21世纪普通高等教育规划教材

高等数学习题课教程

第二版

（附练习册）

杨金远　潘淑平◎主编　　战学秋◎主审

Mathematics

化学工业出版社

21世纪普通高等教育规划教材

高等数学习题课教程

第二版

（附练习册）

杨金远　潘淑平　主编　　战学秋　主审

化学工业出版社

·北京·

本书是与同济大学数学系编《高等数学》（第六版）相配套的习题课教程。不仅符合最新“高等数学”课程教学基本要求，同时比较充分地考虑了普通高等院校的实际教学环境。

全书内容包括：教学基本要求、内容提要、典型解题类型与习题精选、课堂练习题（分A题：基本题，B题：提高题，C题：讨论题）、课后作业、阶段测验和高等数学实验指导，书末附有参考答案或提示。

本书可作为普通高等院校工学、理学、经济学、管理学各相关专业本、专科“高等数学”课程习题课教学用书或教学参考书，也可作为“高等数学”课程学习、训练与提高的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程/杨金远，潘淑平主编．—2版．—北京：化学工业出版社，2011.10

21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-122-12323-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①杨…②潘…　Ⅲ．高等数学-高等学校-习题集　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第188833号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　　文字编辑：郑　直

责任校对：陈　静　　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张21¼　字数544千字　2011年10月北京第2版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：38.00元

前　　言

高等数学习题课是高等数学课程教学中实现教学基本要求，提高教学质量的重要环节。本书第二版是在第一版的基础上，根据我们近年的教学实践，特别是分类分级教学改革的实践进行全面修订的。

本次修订保持了第一版的结构和风格，重点增加了思考讨论题，加大了应用题比例，对其他各类问题也进行了较大的修订，并改正了第一版中的个别错误。力争反映我们高等数学精品课程的建设成果，体现创新教学理念，遵循有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力的原则。

全书共分十三章。前十二章与同济大学数学系编《高等数学》（第六版）相配套，每章内容包括：教学基本要求、内容提要、典型解题类型与习题精选、课堂练习题（分 A 题：基本题，B 题：提高题，C 题：讨论题），另有课后作业和阶段测验（作为附册），第十三章是为了满足学生尽早接触数学软件的实际需要而编写的高等数学实验指导。

本书第一章由林峰编写，第二章、第十三章由张秀兰编写，第三章、第七章、第十一章由潘淑平编写，第四章由杨春雨编写，第五章、第十二章由杨金远编写，第六章、第八章由赵瑛编写，第九章由李喜军编写，第十章由赵树魁编写，各章的思考讨论题由陈巨龙编写。全书由杨金远、潘淑平负责统稿。

本次修订仍由战学秋教授主审，并提出了许多宝贵意见。本书在编写过程中得到了吉林化工学院教务处、理学院领导的关心和鼓励，得到了教材科、公共数学中心、数学系的支持和帮助，还得到了化学工业出版社的大力支持，谨在此一并表示衷心感谢。另外还要特别感谢对本书第一版提出宝贵意见的诸多同仁。

限于编者水平，诚望广大专家、同仁和读者对书中存在的问题继续给予批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目　　录

第一章　函数与极限 ······ 1
一、内容提要 ······ 1
二、典型解题类型与习题精选 ······ 4
三、课堂练习题 ······ 10
A 题　基本题 ······ 10
B 题　提高题 ······ 11
C 题　讨论题 ······ 11

第二章　导数与微分 ······ 13
一、内容提要 ······ 13
二、典型解题类型与习题精选 ······ 15
三、课堂练习题 ······ 21
A 题　基本题 ······ 21
B 题　提高题 ······ 22
C 题　讨论题 ······ 22

第三章　微分中值定理与导数的应用 ······ 23
第一课　微分中值定理与洛必达法则 ······ 23
一、内容提要 ······ 23
二、典型解题类型与习题精选 ······ 24
三、课堂练习题 ······ 29
A 题　基本题 ······ 29
B 题　提高题 ······ 30
C 题　讨论题 ······ 31
第二课　导数应用 ······ 31
一、内容提要 ······ 31
二、典型解题类型与习题精选 ······ 32
三、课堂练习题 ······ 38
A 题　基本题 ······ 38
B 题　提高题 ······ 39
C 题　讨论题 ······ 39

第四章　不定积分 ······ 40
一、内容提要 ······ 40
二、典型解题类型与习题精选 ······ 43
三、课堂练习题 ······ 50
A 题　基本题 ······ 50
B 题　提高题 ······ 51

C 题　讨论题 …… 52

第五章　定积分 …… 53
第一课　定积分的概念与基本公式 …… 53
一、内容提要 …… 53
二、典型解题类型与习题精选 …… 55
三、课堂练习题 …… 61
A 题　基本题 …… 61
B 题　提高题 …… 62
C 题　讨论题 …… 62
第二课　定积分的计算与反常积分 …… 63
一、内容提要 …… 63
二、典型解题类型与习题精选 …… 64
三、课堂练习题 …… 69
A 题　基本题 …… 69
B 题　提高题 …… 70
C 题　讨论题 …… 70

第六章　定积分的应用 …… 71
一、内容提要 …… 71
二、典型解题类型与习题精选 …… 73
三、课堂练习题 …… 80
A 题　基本题 …… 80
B 题　提高题 …… 81
C 题　讨论题 …… 82

第七章　微分方程 …… 83
一、内容提要 …… 83
二、典型解题类型与习题精选 …… 86
三、课堂练习题 …… 92
A 题　基本题 …… 92
B 题　提高题 …… 93
C 题　讨论题 …… 93

第八章　空间解析几何与向量代数 …… 95
一、内容提要 …… 95
二、典型解题类型与习题精选 …… 98
三、课堂练习题 …… 108
A 题　基本题 …… 108
B 题　提高题 …… 109
C 题　讨论题 …… 109

第九章　多元函数微分法及其应用 …… 111

第一课　多元函数微分法 ………… 111
一、内容提要 ………… 111
二、典型解题类型与习题精选 ………… 114
三、课堂练习题 ………… 120
A 题　基本题 ………… 120
B 题　提高题 ………… 121
C 题　讨论题 ………… 122
第二课　微分法在几何上的应用 ………… 122
一、内容提要 ………… 122
二、典型解题类型与习题精选 ………… 124
三、课堂练习题 ………… 130
A 题　基本题 ………… 130
B 题　提高题 ………… 131
C 题　讨论题 ………… 131

第十章　重积分 ………… 133
第一课　二重积分 ………… 133
一、内容提要 ………… 133
二、典型解题类型与习题精选 ………… 135
三、课堂练习题 ………… 141
A 题　基本题 ………… 141
B 题　提高题 ………… 142
C 题　讨论题 ………… 143
第二课　三重积分及应用 ………… 144
一、内容提要 ………… 144
二、典型解题类型与习题精选 ………… 146
三、课堂练习题 ………… 152
A 题　基本题 ………… 152
B 题　提高题 ………… 153
C 题　讨论题 ………… 153

第十一章　曲线积分与曲面积分 ………… 155
第一课　曲线积分 ………… 155
一、内容提要 ………… 155
二、典型解题类型与习题精选 ………… 158
三、课堂练习题 ………… 164
A 题　基本题 ………… 164
B 题　提高题 ………… 165
C 题　讨论题 ………… 166
第二课　曲面积分 ………… 166
一、内容提要 ………… 166
二、典型解题类型与习题精选 ………… 169
三、课堂练习题 ………… 177

A 题　基本题 …… 177
B 题　提高题 …… 178
C 题　讨论题 …… 179
第十二章　无穷级数 …… 180
第一课　数项级数 …… 180
一、内容提要 …… 180
二、典型解题类型与习题精选 …… 182
三、课堂练习题 …… 188
A 题　基本题 …… 188
B 题　提高题 …… 189
C 题　讨论题 …… 190
第二课　函数项级数 …… 190
一、内容提要 …… 190
二、典型解题类型与习题精选 …… 194
三、课堂练习题 …… 201
A 题　基本题 …… 201
B 题　提高题 …… 202
C 题　讨论题 …… 202

第十三章　高等数学实验指导 …… 203
一、MATLAB 软件入门知识 …… 203
二、高等数学部分数学实验 …… 221
三、练习思考题 …… 241

参考答案与提示 …… 242

第一章　函数与极限

本章教学基本要求

① 在中学已有函数知识的基础上，加深对函数概念的理解和函数性质（奇偶性、单调性、周期性）的了解.

② 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

③ 会建立简单实际问题中的函数关系式.

④ 理解极限的概念，了解极限 ε-N，ε-δ 的定义（不要求做给出 ε 求 N 或 δ 的习题）.

⑤ 掌握极限的有理运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

⑥ 了解极限的性质（唯一性、有界性、保号性）和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则），会用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限.

⑦ 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价无穷小求极限.

⑧ 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

⑨ 了解函数间断点的概念，会判别间断点的类型.

⑩ 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

一、内容提要

1. 函数的概念

设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域.

2. 函数的几个重要特性

(1) 有界性　设存在正数 M，使得对于一切 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界.

(2) 单调性　若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，若 $f(x_2)-f(x_1)<0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少.

(3) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 上有定义，若对任意一个 $x\in(-l,l)$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性　设函数 $f(x)$ 定义域为 D，若存在正数 l，使得对任意一个 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数.

3. 数列的极限

设$\{x_n\}$为一个数列．如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a\quad(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数a，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或者说数列$\{x_n\}$是发散的.

4. 收敛数列的性质

(1) 极限的唯一性　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

(2) 收敛数列的有界性　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它一定有界.

(3) 收敛数列的保号性　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$（或$a<0$），那么存在正整数$N>0$，当$n>N$时，都有$x_n>0$（或$x_n<0$).

(4) 收敛数列与其子数列的关系　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是$a$.

5. 函数的极限

定义 1　设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义．如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad\text{或}\quad f(x)\to A\quad(x\to x_0).$$

定义 2　设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义．如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad\text{或}\quad f(x)\to A\quad(x\to\infty).$$

6. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则这个极限唯一.

(2) 函数极限的局部有界性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$，有$|f(x)|\leqslant M$.

(3) 函数极限的局部保号性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），那么存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，都有$f(x)>0$（或$f(x)<0$).

(4) 函数极限与数列极限的关系　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\in N^+)$，则相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

7. 极限运算法则

① 有限个无穷小的和也是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③ 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

a. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

b. $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

c. 若有 $B\neq 0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

④ 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

则

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

c. 若有 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

⑤ 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，则 $a\geqslant b$.

⑥ 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$y=f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(x)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

8. 极限存在准则

准则Ⅰ　如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$和$\{z_n\}$满足下列条件：

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$,

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

9. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

10. 几个常用的等价无穷小

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

11. 函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

或

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

就称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续.

12. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

(2) 零点定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，则在开区间(a,b)内至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$.

(3) 介值定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$. 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

二、典型解题类型与习题精选

1. 函数定义域求法

确定某些简单的、具体的函数定义域问题并不困难，只需注意下面几点.

① 分式函数，分母不为零；

② 偶次根式下的代数式不能为负；

③ 对数的底数大于零且不等于 1；真数大于零；

④ 反三角函数 $\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$中的 $f(x)$满足$|f(x)|\leqslant 1$.

对于抽象函数的定义域问题，要依据函数定义及题设条件来确定.

【例 1.1】 设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{36-x^2}$，求 $f(x)$的定义域.

分析　分式函数，分母不为零；偶次根式下的代数式不能为负；对数的底数大于零且不等于 1；真数大于零. 由此确定不等式组，不等式组的解为定义域.

解　由题设应有 $2-x>0$，$2-x\neq 1$，且 $36-x^2\geqslant 0$. 故 $f(x)$的定义域为

$$[-6,1)\cup(1,2).$$

【例 1.2】 设 $f(x)$的定义域为$[1,2]$，求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

分析　由 $x+a$，$x-a$ 要在 $f(x)$的定义域内，确定 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

解　由题设应有 $1\leqslant x+a\leqslant 2$，即 $1-a\leqslant x\leqslant 2-a$；$1\leqslant x-a\leqslant 2$，即 $1+a\leqslant x\leqslant 2+a$.

当 $2-a\geqslant 1+a$，即 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[1+a,2-a]$；

当 $2-a<1+a$ 时，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为空集.

2. 函数的性质的讨论方法

(1) 函数的奇偶性　函数的奇偶性对于某些运算（如积分、求和等）来讲非常重要.

判断函数的奇、偶性只需依据函数奇偶性的定义：若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$称为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$称为奇函数.

应该强调，并非所有函数都有奇偶性，而且只有在某个对称区间上才能讨论函数的奇偶性.

【例 1.3】 判定函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$奇偶性.

分析　用奇函数和偶函数的定义，判断 $f(-x)$是否等于 $f(x)$.

解　因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=f(x)$，故 $f(x)$为偶函数.

（2）函数的单调性　注意，有些函数在定义的区间上不一定单调，但是在其定义的部分子区间上可能是单调的，因此，说函数单调一定要指明其单调区间．我们通常称在其定义域的一个子集上单调的函数为局部单调函数.

【例 1.4】　设 $f(x)$为定义在（$-l,l$）内的偶函数，若 $f(x)$在（$0,l$）内单调增加．证明 $f(x)$在（$-l,0$）内单调减少.

分析　利用偶函数定义 $f(-x)=f(x)$及单调性定义.

证　设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_1>-x_2$. 由于 $f(x)$在（$0,l$）内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$. 又 $f(x)$在（$-l,l$）内为偶函数，所以

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\\&=f(-x_2)-f(-x_1)<0.\end{aligned}$$

因此，当 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$时．有 $f(x_2)<f(x_1)$. 所以 $f(x)$在（$-l,0$）内单调减少.

（3）函数的周期性　讨论函数的周期性问题，一般是根据周期函数的定义考虑.

【例 1.5】　若 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称．试证明 $f(x)$为周期函数，并求出周期 T.

分析　函数图形的对称性也是常见的函数性质．图形关于直线 $x=a$ 对称，则有

$$f(a+x)=f(a-x).$$

证　要证 $f(x)$为周期函数，只要证 $f(x+T)=f(x)$即可．由于 $f(x)$为偶函数，有 $f(-x)=f(x)$，图形关于直线 $x=2$ 对称，即 $f(2+x)=f(2-x)$，即 $f(x)=f(4-x)$. 用 $-x$代替 x 得到 $f(-x)=f(4+x)$，由 $f(-x)=f(x)$得 $f(x)=f(x+4)$，即 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，$T=4$.

3. 数列极限的求法

求数列极限的常用方法有下面几种：

① 依据数列极限的定义（不做要求）；

② 依据数列极限存在的定理、法则；

③ 依据数列本身的变形；

④ 利用数列的递推关系；

⑤ 利用数列极限与函数极限存在的关系.

【例 1.6】　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，这里 a 为正的常数.

分析　用夹逼准则．$\sqrt[n]{a}$中开 n 次方是困难之处，需要将 a 放大为某个式子的 n 次方.

证　先考虑 $a\geqslant1$ 的情形．$a=1$ 结论显然.

若 $a>1$，记 $a=1+b$，$b\geqslant0$.

由 $\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n=1+n\dfrac{b}{n}+\dfrac{n(n-1)}{2!}\left(\dfrac{b}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{b}{n}\right)^n$，知　$\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n\geqslant1+b$.

故 $1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)=1$，由夹逼准则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时，记 $\dfrac{1}{a}=A$，则 $A>1$. 故　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{A}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}}=1.$

【例 1.7】 研究数列 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$（$n$ 重根号）的敛散性，如果收敛求出极限.

分析 $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$ 显然单调递增，只需找个界，用单调有界原理证明收敛. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=A$，求极限.

解 a_n 显然单增，只需证 $a_n<2$（用数学归纳法）：

$n=1$ 时，$a_1=1<2$，命题真；

设 $n=k$ 时，$a_k<2$，考虑 $n=k+1$ 的情形：

$a_{k+1}=\sqrt{1+a_k}<\sqrt{1+2}<2$，结论亦真，从而对任何自然数 n 均有 $a_n<2$.

综上，数列 a_n 单调、有界，故有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 因为 $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$，两边取极限得 $A=\sqrt{1+A}$，$A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$A=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）.

【例 1.8】 若 $n\in N^+$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

分析 用等差数列求和公式计算 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 的和.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{[1+(2n-1)]n}{2}}{n+3}-n\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n}{n+3}\right)=-3.$$

4. 函数极限的求法

求函数的极限主要有如下几种方法.

① 利用连续函数定义；

② 利用两个重要极限；

③ 利用等价无穷小量代换；

④ 利用其他一些定理（夹逼准则、有界函数与无穷小量乘积为无穷小等）；

⑤ 利用洛必达法则等其他方法（在后续课程中会讲到）.

【例 1.9】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2x-1}{\cos x-1}$.

分析 先化简再利用连续函数定义.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}(\cos x+1)=2.$$

【例 1.10】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$.

分析 注意 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，因此要用到有界函数与无穷小的积还是无穷小.

解 解法一
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right],$$

注意相乘的两部分函数的极限都存在，可以化成极限的乘积. 前一项用重要极限或者等价无穷小代换，后一项用有界变量与无穷小量乘积的极限等于 0，

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\times 0=0.$$

解法二　先利用等价无穷小代换，再利用有界函数与无穷小的积还是无穷小.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{2}=0.$$

【例 1.11】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

分析　这是一个 1^∞ 型的极限，求这类极限经常会用到重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{a}=\mathrm{e}^{2a}.$$

【例 1.12】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+x\sin 2x}{x^2}$.

分析　可以将几部分分开分别求极限，但是要注意每一部分极限都必须存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+x\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x+2x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}2\cos x\right)=3.$

【例 1.13】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x(\mathrm{e}^x-1)}{\ln(1+x)}+(1+2x)^{\frac{1}{x}}\right]$.

分析　$x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(\mathrm{e}^x-1)}{\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=1+\mathrm{e}^2.$

5. 函数连续性问题

【例 1.14】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$，判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否连续.

分析　函数表达式中有绝对值时，相当于分段函数．分段函数连续性的讨论主要是考察分段点处的左右极限是否相等.

解

$$f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0\\ 1, & x=0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

又 $f(0)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

【例 1.15】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对任意实数 x，y 有关系式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

分析　利用函数连续的定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ 来证明.

证　对任意 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，设 Δx 为增量，

由　　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 有 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$，

故　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+f(\Delta x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)$，

由于 $f(x)$在 $x=0$ 连续，故

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(0),$$

又由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，有 $f(0+0)=f(0)+f(0)$，故

$$f(0)=0,$$

因此有 $$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)+\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(x_0)+0=f(x_0),$$

即 $f(x)$在 x_0点连续，由 x_0的任意性知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续.

【例 1.16】 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且函数的值域也是$[a,b]$，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$，其中 $b>a$.

分析 利用闭区间上连续函数的性质进行证明时，常常需要构造函数，使之满足闭区间上连续函数的性质．本题求证存在一点函数值等于自变量，可以构造函数 $F(x)=f(x)-x$，应用零点定理证明.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$在$[a,b]$上连续.

① 若 $F(a)=0$（或 $F(b)=0$），则 $f(a)-a=0$（或 $f(b)-b=0$），则 $\xi=a$（或 $\xi=b$）即可.

② 若 $F(a)\neq 0$ 且 $F(b)\neq 0$，即 $f(a)\neq a$，$f(b)\neq b$，由 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ 知 $f(a)>a$，$f(b)<b$，即

$F(a)>0$ 且 $F(b)<0$，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$.

综上，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$使得 $f(\xi)=\xi$.

【例 1.17】 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a\leqslant c<d\leqslant b$，$p$，$q$ 为任意正数，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

分析 利用介值定理或者零点定理.

证 证法一 用介值定理．设 M，m 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则有

$$m\leqslant f(c)\leqslant M,$$

由于 $p>0$，故有 $$pm\leqslant pf(c)\leqslant pM,$$

同理有 $$qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$

所以 $$m\leqslant \frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

由介值定理知至少存在一点 $\xi,\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$，

即 $$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

证法二 构造辅助函数，用零点定理．令 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$，

显然函数 $F(x)$在$[a,b]$上连续，也在$[c,d]$上连续，

$$F(c)=q[f(c)-f(d)],\ F(d)=p[f(d)-f(c)],$$

① 若 $f(c)=f(d)$，则 $F(c)=F(d)=0$，取 $\xi=c$ 或 $\xi=d$，都有 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$；

② 若 $f(c)\neq f(d)$，则 $F(c)F(d)=-pq[f(d)-f(c)]^2<0$，即 $F(x)$在区间$[c,d]$端点函数值异号，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(c,d)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

综上所述，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

6. 综合举例

【例 1.18】 已知$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$，求常数 a，b.

解 由于 $x\to a$ 时，$x-a\to 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$，故此极限式必为$\dfrac{0}{0}$型且分子分母为同阶无穷小．将分子因式分解应含 $x-a$，即

$$x^2+bx+3b=(x-a)(x+c)\text{，其中 } c \text{ 为待定常数.}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+bx+3b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+c)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+c)=a+c=8.$$

又 $x^2+bx+3b=(x-a)(x+c)=x^2+(c-a)x-ac$，两边系数必须相等，有

$$\begin{cases} c-a=b, \\ -ac=3b, \\ a+c=8. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=16, \\ b=-4. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-4, \\ b=16. \end{cases}$$

【例 1.19】 四脚连线为正方形的椅子在相对光滑但不是平面的地面上通常只有三只脚着地，然而只需稍转动几次，就可以使四只脚着地．试用数学工具来证明.

证 设椅子四只脚底端为四个点，分别记为 A，B，C，D. 椅子绕四点中心旋转，角度记为 θ，如图 1-1 所示.

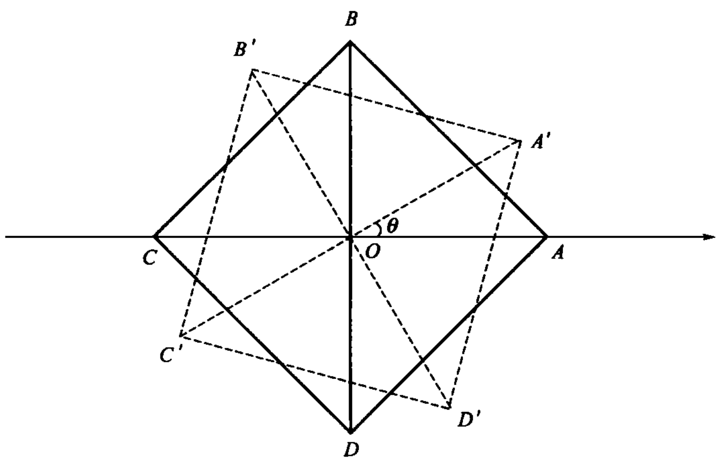

图 1-1

椅脚与地面的竖直距离是 θ 的函数，记 A，C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B，D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，则 $f(\theta)$和 $g(\theta)$都是非负连续函数．由于至少有三条腿着地，故对任意 θ 有 $f(\theta)$和 $g(\theta)$至少有一个为零．当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(0)=0$，$f(0)>0$. 所证问题即存在一个 θ_0 使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

由对称性知，将椅子旋转 90°有 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则有 $h(\theta)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续，且 $h(0)>0$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，由零点定理，必存在一个 $\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.