④根据上述表格中函数的单调性及端点值和极值的大小，确定最大值与最小值.

四、函数极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$.

3. $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，几何意义是 $f(x)$ 的图象在 x_0 处是不间断的，即是连续的.

4. 函数极限的四则运算.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，那么，

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$；$\pm[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$；

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

五、积分

1. 微积分基本定理：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，其中 $F'(x)=f(x)$.

2. 定积分的性质.

性质 1：$\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$；

性质 2：$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

性质 3：$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

性质 4：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

真题拓展

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$，若函数 $y=g(x)$的图象与函数 $y=f^{-1}(x)+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(3)$的值为（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 7

2. 函数 $y=2x+\sqrt{1-2x}$的最大值为（　　）

A. $y_{\min}=-\dfrac{5}{4}, y_{\max}=\dfrac{5}{4}$　　B. 无最小值，$y_{\max}=\dfrac{5}{4}$

C. $y_{\min}=-\dfrac{5}{4}$，无最大值　　D. 既无最小值也无最大值

3. 设 $f(x)$是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数，且是偶函数. 已知当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$时，$f(x)$的解析式为（　　）

A. $x+4$　　B. $2-x$　　C. $3-|x+1|$　　D. $2+|x+1|$

4. 已知函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，则函数 $g(x)=f(x+c)+f(x-c)$在 $0<c<\dfrac{1}{2}$时的定义域为（　　）

A. $(-c,1+c)$　　B. $(1-c,c)$　　C. $(1+c,-c)$　　D. $(c,1-c)$

二、填空题

5. 函数 $y=-\log_3(x^2-ax-a)$在$(-\infty,1-\sqrt{3})$上单调递增，则实数 a 的取值范围是________________.

6. 函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$的最大值为________________.

7. 设 $f(x)$的原函数是$\sqrt{x}+1$，则 $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=$________________.

8. 已知函数 $f(x)$满足：$f(p+q)=f(p)f(q)$，$f(1)=3$，则：

$$\frac{f^2(1)+f(2)}{f(1)}+\frac{f^2(2)+f(4)}{f(3)}+\frac{f^2(3)+f(6)}{f(5)}+\frac{f^2(4)+f(8)}{f(7)}=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+t}$（t 是常实数）.

(1) 若函数的定义为 $\mathbf{R}$，求 $y=f(x)$的值域；

(2) 若存在实数 t 使得 $y=f(x)$是奇函数，证明 $y=f(x)$的图象在 $g(x)=2^{x+1}-1$ 图象下方.

10. 设函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)+ax(a>0)$.

(1) 当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间.

(2) 若 $f(x)$在$(0,1]$上的最大值为$\frac{1}{2}$,求 a 的值.

第二章 函数与方程

真题精析

例1 (2011·北大)求$|x-1|+|2x-1|+\cdots+|2\ 011x-1|$的最小值.

解 由零点分区间法讨论去绝对值:

当$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2\ 011}\right]$时,$f(x)=(1-x)+(1-2x)+\cdots+(1-2\ 011x)$,斜率$k_1=-1-2-\cdots-2\ 011$.

当$x\in\left(\frac{1}{2\ 011},\frac{1}{2\ 010}\right]$时,$f(x)=(1-x)+(1-2x)+\cdots+(1-2\ 010x)+(2\ 011x-1)$,斜率$k_2=-1-2-\cdots-2\ 010+2\ 011$.

当$x\in\left(\frac{1}{2\ 010},\frac{1}{2\ 009}\right]$时,$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-2\ 009x)+(2\ 010x-1)+(2\ 011x-1)$,斜率$k_3=-1-2-\cdots-2\ 009+2\ 010+2\ 011$.

……

当$x\in\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right]$时,$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-mx)+[(m+1)x-1]+\cdots+(2\ 011x-1)$斜率$k_{2\ 013-m}=-1-2-(m-1)+m+\cdots+2\ 011$.

……

设当$x=m$时,$f(x)$取最小值则有

$$\begin{cases}k_{2\ 012-m}\leqslant 0\\ k_{2\ 013-m}\geqslant 0\end{cases},\text{即}\begin{cases}-1-2-m+(m+1)+\cdots+2\ 011\leqslant 0\\ -1-2-(m-1)+m+\cdots+2\ 011\geqslant 0\end{cases},$$

即$\begin{cases}(m-1)m\leqslant 1\ 006\times 2\ 011\\ m(m+1)\geqslant 1\ 006\times 2\ 011\end{cases}$,由于$m\in\mathbf{N}^+$,解得$m=1\ 422$.

所以当$x\in\left(\frac{1}{1\ 423},\frac{1}{1\ 422}\right]$时,$f(x)=(1-x)+\cdots+(1-1\ 422x)+(1\ 423x-1)+\cdots+(2\ 011x-1)=833-1\ 422\times 1\ 423x+2\ 011\times 1\ 006x$

$$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{1\ 422}\right)=\frac{592\ 043}{711}.$$

例2 (2011·清华)设p,q是一元二次方程$x^2+2ax-1=0(a>0)$的两个根,其中$p>0$.令$y_1=p-q,y_{n+1}=y_n^2-2,n=1,2,\cdots$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_1y_2}+\cdots+\frac{1}{y_1y_2\cdots y_n}\right)=p$.

解 $p=-a+\sqrt{a^2+1}=\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}<1$.

$q=-a-\sqrt{a^2+1}=-\frac{1}{p}$.

$y_1=p-q=p+\frac{1}{p}$,