非线性分析

薛小平　吴玉虎　编著

科学出版社

非线性分析

薛小平　吴玉虎　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是一本非线性分析方面的基础理论教材，内容包括拓扑度理论及其应用、凸分析与最优化、单调算子理论、变分与临界点理论、分支理论简介. 本书重视问题背景，理论阐述简明易懂，内容精心选取，每章后配有适量习题，便于读者阅读和巩固.

本书可用作数学类及相关专业研究生教材，也可供从事非线性问题研究的科技人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

非线性分析/薛小平，吴玉虎编著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-031524-3

Ⅰ. ① 非… Ⅱ. ① 薛… ② 吴… Ⅲ. ① 非线性-泛函分析-研究生-教材 Ⅳ. ① O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 112758 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：北京蓝正设计有限公司

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版　开本：720×1000 1/16

2011 年 6 月第一次印刷　印张：12 1/4

印数：1—2 500　字数：240 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

自然科学与工程技术领域中广泛出现的非线性问题越来越受到科学家与工程师的重视, 有关非线性的研究课题遍及不同的学科和领域, 而非线性分析是对众多非线性现象进行建模与分析的有力工具.

本书从数学的角度展现处理非线性问题的基本理论、方法、技巧和结果, 其目的是为数学专业及相关专业的研究生提供一本非线性分析的入门书. 本书在编写上重视问题的背景与来源, 突出解决问题的核心思想, 精炼细节、简明扼要. 本书是作者在为哈尔滨工业大学数学系硕士生和博士生讲授“非线性分析”课的讲稿基础上, 融合五年来的教学实践, 考虑研究生基本需求, 经过整理、加工后成书的. 本书内容精心选取, 覆盖全面, 重点突出, 既有理论深度, 又有方法、技巧在典型模型中的应用. 希望对阅读本书的读者有所帮助.

书中的第 0 章是预备知识, 叙述了线性泛函分析、Sobolev 空间、二阶椭圆型方程、抽象函数的积分、单位分解各方面的基础知识, 为以后各章的学习作知识准备. 第 1 章到第 6 章是主体部分, 涉及拓扑度理论、凸分析、单调映射理论、经典变分原理、临界点与分支理论. 在每章后面, 配有适量习题, 供读者演练巩固.

在本书的编写过程中, 作者参阅了大量的国内外文献, 深受启发. 在此, 对这些文献的作者表示感谢!

本书的出版得到国家自然科学基金 (10571035, 10971043)、黑龙江省杰出青年基金 (JC200810) 和哈尔滨工业大学优秀科技创新团体项目的资助! 感谢为本书的出版付出辛勤劳动的科学出版社张中兴编辑! 感谢哈尔滨工业大学数学系打字室的同志们!

虽经不断努力, 鉴于作者水平有限, 书中疏漏和不足在所难免, 望读者批评指正!

作　者

2010 年 11 月 29 日

常用符号表

$\mathbb{C}$	全体复数
$\mathbb{R}$	全体实数
$\mathbb{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{Z}$	全体整数
$\mathbb{N}$	全体正整数
K	数域，实数域或复数域
$\varnothing$	空集
$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\vert\cdot\vert$	绝对值
$\Vert\cdot\Vert$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积
$\cup$	并
$\cap$	交
$A\backslash B$	差集
$\Rightarrow$	蕴涵
$\Leftrightarrow$	当且仅当
a.e.	几乎处处
$D(A)$	算子 A 的定义域
$R(A)$	算子 A 的值域
$\mathrm{Graph}(A)$	算子 A 的图像
$\ker(A)$	算子 A 的核
$\rho(A)$	算子 A 的正则集
$\sigma(A)$	算子 A 的谱集
$\hookrightarrow$	连续嵌入
$\subsetneq$	紧嵌入
c, C	常数
I,Id	恒算映射
$\partial\Omega$	集合 Ω 的边界
$\bar{\Omega}$	集合 Ω 的闭包
$\mathrm{In}(\Omega)$	集合 Ω 的内部
$\mathrm{Co}(\Omega)$	集合 Ω 的凸包

目　　录

第0章　预备知识

本章的目的是为以后各章的学习提供简要的知识准备, 内容包括线性泛函分析、拓扑、Sobolev 空间、二阶椭圆型方程及抽象函数积分的相关基础理论.

0.1　Banach 空间与 Hilbert 空间

设 X 表示数域 K 上的一个线性空间, K 为实数域或复数域. $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ 称为 X 上的一个范数, 如果满足

(1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$(零元);

(2) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||, \forall x \in X, \alpha \in K$;

(3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

此时 X 按范数 $||\cdot||$ 成为一个赋范线性空间; 又 $\{x_n\} \subset X, x \in X$, 称 $\{x_n\}$依范数收敛于x, 是指 $||x_n - x|| \to 0\,(n \to \infty)$; 称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 是指 $||x_n - x_m|| \to 0\ (n, m \to \infty)$.

定义 0.1.1　称赋范线性空间 X 是Banach 空间, 是指 X 中每个 Cauchy 列都是收敛的; 换言之, 完备的赋范线性空间称为Banach 空间.

$f : X \to K$ 称为 X 上的连续线性泛函, 是指

(1) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in K$;

(2) 若 $x_n \to 0$, 则 $f(x_n) \to 0$.

记 X^* 表示 X 上连续线性泛函的全体, 则 X^* 构成一个线性空间, 定义范数为

$$||f|| = \sup\{|f(x)| \ : \ ||x|| \leqslant 1\},$$

此时, X^* 构成一个赋范线性空间, 而且是 Banach 空间; X^* 称为 X 的共轭空间.

定理 0.1.1 (Hahn-Banach 定理)　设 X 是赋范线性空间, X_0 表示 X 的线性子空间, f_0 是 X_0 上定义的连续线性泛函, 则存在 X 上的连续线性泛函 f 满足:

(1) 对 $\forall x \in X_0, f_0(x) = f(x)$;

(2) $||f_0|| = ||f||$,

其中 $||f_0|| = \sup\{|f_0(x)| : ||x|| \leqslant 1, x \in X_0\}$.

定理 0.1.1 称为Hahn-Banach 保范扩张定理.

推论 0.1.1　设 X 是赋范线性空间, $x_0 \in X$ 且 $x_0 \neq 0$, 则存在 $f \in X^*$ 满足 $f(x_0) = ||x_0||$ 且 $||f|| = 1$.

推论 0.1.1 表明赋范线性空间 X 上的连续线性泛函是丰富的, 它可以分离 X 中任何两点即 $\forall x, y \in X, x \neq y$, 则存在 $f \in X^*$, 使 $f(x) \neq f(y)$.

设 X 是一个 Banach 空间, 对 $\forall x \in X$, 定义

$$J_x(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*,$$

则 J_x 是定义在 X^* 上的一个连续线性泛函, 即 $J_x \in X^{**}$.

定义 0.1.2 称 Banach 空间 X 是自反的, 是指对 $\forall x^{**} \in X^{**}$, 存在 $x \in X$ 满足 $x^{**} = J_x$, 即对 $\forall f \in X^*$ 有

$$x^{**}(f) = J_x(f).$$

对于赋范空间 $X, \{x_n\} \subset X, x \in X$, 有以下两种收敛:

(1) 强收敛 (按范数收敛) $||x_n - x|| \to 0 \ (n \to \infty)$;

(2) 弱收敛 对 $\forall f \in X^*, f(x_n) \to f(x) \ (n \to \infty)$.

对于共轭空间 $X^*, \{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$, 有以下三种收敛:

(1) 强收敛 $||f_n - f|| \to 0 \ (n \to \infty)$;

(2) 弱收敛 对 $\forall x^{**} \in X^{**}, x^{**}(f_n) \to x^{**}(f) \ (n \to \infty)$;

(3) 弱 * 收敛 对 $\forall x \in X, f_n(x) \to f(x) \ (n \to \infty)$.

用 "$\xrightarrow{||\cdot||}$", "$\xrightarrow{W}$", "$\xrightarrow{W^*}$" 分别表示强收敛、弱收敛、弱 * 收敛.

当 X 是自反 Banach 空间时, 弱收敛与弱 * 收敛等价, 一般情况, 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱 * 收敛.

定理 0.1.2 设 X 是自反 Banach 空间, $\{x_n\}$ 是 X 中有界列, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x \in X$, 使 $x_{n_k} \xrightarrow{W} x$.

设 X, Y 是两个赋范线性空间, $L(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续线性算子全体, 赋予范数

$$||T|| = \sup\{||Tx|| : ||x|| \leqslant 1\},$$

那么 $L(X, Y)$ 是一个赋范空间. 特别地, 当 Y 是 Banach 空间时, $L(X, Y)$ 也是Banach 空间.

下面给出支撑线性泛函分析理论的几个著名定理:

定理 0.1.3 (共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间, $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset L(X, Y)$. 若对每个 $x \in X$, 有

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} ||T_\lambda x|| < +\infty,$$

则 $\sup\limits_{\lambda} ||T_\lambda|| < +\infty$.

定理 0.1.4 (逆算子定理) 设 X, Y 是两个 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$, 若 T 既是单射又是满射, 则 $T^{-1} \in L(Y,X)$.

定理 0.1.5 (闭图像定理) 设 X, Y 是两个 Banach 空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 如果图像

$$\mathrm{Graph}(T) = \{(x,y) \in X \times Y : y = Tx, x \in X\}$$

是 $X \times Y$ 中的闭集, 则 $T \in L(X,Y)$.

定义 0.1.3 设 M 是 Banach 空间 X 中一闭子空间, 称 M 是**拓扑可补的**, 是指存在闭子空间 L, 满足

(1) $M \cap L = \{0\}$;

(2) $M + L = X$.

根据拓扑可补子空间的定义, 对每个 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in M, z \in L$ 使

$$x = y + z.$$

于是, 定义投影算子 $P_M : X \to M$ 及 $P_L : x \to L$ 分别为 $P_M x = y, P_L x = z$, 由逆算子定理可以证明 $P_M \in L(X,M), P_L \in L(X,L)$.

一般情况, Banach 空间 X 中的任一闭子空间未必存在拓扑可补的空间, 常用的拓扑可补子空间包括有限维子空间与有限余维子空间.

在大多数偏微分方程中, 微分算子不能成为某个 Banach 空间上定义的连续线性算子, 它只能定义在一个稠密的子空间上.

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, X_0 是 X 的一个稠密子空间 (即 $\bar{X}_0 = X$), $T : X_0 \to Y$ 是线性算子, 记 $X_0 = D(T)$ 为 T 的定义域; 图像 $\mathrm{Graph}(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ 及值域 $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$, 核空间 $\ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$.

定义 0.1.4 称算子 T 是**闭的**, 如果图像 $\mathrm{Graph}(T)$ 是 $X \times Y$ 中的闭集.

注意, 这里不能用闭图像定理推出 $T \in L(X,Y)$, 因为 $D(T)$ 一般不等于 X, 所以 $D(T)$ 不一定是 Banach 空间.

设 T 是闭算子, 定义

$$Y_0^* = \{g \in Y^* : \text{存在常数} c > 0, \text{成立} \quad |g(Tu)| = |\langle g, Tu \rangle| \leqslant c\|u\|, \forall u \in D(T)\},$$

则 Y_0^* 是 Y^* 的子空间. 对每个固定的 $g \in Y_0^*$, 定义 $D(T)$ 上的线性泛函为

$$f(u) = g(Tu),$$

那么 f 是 $D(T)$ 上连续线性泛函, 根据 Hahn-Banach 定理, f 可保范扩张为 X 上连续线性泛函. 又 $\overline{D(T)} = X$, 则扩张是唯一的, 即 $f \in X^*$. 于是定义 T 的共轭算子为 $T^* g = f, D(T^*) = Y_0^*, T^* : D(T^*) \to X^*$.

设 X 是任一 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭空间, M,N 是 X,X^* 中的非空集合, 记

$$M^{\perp}=\{f\in X^*:f(x)=0,\forall x\in M\},\quad N^{\perp}=\{x\in X:f(x)=0,\forall f\in N\}.$$

定理 0.1.6 (闭值域定理) 设 T 是闭算子且 $R(T)$ 是闭的, 则

(1) $R(T^*)$ 是闭的;

(2) $R(T)=\ker(T^*)^{\perp}$;

(3) $R(T^*)=\ker(T)^{\perp}$.

定义 0.1.5 设 $T\in L(X,Y)$, 称 T 是紧的, 是指 T 将 X 中有界集映成 Y 中相对紧集.

对于从 X 到 X 的紧算子, 有

定理 0.1.7 设 $T\in L(X,X)$, T 是紧的, 则

(1) $\ker(I-T)$ 是有限维的;

(2) $R(I-T)$ 是闭的;

(3) $\ker(I-T)=\{0\}$ 当且仅当 $R(I-T)=X$;

(4) $\dim(\ker(I-T))=\dim(\ker(I-T^*)$.

下面给出算子正则集与谱集的概念:

定义 0.1.6 设 $T\in L(X,X)$,

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:(\lambda I-T)^{-1}\in L(X,X)\},$$

$$\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$$

分别称为 T 的正则集与谱集.

根据定义, 容易证明, $\rho(T)$ 是开集, $\sigma(T)$ 是闭集. 特别当 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足: 存在 $x\in X,x\neq 0$ 使 $Tx=\lambda x$ 时, 称 λ 为 T 的特征值, 记 T 的特征值全体为 $\sigma_P(T)(\subset\sigma(T))$, 称 $\sigma_P(T)$ 为 T 的点谱.

定理 0.1.8 (Riesz-Schauder) 设 $T\in L(X,X)$ 且 T 是紧算子, $\dim X=\infty$, 则

(1) $0\in\sigma(T)$, 且当 $\lambda\neq 0\ \in\sigma(T)$ 时, $\lambda\in\sigma_P(T)$;

(2) $\sigma(T)$ 是一个至多可列集; 特别地, 当 $\sigma(T)$ 是可列集时, 有

$$\sigma(T)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\},$$

且 $\lambda_n\to 0(\lambda_n\neq 0)$.

设 X 是数域 K 上的一个线性空间, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle:X\times X\to K$ 满足

(1) $\langle x,x\rangle\geqslant 0,\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$;

(2) $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle,\forall x,y,z\in X,\alpha,\beta\in K$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
称 $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 为 X 上定义的一个内积, 此时称 X 在该内积下为内积空间. 定义

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

则内积空间也是赋范线性空间.

定义 0.1.7 称内积空间 X 是Hilbert 空间, 是指该内积空间作为赋范线性空间是 Banach 空间.

为了方便, 下面仅讨论 Hilbert 空间.

对于一个 Hilbert 空间 X, 可引入正交的概念. $x, y \in X, x\perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$. 在 Hilbert 空间中, 常用的是平行四边形公式即

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \forall x, y \in X.$$

定理 0.1.9 设 M 是 Hilbert 空间 X 的一个非空闭凸子集, $x \in X$, 定义

$$d(x, M) = \inf\{||x-y|| : y \in M\},$$

则存在 M 中唯一元素 y_* 满足

$$||x - y_*|| = d(x, M).$$

特别地, 当 M 是 X 的闭子空间时, 有 $x - y_* \perp M$ 即

$$\langle x - y_*, y\rangle = 0, \quad \forall y \in M.$$

由此可以推出下面著名的投影定理:

定理 0.1.10 设 M 是 X 的闭子空间, 记

$$M^\perp = \{y \in X : \text{对}\forall x \in M,\ \text{有} x\perp y\},$$

则对每个 $x \in X$, 存在唯一 $y \in M, z \in M^\perp$ 使

$$x = y + z.$$

根据定理 0.1.10, Hilbert 空间中每一个闭子空间都是拓扑可补的.

定理 0.1.11 (Riesz) 设 X 是 Hilbert 空间, $f \in X^*$, 则存在唯一 $z \in X$, 满足 $f(x) = \langle x, z\rangle$ 且 $||f|| = ||z||$.

定义 0.1.8 设 $T \in L(X, X)$, 称 T 是自共轭的, 是指

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

定理 0.1.12 设 T 是自共轭紧算子, 记

$$\sigma(T) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, \quad X_n = \ker(I - \lambda_n T),$$

这里 $\lambda_0 = 0, \lambda_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 那么对每个 $x \in X$, 有

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

这里 $x_n \in X_n$.

有关线性泛函的进一步内容, 读者可参见参考文献 [1]~[3].

0.2　仿紧空间与单位分解

仿紧空间是极其重要的一类拓扑空间, 它能保证每个闭集上的连续函数都能扩张成整个空间上的连续函数. 这里假定拓扑空间都是 Hausdorff 空间.

定义 0.2.1　设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间, 称 X 是仿紧的, 是指 X 的每个开覆盖都有局部有限的加细开覆盖即对 X 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 存在开覆盖 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 满足

(1) 对每个 V_λ, 存在某个 U_α 使 $V_\lambda \subset U_\alpha$;

(2) 对每个 $x \in X$, 存在 x 的邻域 $U(x)$ 使

$$\{\alpha \in I : U_\alpha \cap U(x) \neq \varnothing\}$$

是有限集.

定理 0.2.1 (Stone)　度量空间是仿紧的.

定义 0.2.2　设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是从 X 到 [0, 1] 的连续函数族, 称 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的单位分解, 是指

(1) 对 $x \in X$, 存在邻域 $U(x)$ 满足

$$\{\alpha : f_{\alpha | X \setminus U(x)} \neq 0\}$$

是有限集;

(2) 对每个 $x \in X$,

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1,$$

其中上面求和项中 $f_\alpha(x) \neq 0$ 的项数是至多可数的.

定理 0.2.2　设 X 是一个仿紧空间, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的一个局部有限开覆盖, 则存在 X 的单位分解 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 满足

(1) $f_{\alpha | X \setminus U_\alpha} = 0$;

(2) 对每个 $x \in X$,

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1,$$

其中求和项中仅有有限项非零.

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 记

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)\neq 0\}},$$

称 f 是紧支撑的, 是指 $\operatorname{supp} f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集, 又 f 是无穷次可微的, 记 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任何一个开集我们有如下的单位分解定理.

定理 0.2.3 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $\mathscr{B}$ 是 U 的任何一个开覆盖, 则存在可数多个 $f_i\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), i=1,2,\cdots$, 满足

(1) 对每个 i, 存在某个 $V\in\mathscr{B}$, 使 $\operatorname{supp} f_i\subset V$;

(2) 对每个 $x\in U$, 存在邻域 $N(x)$ 使

$$(\operatorname{supp} f_i)\cap N(x)\neq\varnothing$$

成立的 i 仅有有限多个;

(3) 对每个 $x\in U$, $f_i(x)\geqslant 0$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)=1,$$

其中求和项中仅有有限项非零.

有关拓扑空间的知识, 可参见文献 [4].

0.3 广义导数与 Sobolev 空间

由于微分算子在经典的连续函数空间中是无界的, 所以需将普通定义下的导函数定义作适当扩充, 以适应现代微分方程的发展. 相关理论是由苏联数学家 Sobolev 于 20 世纪三四十年代建立. 广义导数定义的核心思想是通过分部积分公式, 以积分为工具, 将光滑性差的函数导数通过光滑性好的函数导数来代替.

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ 是具有紧支撑的无穷次可微函数, 记这类函数的全体为 $C_c^\infty(\Omega)$, 通常称为试验空间.

设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 可测, 且对每个有界闭集 $K\subset\Omega$, 有

$$\int_K |u(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

记这类函数为 $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 即局部 Lebesgue 可积函数空间.

定义 0.3.1 对 $u\in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 如果存在 $v\in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 满足

$$\int_\Omega v\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega),$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 n 个非负整数组, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $D^\alpha\varphi=$

$\dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. 此时称 v 为 u 的 α阶广义导数, 记 $D^\alpha u = v$.

由实变函数的知识可很容易证明广义导数在几乎处处定义下是唯一的即在 $L_{\rm loc}(\Omega)$ 中, 广义导数如果存在, 则必是唯一的.

设 $p \geqslant 1$, 记

$$L_{\rm loc}^p(\Omega) = \{u: 对任何有界闭集K \subset \Omega, 有\ u \in L^p(K)\}.$$

定理 0.3.1　设 $p \geqslant 1$. 函数 $u \in L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 有弱导数 $D^\alpha u \in L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 的充要条件是存在函数序列 $\{u_m\} \subset C_{\rm c}^\infty(\Omega)$ 满足

(1) $\{u_m\}$ 在 $L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 中收敛于 u 即对任何有界闭集 $K \subset \Omega$ 成立

$$\int_K |u_m - u|^p {\rm d}x \to 0 \quad (m \to \infty);$$

(2) $\{D^\alpha u_m\}$ 在 $L_{\rm loc}^p(\Omega)$ 中收敛于 $D^\alpha u$ 即对任何有界闭集 $K \subset \Omega$ 成立

$$\int_K |D^\alpha u_m - D^\alpha u|^p {\rm d}x \to 0 \quad (m \to \infty).$$

利用定理 0.3.1, 可以证明一个十分有用的事实, 即若 $u \in L_{\rm loc}(\Omega)$ 且一阶弱导数 Du 存在, 则 $u^+ = \max\{u, 0\}, u^- = \min\{u, 0\}, |u| = u^+ - u^-$ 的弱导数均存在且有如下表示:

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & 当u > 0, \\ 0, & 当u \leqslant 0. \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0, & 当u > 0, \\ Du, & 当u \leqslant 0. \end{cases}$$

$$D|u| = \begin{cases} Du, & 当u > 0, \\ -Du, & 当u \leqslant 0. \end{cases}$$

定义 0.3.2　设 k 是正数数, $p \geqslant 1$, 记

$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): u$ 存在 α 阶广义导数 $D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant k\}$,

赋予范数

$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)},$$

这里 $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ 时, $D^\alpha u = u$. 此时, 称 $W^{k,p}(\Omega)$ 为 Sobolev 空间.

定理 0.3.2　Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间; 特别, 当 $p = 2$ 时, 在如下内积:

$$\langle u, v\rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}$$

下是 Hilbert 空间.

下面给出 Sobolev 空间的嵌入定理:

定义 0.3.3 设 X, Y 是两个 Banach 空间, 如果 $X \subset Y$, 且存在常数 $c > 0$, 满足

$$||x||_Y \leqslant c||x||_X, \quad \forall x \in X,$$

即恒等算子 $I : X \to Y$ 是有界线性算子, 称 X连续嵌入Y, 记为 "$X \subset Y$"; 如果 I 还是紧算子, 称 X紧嵌入Y, 记为 "$X \Subset Y$".

对于 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 的情形, 有如下常用的嵌入不等式:

定理 0.3.3 (Sobolev-Gagllardo-Nirenberg) 设 $1 \leqslant p < n$, 记

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

为 p 的 Sobolev 指数, 则

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

且存在常数 $c = c(p, n) > 0$, 满足

$$||u||_{L^{p^*}} \leqslant c||\nabla u||_{L^p}.$$

推论 0.3.1 设 $1 \leqslant p < n$, 那么 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [p, p^*]$.

推论 0.3.2 设 $p = n$, 那么 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), \forall q \in [0, +\infty)$.

定理 0.3.4 (Morrey) 设 $p > n$, 那么 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$; 进一步有常数 $c = c(p, n) > 0$, 满足

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c|x - y|^\alpha ||\nabla u||_{L^p},$$

这里 $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$.

注 由定理 0.3.4 知, 每个 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 都存在一个 $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^n)$, 满足 $u = \tilde{u}$ 几乎处处成立; 换言之, 每个 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 都有唯一的连续表示.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 为了研究 $W^{1,p}(\Omega)$ 的嵌入问题, 需要 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 有一定的光滑性.

对于 $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (\tilde{x}, x_n), \mathbb{R}^n_+ = \{(\tilde{x}, x_n) : x_n > 0\}$,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \quad Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^n_+, \quad Q_0 = \{x = (\tilde{x}, 0) : |\tilde{x}| < 1\}.$$

定义 0.3.4 称 Ω 是 C^m 类的, 如果对任一 $x \in \partial\Omega$, 有 x 的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域 U 和一映射 $H : Q \to U$ 满足

$$H \in C^m(\bar{Q}), \quad H^{-1} \in C^m(\bar{U}), \quad H(Q_+) = U \cap \Omega, \quad H(Q_0) = U \cap \partial\Omega,$$

这里 $m = 1, 2, \cdots, \infty$.

定理 0.3.5　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开集且是 C^1 类的, 那么

(1) 若 $1 \leqslant p < n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$;

(2) 若 $p = n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$;

(3) 若 $p > n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

关于紧嵌入我们有

定理 0.3.6 (Rellich-Kondrachov)　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开集且是 C^1 类的, 那么

(1) 若 $1 \leqslant p < n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*)$;

(2) 若 $p = n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$;

(3) 若 $p > n$, 则 $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$.

在研究椭圆型方程的 Dirichlet 边界问题时, 需要一类特殊的 Sobolev 空间.

定义 0.3.5　设 $1 \leqslant p$, 用 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包, 即

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)} \text{在} W^{k,p}(\Omega) \text{中}.$$

根据定义, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 仍然是 Banach 空间, 特别地, 当 $p = 2$ 时, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 此时记为 $H_0^k(\Omega)$.

注　对于 $W_0^{k,p}(\Omega)$, 不需要边界是 C^1 类的, 上述关于 $W^{k,p}(\Omega)$ 的嵌入定理均成立.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, u 是定义在 $\bar{\Omega}$ 上的函数, 且满足 β 阶 ($\beta \in (0,1)$)Hölder 条件即

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c|x - y|^\beta \quad c > 0 \text{是常数}, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

记

$$[u]_\beta \triangleq \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta}$$

及函数空间

$$C^{m,\beta}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\bar{\Omega}) : [D^\alpha u]_\beta < \infty \text{当} |\alpha| = m\}.$$

定义范数

$$||u||_{m,\beta} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha| = m} [D^\alpha u]_\beta,$$

则 $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间.

定理 0.3.7　设 k 是正整数, $1 \leqslant p < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界开集, 则

(1) 当 $k < \dfrac{n}{p}$ 时, $W_0^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), q = \dfrac{np}{n - kp}$;

(2) 当 $k \geqslant \dfrac{n}{p}$ 时, $W_0^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$;