高等代数方法选讲

曹重光　张 显　唐孝敏 编著

科 学 出 版 社

高等代数方法选讲

曹重光　张　显　唐孝敏　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书通过例题系统地讲述了高等代数的思想与方法. 全书共18讲, 每讲均配有大量习题(包括习题答案与提示). 按方法而不是按内容编排例题与习题是本书的一大特点.本书有助于提升高等代数学习者的素质与能力.

本书可作为大学数学系选修课的教材, 也可供青年教师和报考研究生的同学参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数方法选讲/曹重光, 张显, 唐孝敏编著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031588-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①曹… ②张… ③唐… Ⅲ. 高等代数 Ⅳ. O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2011) 第113147号

责任编辑: 王 静 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年7月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2011年7月第一次印刷 印张: 16

印数: 1—2 500 字数: 320 000

定价: 30.00元

前言

研究一门数学课程的思想与方法对于提升学习者的数学素养与能力至关重要. 因此, 当今不少学校都开设了方法选讲课.

笔者曾几次为本科生开设高等代数方法选讲课, 多次为学生进行数学竞赛及考研辅导, 本书就是在这些讲稿的基础上重新整理而成的. 由于本书以阐述思想和方法为主要目的, 所以书中例题常常不是按教材的章节顺序编排, 而是以方法为线索进行编排. 然而, 考虑到读者的方便, 有时在讲方法之前也给出基础知识概述. 在阅读本书时, 我们希望读者注意本书对方法的阐述、说明、注记等部分以及对问题的分析, 仔细体会, 以便推陈出新. 书中所提出的方法有许多是在同类书中尚未见到的, 笔者希望本书所列的方法不仅对深入学习高等代数有益, 同时对学习其他课程, 甚至进行数学研究都能有所启发. 本书所选用的例题和习题有一部分是自编的, 它们是我们在多年教学和科研中积累和发现的, 有的甚至是我们科研论文中的小结论. 本书还对一些经典定理和传统题目给出了新的证法. 不难看出, 即使在基础课程的学习中, 创新也是可能的.

本书可作为大学数学系高年级的选修课教材, 也可供青年教师和报考研究生的同学参考. 作为教材使用时, 教师可根据学时、教学需要及学生情况作适当取舍. 此外, 本书前 4 讲的大多数内容对于报考数学以外各专业研究生的读者复习线性代数部分是适宜的.

本书在写作和出版过程中得到了黑龙江大学数学科学学院领导及代数教研室同事们的大力支持和帮助, 在此一并致谢.

探讨一门课程的思想和方法的工作是无止境的, 本书只不过是我们在这方面的某些体会而已. 由于本书是选讲, 更由于我们的水平有限, 所以不可能对所有问题都面面俱到, 甚至某些看法可能有偏颇也未可知, 疏漏和不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

曹重光　张　显　唐孝敏

2011 年 1 月

目　录

第 1 讲　矩阵的初等变换方法

初等变换的方法是线性代数的一种十分重要的方法，许多线性代数问题都可用它来解决. 在本讲及第 6, 7 两讲的应用举例中, 可以领会使用初等变换方法解决问题的途径与技巧.

1.1　基 础 知 识

以后如无特殊声明, 本书所说的矩阵都是数域 $\mathbf{F}$ 上的矩阵, 向量均指列向量. 因为实数域和复数域都是数域, 所以一切讨论当然适用于实矩阵和复矩阵.

一、初等变换的定义

定义 1.1　对某一矩阵施行的初等变换是指对该矩阵的行或列进行的如下三种变换的统称:

(1) 倍法变换: 将矩阵 A 第 i 行 (列) 的各元素分别乘以 $\lambda(\neq 0)$, 其余行 (列) 不动, 得矩阵 B, 则称对 A 施行了一次倍法变换, 可记为 $Ld_i(\lambda)A = B$ ($Rd_i(\lambda)A = B$).

(2) 消法变换: 将矩阵 A 的第 j 行 (列) 乘以 μ 加于第 i $(\neq j)$ 行 (列), 其余行 (列) 不动, 得矩阵 B, 则称对 A 施行了一次消法变换, 记为 $L\tau_{ij}(\mu)A = B$ ($R\tau_{ji}(\mu)A = B$).

(3) 换法变换: 将矩阵 A 的第 i 行 (列) 与第 j $(\neq i)$ 行 (列) 对调位置, 其余行 (列) 不动, 得矩阵 B, 则称对 A 施行了一次换法变换, 记为 $Lp_{ij}A = B$ ($Rp_{ij}A = B$).

定义 1.2　对矩阵的行 (列) 进行的倍法变换、消法变换和换法变换统称为初等行 (列) 变换.

二、三种初等变换的关系

三种初等变换本质上并不是相互独立的, 实际上有如下命题:

命题 1.1　任意一次换法变换可由三次消法变换和一次倍法变换实现.

证明　只证列变换的情况, 行的情形是类似的. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

易见

$$R\tau_{ji}(1)A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \overset{(i)}{a_i + a_j} & \cdots & \overset{(j)}{a_j} & \cdots & a_n \end{pmatrix} = B,$$

$$R\tau_{ij}(-1)B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \overset{(i)}{a_i + a_j} & \cdots & \overset{(j)}{-a_i} & \cdots & a_n \end{pmatrix} = C,$$

$$R\tau_{ji}(1)C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & -a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \end{array} = D,$$

$$Rd_j(-1)D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \end{array} = Rp_{ij}A. \quad \blacksquare$$

三、初等变换的性质

1. 初等行 (列) 变换是列 (行) 向量空间 $\mathbf{F}^n$ 的相应可逆线性变换限制作用在矩阵各列 (行) 上的结果

事实上, 对一切 $x = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)' \in \mathbf{F}^n$, 令

$$\sigma_1(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (i) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \lambda x_i & \cdots & x_n \end{pmatrix}' \end{array}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$\sigma_2(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{pmatrix}' \end{array}, \quad i \neq j,$$

$$\sigma_3(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_i + \mu x_j & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix}' \end{array}, \quad i \neq j.$$

容易验证, σ_1, σ_2, σ_3 均为 $\mathbf{F}^n$ 的线性变换, 并且是可逆的. 设 $A = (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$, 易见

$$Ld_i(\lambda)A = (\sigma_1 a_1 \quad \cdots \quad \sigma_1 a_n),$$

$$Lp_{ij}A = (\sigma_2 a_1 \quad \cdots \quad \sigma_2 a_n),$$

$$L\tau_{ij}(\mu)A = (\sigma_3 a_1 \quad \cdots \quad \sigma_3 a_n).$$

2. 初等矩阵是相应初等变换的相应线性变换在自然基下的矩阵

初等矩阵是指如下三种类型的矩阵:

$$\begin{aligned} &T_{ij}(\mu) = I + \mu E_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \ i \neq j, \ \mu \in \mathbf{F}, \\ &P_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \ i \neq j, \\ &D_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}, \quad i = 1, \cdots, n, \ \lambda(\neq 0) \in \mathbf{F}, \end{aligned}$$

其中用 E_{ij} 记第 i 行第 j 列为 1 而其他元素均为 0 的矩阵.

事实上, 以消法阵 $T_{ij}(\mu)$ 为例, 其相应初等变换即 $L\tau_{ij}(\mu)$, 相应线性变换即如上的 σ_3, 设 $\mathbf{F}^n$ 的自然基为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 其中 $e_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & (i) & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}' \end{array}$. 易见

$$\sigma_3(e_1 \quad \cdots \quad e_n) = (e_1 \quad \cdots \quad e_n)T_{ij}(\mu).$$

类似地有

$$\sigma_2(e_1 \quad \cdots \quad e_n) = (e_1 \quad \cdots \quad e_n)P_{ij},$$

$$\sigma_1(e_1 \quad \cdots \quad e_n) = (e_1 \quad \cdots \quad e_n)D_i(\lambda).$$

3. 初等变换的逆变换仍为该类型的初等变换

事实上, 由初等矩阵易见

$$T_{ij}(\mu)^{-1}=T_{ij}(-\mu),\quad D_i(\lambda)^{-1}=D_i(\lambda^{-1}),\quad P_{ij}^{-1}=P_{ij}.$$

4. 初等变换是可逆线性变换的乘法生成元

这个性质等价于说, **$\mathbf{F}^n$ 上任意可逆线性变换均可由形为 σ_1, σ_2 及 σ_3 的有限个变换相乘得到**. 注意到命题 1.1 所述, 它又等价于: **$\mathbf{F}^n$ 的任意可逆线性变换均可由形为 σ_1 和 σ_3 的有限个变换相乘得到**. 如果改用矩阵叙述, 则应有如下定理:

定理 1.1　设 A 为任意的 n 阶可逆矩阵, 则必存在若干个消法阵 $B_1,\cdots,B_t$ 及倍法阵 C, 使得 $A=B_1\cdots B_tC$.

证明　设 $|A|=a$, 令 $C=\mathrm{diag}(1,\ \cdots,\ 1,\ a)$ 及 $B=AC^{-1}$, 则 $|B|=1$, 故只需证 B 可写成若干个消法阵之积.

对阶数 n 应用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 显然. 假设对于小于 n 阶的矩阵, 命题成立, n 阶矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 分以下两种情形讨论:

(1) 当 $b_{11}\neq 0$ 时, 易见, B 可经一系列行消法变换化为

$$B_0=\begin{pmatrix} b_{11} & * \\ 0 & B_* \end{pmatrix}.$$

若 $b_{11}=1$, 则 $|B_*|=1$, 由归纳假设, B_* 可写成若干个消法阵之积, 从而不难看出, B 为有限个消法阵之积; 若 $b_{11}\neq 1$, 则易见

$$T_{21}(-b_{11})T_{12}(b_{11}^{-1}-1)T_{21}(1)B_0=\begin{pmatrix} 1 & \varDelta \\ 0 & B_\varDelta \end{pmatrix},$$

化为情形 $b_{11}=1$.

(2) 当 $b_{11}=0$ 时, 必有某个 k, 使得 $b_{k1}\neq 0$, 于是 $T_{1k}(1)B$ 为情形 (1). ∎

推论 1.1　经一系列行消法变换可使可逆矩阵 A 化为对角矩阵

$$\mathrm{diag}(1,\ \cdots,\ 1,\ |A|).$$

证明　将定理 1.1 的结论变形得到

$$B_t^{-1}\cdots B_1^{-1}A=C=\mathrm{diag}(1,\ \cdots,\ 1,\ |A|),$$

再由 $B_1^{-1},\cdots,B_t^{-1}$ 均为消法阵可得本推论. ∎

四、初等变换下矩阵的标准形

(1) 在一系列行消法变换下, 非零矩阵 $A_{m\times n}$ 可化为矩阵 B_1(称为 A 的**行阶梯形**,

简称为**阶梯形**),

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{rr} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$ (若 $A=0$, 则 A 的阶梯形定义为 0).

(2) 在一系列行消法变换及列换法变换下, A 可化为 B_2(称为 A 的**紧凑阶梯形阵**),

$$B_2=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & b_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{rr} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ii}\ (i=1,\cdots,r)$ 同 (1) 中定义. 进一步, 可化为

$$H=\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 在一系列初等变换下, A 能化为如下**标准形**:

$$M=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

并且 A 的标准形由 A 唯一确定.

(4) 矩阵的**等价分解** (**相抵分解**)为

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,$$

其中 P, Q 为适当可逆矩阵.

五、矩阵在初等变换下的不变量

(1) 初等变换不改变矩阵的秩. 当 $A\neq 0$ 时, 秩 A=A 的等价分解中的 r=A 的非零子式的最高阶数 = 矩阵的行 (列) 秩 (即行 (列) 向量组的秩); 当 $A=0$ 时, A 的秩定义为 0.

(2) 在初等行 (列) 变换下, 矩阵列 (行) 之间的线性关系不改变. 所谓矩阵 $A_{m\times n}=(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)$ **列之间的线性关系**是指

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0,$$

其中 $k_1,\cdots,k_n\in\mathbf{F}$ (行之间的线性关系可类似定义).

设 $A=(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)$ 经一系列初等行变换化为 $B=(\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n)$, 则有可逆矩阵 P, 使得 $PA=B$, 即 $P\alpha_i=\beta_i\ (i=1,\cdots,n)$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(k_i\alpha_i)=0 \Leftrightarrow P\sum_{i=1}^{n}(k_i\alpha_i)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(k_iP\alpha_i)=0\\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i=0,\end{aligned}$$

这正说明初等行变换不改变列之间的线性关系.

(3) 初等行 (列) 变换不改变某些列 (行) 之间的线性相关关系以及线性无关关系. 这是 (2) 的自然结论.

(4) 对线性方程组的增广矩阵施行初等行变换不改变线性方程组的解.

定理 1.2　对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $(A \quad b)$ 施行一系列初等行变换得 $(B \quad c)$, 则 $Bx=c$ 与 $Ax=b$ 同解.

证明　$(A \quad b)\to(B \quad c)$ 可写成 $D(A \quad b)=(B \quad c)$, 其中 D 为初等矩阵的积, 显然, $Ax=b$ 与 $DAx=Db$ 的解集合一致. ∎

六、初等块变换及初等块阵

设如下分块矩阵的运算可行:

(1) $\begin{pmatrix} I_m & X\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+XB\\ B\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} I_m & 0\\ Y & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ YA+B\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & I_m\\ I_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\\ A\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}CA\\ B\end{pmatrix}$, 其中 C 可逆.

如上 (1)~(3) 中左端第一个因子形式的矩阵分别称为**消法块阵**、**换法块阵**、**倍法块阵**, 总称为**初等块阵**. 用其左 (右) 乘矩阵, 相当于对矩阵施行块的初等行 (列) 变换. 例如, (1) 中的第一式可说成将 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ 的第二行块左边乘上 X 加于第一行块等.

设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, 则不难看出

$$\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\begin{pmatrix} I_m & x_{ij}E_{ij} \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

并且此乘积与顺序无关.

七、合同初等变换

所谓合同初等变换, 即

(1) 合同倍法变换. 将方阵 A 的第 i 行乘以 c $(c\neq 0)$, 再将第 i 列乘以 c.

(2) 合同消法变换. 将 A 的第 i 行乘以 λ 加于第 $j(\neq i)$ 行, 再将第 i 列乘以 λ 加于第 j 列.

(3) 合同换法变换. 将 A 的 $i, j(\neq i)$ 两行对换, 再将 i, j 两列对换.

1.2 应　　用

一、在行列式方面

某些行列式的性质完全可以用方阵的初等变换来叙述. 例如,

(1) 消法变换不改变方阵的行列式的值;

(2) 一次换法变换恰好改变方阵的行列式的符号;

(3) 一次倍法变换使方阵的行列式扩大相应的倍数.

这些可以直接用于行列式计算.

例 1.1 设 $2n$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ bI_n & aI_n \end{pmatrix}$, 计算 $|A|$.

解 经一系列行对换与列对换 (总计偶数次), 可将 A 化为

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right),$$

从而易见 $|A|=(a^2-b^2)^n$. ∎

例 1.2 计算 $A=\left(\dfrac{1}{x_i+y_j}\right)_{n\times n}$ 的行列式.

解 将 A 的第一列乘以 -1 加于其余各列得

$$|A|=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1} & \dfrac{y_1-y_2}{(x_1+y_1)(x_1+y_2)} & \cdots & \dfrac{y_1-y_n}{(x_1+y_1)(x_1+y_n)} \\ \dfrac{1}{x_2+y_1} & \dfrac{y_1-y_2}{(x_2+y_1)(x_2+y_2)} & \cdots & \dfrac{y_1-y_n}{(x_2+y_1)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1} & \dfrac{y_1-y_2}{(x_n+y_1)(x_n+y_2)} & \cdots & \dfrac{y_1-y_n}{(x_n+y_1)(x_n+y_n)} \end{vmatrix},$$

进行 $2n-1$ 次倍法变换可得

$$|A| = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(y_1-y_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_1)}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ 1 & \dfrac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dfrac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

再将上述行列式的第一行乘以 -1 加于其余各行得

$$|A| = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(y_1-y_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_1)}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ 0 & \dfrac{x_1-x_2}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)} & \cdots & \dfrac{x_1-x_2}{(x_1+y_n)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dfrac{x_1-x_n}{(x_1+y_2)(x_n+y_2)} & \cdots & \dfrac{x_1-x_n}{(x_1+y_n)(x_n+y_n)} \end{vmatrix},$$

再施行 $2(n-1)$ 次倍法变换, 然后按第一列展开得

$$|A| = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(y_1-y_i)(x_1-x_i)}{(x_1+y_1)\prod\limits_{i=2}^{n}(x_i+y_1)(x_1+y_i)}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

类似前面的方法, 最终有

$$\begin{aligned} |A| &= \left(\frac{1}{x_1+y_1}\prod_{i=2}^{n}\frac{(y_1-y_i)(x_1-x_i)}{(x_i+y_1)(x_1+y_i)}\right) \\ &\quad\cdot\left(\frac{1}{x_2+y_2}\prod_{i=3}^{n}\frac{(y_2-y_i)(x_2-x_i)}{(x_i+y_2)(x_2+y_i)}\right)\cdots\cdot \\ &\quad\cdot\left(\frac{1}{x_{n-2}+y_{n-2}}\prod_{i=n-1}^{n}\frac{(y_{n-2}-y_i)(x_{n-2}-x_i)}{(x_i+y_{n-2})(x_{n-2}+y_i)}\right) \\ &\quad\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_{n-1}+y_{n-1}} & \dfrac{1}{x_{n-1}+y_n} \\ \dfrac{1}{x_n+y_{n-1}} & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(y_j-y_i)(x_j-x_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_j)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 1.3 用初等变换方法证明行列式乘法定理.

证明 设 A, B 为 n 阶方阵.

(1) 当 A 可逆时, 由推论 1.1 知, A 可经一系列行消法变换化为对角矩阵

$$\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, |A|),$$

于是 AB 可经一系列行消法变换化为 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, |A|)B$, 从而 $|AB|$ 为 $|B|$ 的 $|A|$ 倍, 即 $|AB| = |A||B|$.

(2) 当 A 不可逆时, 则 A 的阶梯形为 $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$. 故一方面, $|A| \cdot |B| = 0 \cdot |B| = 0$; 另一方面,

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} B\right| = \left|\begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

此时仍有 $|AB| = |A| \cdot |B|$. ∎

例 1.4 用初等变换方法证明下述公式:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A|\,|C|,$$

其中 A, C 为方阵.

证明 (1) 当 C 不可逆时, 用一系列行消法变换可化 C 的最后一行为 0, 从而左端 $= 0 =$ 右端.

当 A 不可逆时, 用列消法变换可化 A 第一列为 0, 从而也有左端 $= 0 =$ 右端.

(2) 当 A, C 均可逆时, 由推论 1.1 知, A 及 C 分别可由一系列行消法变换化为对角矩阵 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, |A|)$ 及 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, |C|)$, 从而左端矩阵经一系列行消法变换可化为上三角矩阵, 并且对角线为 $1, \cdots, 1, |A|, 1, \cdots, 1, |C|$, 故其行列式的值为 $|A|\,|C|$. ∎

例 1.5 证明:

(1) 当 A 可逆时有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B|;$$

(2) 当 D 可逆时有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\,|A - BD^{-1}C|.$$

证明 (1) 将 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ 的第一行块左乘以 $-CA^{-1}$ 再加于第二行块得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix},$$

利用例 1.4 的结果易见 (1) 成立. 类似地, 可证 (2) 也成立. ∎

二、求矩阵的秩

由于矩阵的秩是矩阵初等变换下的不变量, 因而求矩阵的秩有下面的方法.

方法　将矩阵 A 经一系列初等行变换化成阶梯形阵, 其中非零行数即为 A 的秩.

例 1.6　证明

$$秩\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant 秩A + 秩B.$$

证明　经一系列初等变换 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 可化成

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & D_3 & D_4 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r =$ 秩 A, $s =$ 秩 B. 将矩阵 D 的第三行块左乘以 $-D_3$ 再加于第二行块, 然后进行行对换及列对换可得

$$\begin{pmatrix} I_r & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这足以说明原不等式成立. ∎

例 1.7　证明

$$秩(ABC) \geqslant 秩(AB) + 秩(BC) - 秩B.$$

证明　设计如下分块矩阵 D, 并进行块初等变换有

$$\begin{aligned} D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} &\xrightarrow{列} \begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{行} \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{行} \begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故

$$秩B + 秩(ABC) = 秩D = 秩\begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \geqslant 秩(BC) + 秩(AB),$$

其中不等号由例 1.6 得到, 于是原不等式成立. ∎

例 1.8　设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明:

(1) 秩 $(I_m-AA')-$ 秩 $(I_n-A'A)=m-n$;

(2) $|I_m-AA'|=|I_n-A'A|$.

证明　设 $B=\begin{pmatrix} I_m & A \\ A' & I_n \end{pmatrix}$, 对 B 进行块初等变换得

$$B\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix} I_m-AA' & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} I_m-AA' & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$$B\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n-A'A \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n-A'A \end{pmatrix},$$

由于初等变换不改变秩, 容易看出 (1) 成立. 再细察可知, 所有变换均块消法变换, 故行列式值不变, 于是有 (2) 成立. ▮

注 1.1　当例 1.8 中的 A 为实矩阵时, 例 1.8 有下面的证法.

设 A 的奇异矩阵分解为 $U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$, 于是

$$I_m-AA'=U\begin{pmatrix} I_r-DD' & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}U',$$

$$I_n-A'A=V'\begin{pmatrix} I_r-D'D & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}V,$$

由此易见 (2) 成立, 并且

$$\text{秩}(I_m-AA')=\text{秩}(I_r-DD')+m-r,\quad \text{秩}(I_n-A'A)=\text{秩}(I_r-D'D)+n-r,$$

从而 (1) 成立.

注 1.2　例 1.7 和例 1.8 介绍了一种证明关于矩阵的秩、行列式的等式和不等式的一种方法. 这种方法就是**设计适当的块阵, 然后经初等块变换改变其形式, 前后对比可得出一些关系**.

三、求矩阵的逆

原理　若 $(A\quad I)$ 可经初等行变换化为 $(I\quad B)$, 则存在可逆矩阵 P, 使得

$$P(A\quad I)=(I\quad B),$$

则 $PA=I$ 且 $B=P$, 因而 $B=A^{-1}$.

方法　将 $(A\quad I)$ 经一系列初等行变换化为 $(I\quad B)$, 则 $B=A^{-1}$.

例 1.9　给出如下矩阵可逆的充要条件, 并在可逆时求其逆矩阵:

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & b_{i-1} & 0 & \cdots & 0\\
a_1 & \cdots & a_{i-1} & 1 & a_{i+1} & \cdots & a_n\\
0 & \cdots & 0 & b_{i+1} & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

解　对 $(A\quad I_n)$ 进行一系列初等行变换得 $(A_1\quad B)$, 其中

$$
A_1=\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & b_{i-1} & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \Delta & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & b_{i+1} & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
B=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
-a_1 & \cdots & -a_{i-1} & 1 & -a_{i+1} & \cdots & -a_n\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

$\Delta=1-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}b_ka_k$. 由此易见, A 可逆的充要条件是 $\Delta\neq 0$. 进一步再进行初等行变换, 可求得

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix}
\delta_{11} & \cdots & \delta_{i-1\ 1} & -\dfrac{b_1}{\Delta} & \delta_{i+1\ 1} & \cdots & \delta_{n1}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\delta_{1\ i-1} & \cdots & \delta_{i-1\ i-1} & -\dfrac{b_{i-1}}{\Delta} & \delta_{i+1\ i-1} & \cdots & \delta_{n\ i-1}\\
-\dfrac{a_1}{\Delta} & \cdots & -\dfrac{a_{i-1}}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} & -\dfrac{a_{i+1}}{\Delta} & \cdots & -\dfrac{a_n}{\Delta}\\
\delta_{1\ i+1} & \cdots & \delta_{i-1\ i+1} & -\dfrac{b_{i+1}}{\Delta} & \delta_{i+1\ i+1} & \cdots & \delta_{n\ i+1}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\delta_{1n} & \cdots & \delta_{i-1\ n} & -\dfrac{b_n}{\Delta} & \delta_{i+1\ n} & \cdots & \delta_{nn}
\end{pmatrix},
$$

其中

$$\delta_{jk}=\begin{cases}\dfrac{a_jb_k}{\Delta}, & j\neq k,\\[2ex] 1+\dfrac{a_jb_k}{\Delta}, & j=k,\end{cases}\qquad j,k=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n. \blacksquare$$

四、求 $\mathbf{F}^n$ 中向量组的极大无关组, 并用其表示每个向量

例 1.10 求 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5\}$ 的一个极大无关组, 并用其表示组中每个向量, 其中

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(2\quad 1\quad 2\quad 3\quad -2)',\\ \alpha_2&=(7\quad 3\quad 1\quad 5\quad 1)',\\ \alpha_3&=(3\quad 1\quad -3\quad -1\quad 5)',\\ \alpha_4&=(5\quad 2\quad -1\quad 2\quad 10)',\\ \alpha_5&=(1\quad 1\quad 7\quad 7\quad 1)'.\end{aligned}$$

解 对矩阵 $(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\quad \alpha_5)$ 进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix}2&7&3&5&1\\1&3&1&2&1\\2&1&-3&-1&7\\3&5&-1&2&7\\-2&1&5&10&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&1&1&1&-1\\0&-5&-5&-5&5\\0&-4&-4&-4&4\\0&7&7&14&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&7&10\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-1&4\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&7&10\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&38/7\\0&1&1&0&-17/7\\0&0&0&7&10\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&38/7\\0&1&1&0&-17/7\\0&0&0&1&10/7\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因初等行变换不改变列之间的线性关系, 由最后的矩阵知, 1, 2, 4 列线性无关, 并且可以表示所有的列, 所以可选 α_1, α_2, α_4 作为一个极大无关组. 由最后的矩阵相应列之间的关系得

$$\alpha_1=\alpha_1,\quad \alpha_2=\alpha_2,\quad \alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\alpha_4=\alpha_4,\quad \alpha_5=\frac{38}{7}\alpha_1-\frac{17}{7}\alpha_2+\frac{10}{7}\alpha_4. \blacksquare$$