“十二五”国家重点图书出版规划项目

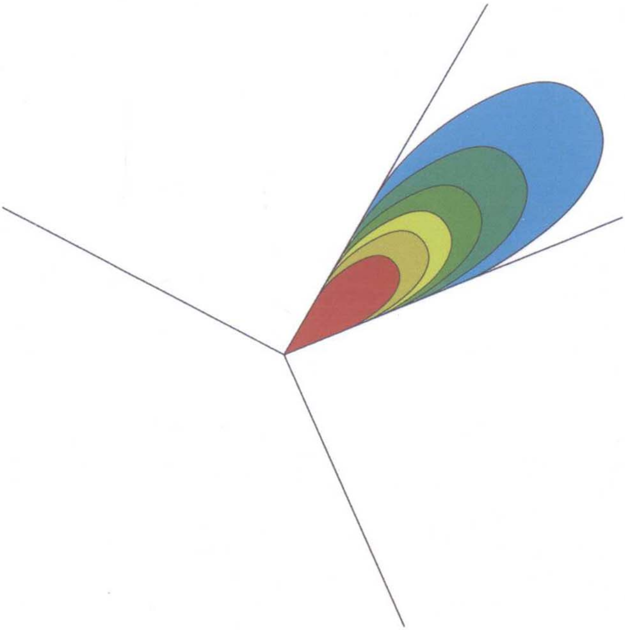
走向数学丛书

SCIENCE & HUMANITIES

凸性

CONVEXITY

著 史树中



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

凸 性

CONVEXITY

著 史树中

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

凸性 / 史树中著. — 大连:大连
理工大学出版社，2011.5
(走向数学丛书)
ISBN 978-7-5611-6171-5

Ⅰ. ①凸… Ⅱ. ①史… Ⅲ. ①凸集—普及读物②凸函数—普及读物 Ⅳ. ①O174.13-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 065846 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

沈阳新华印刷厂印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　印张:5.875　字数:98 千字
2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　王　伟　责任校对:任俊杰　李　慧
封面设计:孙　元　齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6171-5　定　价:25.00 元

续编说明

自从1991年“走向数学”丛书出版以来，已经出版了三辑，颇受我国读者的欢迎，成为我国数学传播与普及著作的一个品牌。我想，取得这样可喜的成绩主要原因是：中国数学家的支持，大家在百忙中抽出宝贵时间来撰写此丛书；天元基金的支持；与湖南教育出版社出色的出版工作。

但由于我国毕竟还不是数学强国，很多重要的数学领域尚属空缺，所以暂停些年不出版亦属正常。另外，有一段时间来考验一下已经出版的书，也是必要的。看来考验后是及格了。

中国数学界屡屡发出继续出版这套丛书的呼声。大连理工大学出版社热心于继续出版；世界科学出版社（新加坡）愿意出某些书的英文版；湖南教育出版社也乐成其事，

尽量帮忙。总之，大家愿意为中国数学的普及工作尽心尽力。在这样的大好形势下，“走向数学”丛书组成了以冯克勤教授为主编的编委会，领导继续出版工作，这实在是一件大好事。

首先要挑选修订重印一批已出版的书；继续组稿新书；由于我国的数学水平距国际先进水平尚有距离，我们的作者应面向全世界，甚至翻译他们的优秀著作。

我相信在新的编委会的领导下，丛书必有一番新气象。

我预祝丛书取得更大成功。

王 元

2010 年 5 月于北京

编写说明

从力学、物理学、天文学，直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了

解.这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书,其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员、非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容.这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用.显然,要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事.首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解.从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说.但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为“走向数学”撰稿.这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社的支持,得以出版这套“走向数学”丛书,谨致以感谢.

王　元

1990 年于北京

目　录

一

凸集

§1.1 凸=高于周围

我们知道汉字起初是一种象形文字，但是今天的汉字绝大多数已无形可象. 即使如“日月山水”等几个最“象”的字来看，不看它们的甲骨文原形，也很难“象”出来. “凹凸”二字似乎是仅有的例外. ①按照通常汉语词典中的解释，

①对此笔者请教了古文字学家林沄教授，他的回答摘要如下：“关于‘凹凸’两字实在不属于我们古文字学的范围. 在先秦古文字中至今没有见到过. ……东汉许慎编的《说文解字》中也没有这两个字. 出现这两个字最早的著作现在查到的是晋代葛洪(281？—341)著《抱朴子》. ……可以推论，凹凸这两个字是魏晋时代新造的象形字，用抽象的几何图形概括洼下和突起这两个概念. 中国文字发展的一般规律是原始象形字、会意字被形声字取代，凹凸两字却相反，这是很有趣的.”

“凹”的含义是“低于周围”，而“凸”的含义是“高于周围”，完全如同这两个字所表现的形状.

我们这本数学小册子的题目叫做“凸性”，顾名思义，就是要研究一种“高于周围”的性质. 它是用来刻画物体的形状的，因而是一种几何性质. 说到“高于周围”，自然是指某个几何图形的某个点的性质. 但是这样的说法很含糊，因为“高低”是相对的，“周围”也有待明确.

为了使这本小册子适合于中学生水平，下面我们将主要讨论平面图形. 但是以后我们将看到，这并没有使我们的讨论有很大的局限性. 对于立体图形以及更一般的图形来说，绝大部分的结果都是类似的.

我们现在来琢磨一下，对于一个平面图形来说，日常所说的凹凸是什么意思. 这点可以从考察“凹凸”这两个字谈起. 从这两个字来看，所谓“低于周围”和“高于周围”的含义都是指的这两个字的边界（框）的中上部与周围的比较. 因此，首先我们可以肯定，“凹性”与“凸性”都是一个图形的边界上的点的性质. 既然它们都是对图形而言的，我们就应该注意到，对于“凹”与“凸”所说的“低于周围”与“高于周围”的含义是不一样的. 从“凸”字来看，其边界点上的“凸点”不但比周围的边界点高，也比周围的在图形内部的点高；而从“凹”字来看，其边界上的“凹点”虽然比周围的边界点低，但并不比周围的在图形内部的点低. 注意到这点是很重要的.

这就是说,"凹"与"凸"的区别并不是"凵"和"冂"的区别.对于后两者来说,把两者之一颠倒一下,就没有区别了,而"凹"、"凸"两字不管怎么变方向,由于还要考虑图形的内部,都不会使原有的"凹性"与"凸性"颠倒.就像对一个齿轮来说,人们对齿轮边界上的点的"凹性"与"凸性",并不因为齿轮的位置变化而改变看法.这同时也说明,"高低"都是指所考察的点相对于对图形来说的某一方向而言的,而不是对事先已定好的与图形无关的固定方向而言的.

现在我们对"凹凸"的认识比原有的粗略的感觉已经进了一步.但是为了更确切地刻画"凹点"与"凸点",还需作一些更明确的规定.

定义 1 对一个(平面)图形来说,其边界上的一个点称为**凸点**,是指对于某个方向而言,它比在其周围的图形内部的点要高;其边界上的一个点称为**凹点**,是指对于某个方向而言,在其周围的比它低的点都是图形内部的点.

这个"定义"已对我们通常理解的凹凸有所加工,其中最引人注目的是我们只让所讨论的点与其周围的图形内部点比"高低",而不问其如何与周围的图形边界点比"高低".同时,这里对凹点作了比"低于周围"更确切的说法.这些和我们日常判断凹凸稍有不同.我们所说的凹凸比通常理解的要宽松些,其中允许该点周围的图形边界上的点与该点"不分高低".于是有可能出现既是凸点也是凹点的"平点".

我们通常理解的凸点和凹点可以称为**严格凸点**和**严格凹点**,它们将被定义为不是凹点的凸点和不是凸点的凹点.这时,我们可以看到,严格凸点将对某一方向比其周围的边界点高,而严格凹点则反之.但是把这两个性质作为严格凸、凹点的定义显然是不合适的,因为如果不考虑图形的内部,这样的定义是无法区别(严格)凸与凹的.

虽然我们已在这里抓住了确定凹性与凸性的关键,但是这个"定义"还不能算是一个完整的数学定义,因为什么是"图形"、什么叫一个"图形"的"边界"和"内部"、什么叫一个点的"周围"、怎样衡量"高低"等等都需进一步说明.不过,对于中学平面几何中所遇到的三角形、多边形、圆等图形,这些概念都是明确的.我们先来对这些图形讨论它们的边界点的凹性与凸性.

最简单的平面图形是三角形.三角形的内部与边界的含义都很清楚.我们可以看到,三角形的边界上的点都是凸点,但只有三个顶点是严格凸点.对于三条边的内部的点来说,指向三角形外部的所在边的垂线方向就是"定义"所要求的方向.对于这样的方向来说,该点周围的图形内部的点都比它低.同时它周围比它低的点也一定是图形内部的点,即它们同时也是凹点.而对于三角形的顶点来说,我们总能找到某个"凸方向",使得对这个方向而言,它高于周围的三角形的内部点和边界点.例如,在图1中,对于三角形 ABC

的顶点 A 来说，DA 与 EA 之间的任何向三角形外的方向都是“凸方向”，即使是 A 高于周围的图像内部点的方向，这里 DA 垂直于 AB，EA 垂直于 AC. 但不再存在任何方向，使得对该方向而言，低于它的周围的点是三角形内部的点. 因而它们都是严格凸点.

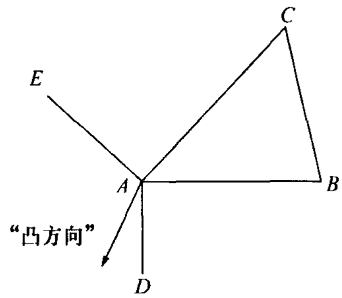


图 1　三角形

对于多边形来说情况有点不同. 一个多边形的边界上的点不一定都是凸点；即并非是每一个多边形的顶点都一定是(严格)凸点. 所谓**凸多边形**就是其所有边界点都是凸点的多边形. 它也就是每一内角都小于 π 的多边形. 平行四边形、梯形、正多边形等都是凸多边形(见图 2). 验证凸多

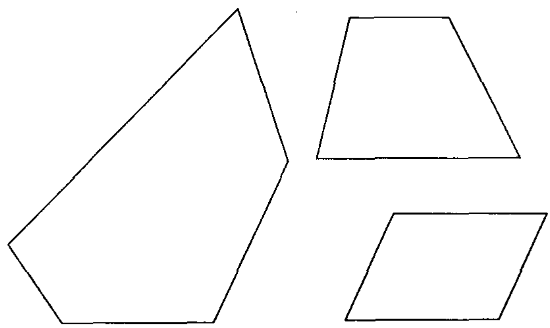


图 2　凸多边形

边形的边界点的凸性的方向与三角形情形一样选择. 但是

只有凸多边形，而没有“凹多边形”，即不存在其每一边界点都是“凹点”(从而其所有内角都大于 π)的多边形．这是因为多边形的内角和为 π 的(边数－2)倍，所以它至少有 3 个内角小于 π．

上述这件事有普遍意义．如果我们称一个其所有边界点都是凸点的图形为**凸图形**，而其所有边界点都是凹点的图形为**凹图形**，那么我们可以看出，常见的图形中凸图形很多．除了凸多边形外，圆是一个例子，其中“凸性方向”就是边界点所对应的半径方向．圆心角小于 π 的扇形是又一个例子．一般的凸图形有如图 3 中那样的形状．凹图形则可看作凸图形的余集再并上其边界．这种图形并不多见．事实上，凹图形总是无界的，即无法把它限制在一个大圆内．这就是说，就如上面所说“凹多边形”是不存在的那样，有界的凹图形是不存在的．这件事即使对于用一条“绳圈”(无交叉点的连续封闭曲线)围成的图形来说也并非显而易见．本丛书中姜伯驹教授写的《绳圈的数学》将证明一个绳圈的“外角和”公式．利用它可以像证明不存在“凹多边形”那样来证明不存在(有界的)“凹图形”．但对于一般情形来说则无法利用这样的公式．由此也可说明这本小册子为什么像其他一些类似主题的书一样，题目中只带“凸”字，而不带“凹”字．虽然“凹”似乎是“凸”的反义词，其实“凹性”对于有界的图形(它自然比无界的图形有用得多)来说不可能像“凸性”

那样成为一种整体的几何性质.

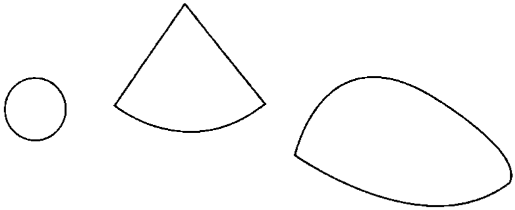


图 3　凸图形

还有一点要注意,对于一个图形来说,它的边界点并非不是凸点就一定是凹点. 有可能存在非凸非凹的“拐点”. 例如,当图形的边界的一部分有点像正弦函数图像时,对应正弦函数零点处的边界点就是非凸非凹的(见图 4 的 A 点). 这样一来,图形边界上有非凸点并不说明一定有严格凹点. 因此,一个非凸图形的边界上是否有严格凹点并不是显然的. 我们以后将证明下列结论:每个非凸图形的边界上至少有一个严格凹点.

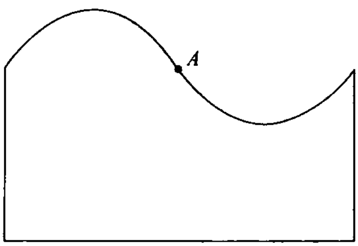


图 4　有非凸非凹点的图形

§1.2 凸＝四周鼓出

我们在上节已把人们日常对凹凸的感觉和理解精确为几何观念.虽然要把它们进一步数学形式化还需再加工,但这对训练有素的数学工作者来说已不是难事,这些都是属于“去粗取精,去伪存真”性的工作,是科学研究的开始.科学研究的深入将是由科学观念出发的“由此及彼,由表及里”.

然而,在做“由此及彼,由表及里”的工作以前,我们先要考察一下已形成的科学观念是否很有利于做这样的工作,是否还有更好的提法.从一个非常复杂的概念出发的研究是很难进行的.因此,人们总是寻求一个尽可能简单的理论出发点.

用这样的要求来看待我们在上节提出的凸性概念,人们有理由感到不满足.根据上节提出的“定义”,要鉴别一个图形是否是凸的,必须看它的边界上的每一个点是否是凸的.只要有一个点不是凸点,它就不是凸图形.由此出发来检验图形的凸性、研究凸图形的性质自然是十分费劲的.这样,如果有可能的话,我们应该设法来找一个更好的凸图形的定义.

我们现在来看看一个凸图形还有什么更简明的刻画