



北京市高等教育精品教材立项项目

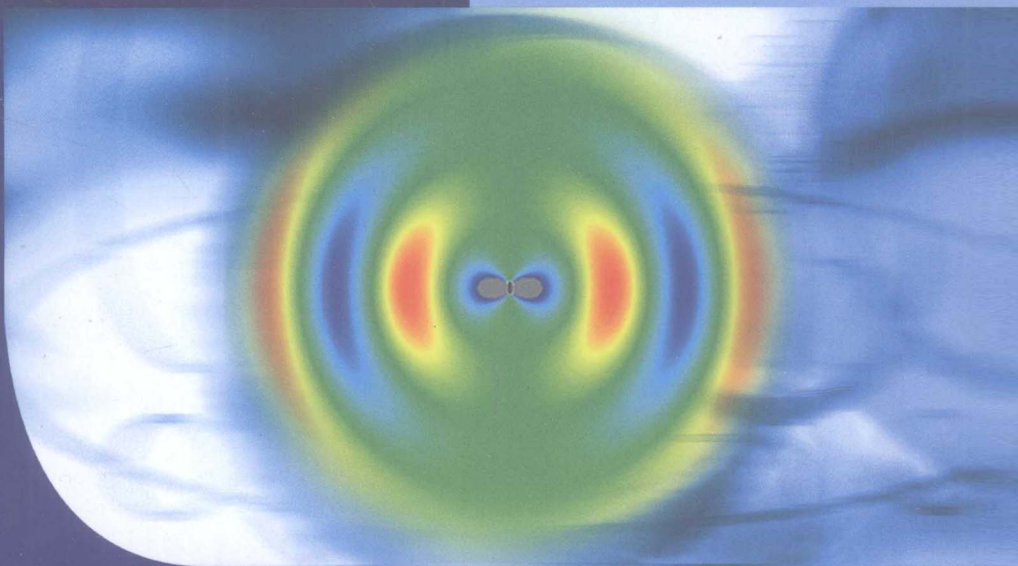


普通高等教育“十二五”电气信息类规划教材

简明电磁场 数值计算

© 王泽忠 编著

JIANMING DIANCICHANG
SHUZHJ JISUAN



免费电子课件



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

北京市高等教育精品教材立项项目
普通高等教育“十二五”电气信息类规划教材

简明电磁场数值计算

王泽忠 编著



机械工业出版社

本书以加权余量原理、单元网格划分、近似函数的插值构造及相关计算和单元积分为核心,构建了电磁场直接积分、电磁场边值问题微分方程和电磁场边值问题边界积分方程的数值计算体系。电磁场直接积分和边值问题涉及静电场、恒定电流场、恒定磁场以及准静态电磁场。方程式包括三维泊松方程和相应的边界积分方程,平行平面二维泊松方程和相应的边界积分方程,轴对称二维标量位泊松方程和轴对称二维矢量位双旋度方程。同时,详细介绍了直接数值积分法、有限元法和边界元法的基本原理和实施过程,并通过举例展示了数值计算方法与具体电磁场问题相结合得出的场分布特性,帮助读者加深对电磁场问题的理解,强化对数值计算方法的体验。附录中给出了典型算法的源程序代码。

本书是根据北京市高等教育精品教材立项编写的教材。可供电气工程专业本科高年级作为教材或参考书使用,也可供相关专业的研究生、教师、科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

简明电磁场数值计算/王泽忠编著. —北京:机械工业出版社,2011.6
北京市高等教育精品教材立项项目
普通高等教育“十二五”电气信息类规划教材
ISBN 978-7-111-34399-8

I. ①简… II. ①王… III. ①电磁场-数值计算-高等学校-教材
IV. ①TM153

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第100511号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:刘丽敏 责任编辑:刘丽敏 徐凡

版式设计:霍永明 责任校对:樊钟英

封面设计:张静 责任印制:乔宇

三河市国英印务有限公司印刷

2011年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·12.75印张·309千字

标准书号:ISBN 978-7-111-34399-8

定价:29.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者购书热线:(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版



前 言

本书是为普通高等学校电气工程类专业编写的电磁场数值计算教材。本书构建了自己独特的内容体系，凝聚了作者多年来从事电磁场教学和科学研究的心血。随着计算机和数值分析技术的发展，工程中越来越多的电磁场问题依靠数值计算得到解决。工程教育的内容要随着工程实践的发展而不断更新。电磁场数值计算作为研究生课程已经存在很多年了。而作为本科生课程，即使是作为选修课，也不过是近几年的事情。近年来，国内各大学普遍将电磁场课程改名为工程电磁场。这体现了面向工程的教学理念。与之相配套，对有志于在工程领域解决电磁场问题或者预期会遇到电磁场问题甚至只是对电磁场分析计算有兴趣的学生，开设电磁场数值计算课非常必要。一方面，通过电磁场数值计算课程的学习，可以加深对工程电磁场的理解；另一方面，学生可以学到更加实用的知识。当前不少大型企业和研究部门，购置了电磁场计算商业软件，而真正精通这些软件的人却很少。缺少掌握电磁场理论和数值计算方法的人才，软件的使用受到限制，无法发挥作用。编写本书也是为了促使有关高校在电气工程专业设置电磁场数值计算课程，使越来越多的本科毕业生掌握电磁场数值计算技术。

本书编写的原则是简明性、系统性、实用性和典型性。简明性是指只写简单内容、基本内容，不做全面扩展。到目前为止，电磁场数值计算方法可罗列出很多，不可能一一论述。系统性是指所选择介绍的方法，有共同的数学基础，构成完整的体系。本书所介绍的直接数值积分法、有限元法和边界元法，共同的数学基础是近似函数的插值法构造和等参坐标变换，数值积分是其共同的工具。对于其中的有限元法和边界元法，则进一步将其归结到加权余量原理的共同基础上。对于所选出的三种方法，论述其基本原理、离散化过程直到得出可用于编程的离散公式，形成逻辑严谨的方法体系。实用性指的是所介绍方法是通用方法、规范方法，一般不受场域形状、材料参数等限制，不涉及技巧性强、局限性大的方法。典型性是指所介绍的每一种方法都能代表一类方法，可以解决一类问题。本书仅限于低频电磁场，也就是静态场、恒定场和准静态场，尽量不涉及电磁波。将电磁场数值计算方法分为三类：第一类是已知全部场源，通过叠加和积分计算场量；第二类是通过求解微分方程计算场量，这一类方法包括有限元法、有限差分法等；第三类是通过求解积分方程计算场量，这一类方法包括场域积分方程法、边界元法、模拟电荷法、模拟电流法等。本书从这三类方法中选出有代表性的三种具体方法加以系统介绍。相信经过学习直接数值积分法、有限元法和边界元法，读者可以通过举一反三了解电磁场数值计算的全貌。有限差分法本来是有限元法平行的方法，由于其对网格要求高，在低频电磁场计算中逐渐淡出，但在高频、快速变化的电磁波的计算中却是另外一番景象。时域有限差分法已经成为电磁波计算的主要方法之一。模拟电荷法等方法，具有直观物理意义，针对特殊问题，计算简单、实用，但具有相当的技巧性，没有一套普遍和规范化的操作步骤，因此很难进入商业软件。

本书遵循先原理后算法的体例，介绍三种原理和方法：基于积分公式的直接数值积分法、基于微分方程边值问题的有限元法和基于积分方程边值问题的边界元法。第1章，介绍

自由空间中已知全部场源计算电磁场的积分公式，将矢量的积分全部展开为分量形式的标量积分。第2章，介绍以偏微分方程表述的各类电磁场边值问题，给出了根据对称性缩小求解场域、利用人工边界第三类边界条件截断无限场域和利用平行平面和轴对称概念对场域降维简化的方法。第3章，介绍静态场的边界积分方程，主要介绍利用格林定理从泊松方程导出边界积分方程的原理。第5章，介绍积分公式的离散化，将积分公式全部转化为可编程的数值积分公式。第6章，系统介绍有限元法的原理和实施步骤。主要涉及一般泊松方程的一维、二维和三维有限元法以及轴对称标量场和轴对称矢量场的二维有限元法。第7章，针对由泊松方程转化而来的边界积分方程，系统介绍一维、二维和三维边界元法。第4章是后三章中三种离散方法的共同数学基础。除有限元法和边界元法共同的方程离散化原理——加权余量原理外，主要介绍场域和边界的几何离散化，系统论述了由基函数线性组合构造近似函数的方法，重点介绍分块（片、段）插值方法构造基函数的原理，阐明单元形状函数与基函数的关系。通过等参变换，将整体实际坐标系下基函数及其对坐标的求导和积分运算，转换为标准单元局部坐标系下形状函数及其对坐标的求导和积分运算，并分别介绍了常用的线单元、三角形单元、四边形单元、四面体单元和六面体单元，这些单元根据其特点在直接数值积分、有限元和边界元法中选择使用。具体方法之后配有例题，这些例题中的结果都是作者亲自编程计算得到的。

在附录中，简单介绍了一种典型有限元软件——ANSYS软件。该软件是一种大型有限元工程软件，其电磁场模块可以直接用来计算电磁场工程问题。介绍这种典型软件，一方面希望读者见识大型工程软件，学会简单操作；其次，借用ANSYS软件的前后处理功能，配合本书算法构成完整的计算功能；最终将看不见的软件内部算法与有限元法的原理联系起来，加深对数值计算方法的理解，为进一步精通这些软件奠定基础。

书末附有主要算法的计算程序。读者只要将这些程序复制到计算机，就可以进行相应的练习。

本书作为本科教材，在内容的选取上，尽量做到简单。但为了体系的完整，难免还会有一些内容偏难。对于偏难的部分内容，建议有能力的读者自学，不做基本要求。

为方便教师教学，本书配有免费电子教学课件，欢迎选用本书作为教材的教师索取，索取邮箱：wzzh@ncepu.edu.cn（王泽忠），llm7785@sina.com。

王泽忠

目 录

前言

第 1 章 电磁场的积分公式	1	第 5 章 电磁场的直接数值积分法	88
1.1 静电场的积分公式	1	5.1 静电场的直接数值积分	88
1.2 恒定磁场的积分公式	9	5.2 恒定磁场的直接数值积分	96
1.3 正弦时变电磁场的积分公式	15	5.3 正弦时变电磁场的直接数值 积分	104
思考题 1	19	思考题 5	105
第 2 章 电磁场边值问题的微分方程	20	第 6 章 电磁场的有限元法	106
2.1 静电场的边值问题	20	6.1 有限元网格划分	106
2.2 恒定电流场的边值问题	24	6.2 泊松方程的有限元公式	107
2.3 恒定磁场的边值问题	25	6.3 轴对称场的有限元公式	117
2.4 准静态电场的边值问题	28	6.4 有限元法举例	122
2.5 准静态磁场的边值问题	29	思考题 6	133
2.6 小结	30	第 7 章 电磁场的边界元法	135
思考题 2	31	7.1 一维泊松方程的边界元法	135
第 3 章 电磁场边值问题的积分方程	32	7.2 二维泊松方程的边界元法	136
3.1 一维边界积分方程	32	7.3 三维泊松方程的边界元法	143
3.2 二维边界积分方程	36	思考题 7	150
3.3 三维边界积分方程	39	附录	151
3.4 电磁场问题与边界积分方程的 对应关系	42	附录 A 矢量分析与场论公式	151
3.5 直接积分方程和间接积分 方程	43	附录 B 平行平面场和轴对称场	155
思考题 3	43	附录 C ANSYS 软件使用简介	157
第 4 章 近似函数的插值构造与 单元积分	44	附录 D ANSYS 单元选用简介	159
4.1 加权余量原理	44	附录 E ANSYS 模型的导出	163
4.2 单元网格划分	46	附录 F ANSYS 结果的导入	165
4.3 近似函数的插值构造及 相关计算	48	附录 G 典型程序简要说明	165
4.4 单元积分计算	84	附录 H 部分典型程序 FORTRAN 源 代码清单	168
思考题 4	87	后语	194
		参考文献	195

第 1 章 电磁场的积分公式

本章通过回顾电磁场的基本概念，列出了静电场、恒定磁场中电场强度、磁感应强度、标量电位和矢量磁位的积分公式。除电荷、电流的点、线、面、体模型外，还给出了电偶极子、磁偶极子点模型和体分布模型产生电场强度、磁感应强度、标量电位和矢量磁位的积分公式。除静态和恒定场外还给出了正弦稳态时变电磁场电场强度、磁场强度和动态位的积分公式。这些积分公式不仅是计算电磁场的直接数值积分方法的依据，也是其他数值计算方法（如边界元法）的基础。为了后面数值计算的方便，积分公式最终全部展开成直角坐标系中的三个分量形式。复杂的积分公式给出了推导过程，便于读者理解掌握。

1.1 静电场的积分公式

1. 点电荷电场强度计算公式

根据电场强度的定义和库仑定律，可以得到在无限大真空中一个点电荷产生的电场强度计算公式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1-1)$$

式中， q 是点电荷的电荷量，单位为库（C）； R 是点电荷所在源点到场点的距离，单位为米（m）； \mathbf{e}_R 是由点电荷所在源点指向场点的单位矢量； ϵ_0 是真空介电常数。

式（1-1-1）表明，场点的电场强度，其大小与源点的电荷量成正比，与源点到场点距离的平方成反比；其参考方向是从源点指向场点，当电荷量为正时，实际方向与参考方向一致，当电荷量为负时，实际方向与参考方向相反。源点与场点的空间关系如图 1-1-1 所示。

单个点电荷产生电场如图 1-1-2 所示。

无限大真空中多个点电荷产生的电场中，同一场点的电场强度符合矢量叠加原理。具体表达式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k^2} \mathbf{e}_k \quad (1-1-2)$$

式中， $\sum_{k=1}^n$ 是累加符号，表示将 n 个点电荷产生的电场强度矢量累加起来。

注意，这里是矢量叠加， \mathbf{e}_k 是从第 k 个电荷 q_k 指向场点的单位矢量。

在直角坐标系中，将单位矢量沿着坐标轴分解

$$\mathbf{e}_k = \frac{x - x'_k}{R_k} \mathbf{e}_x + \frac{y - y'_k}{R_k} \mathbf{e}_y + \frac{z - z'_k}{R_k} \mathbf{e}_z \quad (1-1-3)$$

得电场强度 3 个分量的表达式

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{(x - x'_k) q_k}{R_k^3} \quad (1-1-4)$$

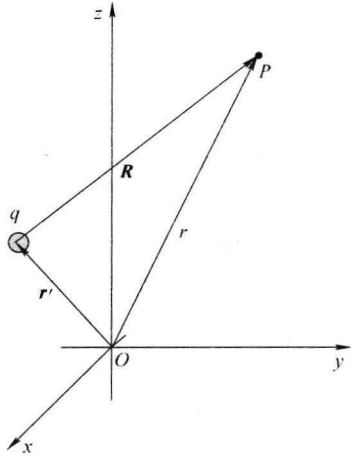


图 1-1-1 源点与场点的空间关系

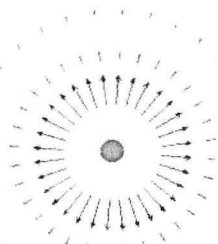


图 1-1-2 单个点电荷产生电场

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{(y-y'_k)q_k}{R_k^3} \quad (1-1-5)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{(z-z'_k)q_k}{R_k^3} \quad (1-1-6)$$

式 (1-1-4) ~ 式 (1-1-6) 均为标量叠加表达式, 计算时无需再考虑方向。式中, x 、 y 、 z 是场点的坐标, x'_k 、 y'_k 、 z'_k 为第 k 个点电荷所在源点的坐标, R_k 是第 k 个点电荷所在源点到场点的距离。电场强度各分量求得后, 可通过式 (1-1-7) 计算电场强度矢量。

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \quad (1-1-7)$$

显然, 当场点无限靠近点电荷时, 电场强度趋近无穷大, 但从不同方向趋近, 电场强度方向不相同。

2. 电荷元电场强度计算公式

如图 1-1-3 所示, 点电荷系统是完全离散的, 电荷只分布在一些孤立点上; 线电荷、面电荷和体电荷系统不是完全离散的, 具有一定的连续性。具有一定连续性的分布电荷, 一般用电荷密度来表示其分布的多少。线电荷在电荷分布所在的线上, 沿线的切线方向具有连续性, 电荷分布的多少用电荷线密度 τ 表示, 单位为库/米 (C/m)。面电荷在电荷分布所在的面上沿面的切面各方向具有连续性, 电荷分布的多少用电荷面密度 σ 表示, 单位为库/米² (C/m²)。体电荷在电荷分布所在的体积内沿各方向都具有连续性, 电荷分布的多少用电荷体密度 ρ 表示, 单位为库/米³ (C/m³)。

电荷的点、线、面、体分布, 都是静电场源的模型。体模型是宏观电荷状态的统计平均值分布。从工程电磁场角度考虑, 体电荷模型最接近实际。面、线、点模型都是体模型在几何上的极限情况。在几何上取极限, 会造成面、线、点电荷模型产生电场在其自身附近出现不连续和奇异 (出现无穷大数值)。这是计算时需要注意的。

电荷的线密度、面密度和体密度都是空间源点位置的函数, 取出电荷所在点处的几何微

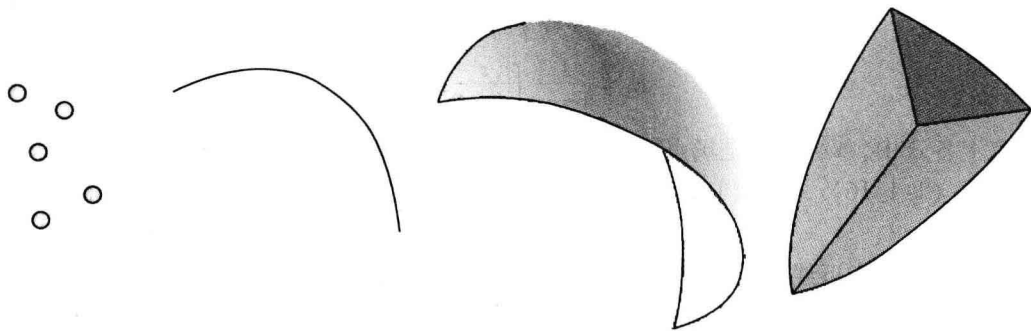


图 1-1-3 电荷的点线面体模型

元（线段元、面积元和体积元），在几何微元上的电荷量称为电荷元。

对于线电荷，电荷元

$$dq = \tau dl \quad (1-1-8)$$

对于面电荷，电荷元

$$dq = \sigma dS \quad (1-1-9)$$

对于体电荷，电荷元

$$dq = \rho dV \quad (1-1-10)$$

电荷元所占的空间趋近于一个点，这一几何性质与点电荷相似。电荷元的电荷量是无穷小量，因此其产生的电场强度也应是无穷小量。对照点电荷的电场强度计算公式，可得电荷元的电场强度计算公式

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1-11)$$

将线电荷元、面电荷元和体电荷元的表达式代入式 (1-1-11)，可得 3 种情况下电荷元的电场强度计算公式

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1-12)$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1-13)$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-1-14)$$

3. 任意线电荷电场强度计算公式

根据矢量叠加原理和电荷元的电场强度计算公式，得线电荷电场强度积分公式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau \mathbf{e}_R}{R^2} dl' \quad (1-1-15)$$

式中， l' 为线电荷的源区，可以是空间的任意曲线； R 为从积分微元所在的源点到场点的距离。

在直角坐标系中，将电场强度矢量分解，各分量的积分表达式为

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{(x-x')\tau}{R^3} dl' \quad (1-1-16)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{(y-y')\tau}{R^3} dl' \quad (1-1-17)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{(z-z')\tau}{R^3} dl' \quad (1-1-18)$$

以上各式中, x 、 y 、 z 是场点的坐标, x' 、 y' 、 z' 为线积分路径上线段元 dl' 所在源点的坐标。式 (1-1-16) ~ 式 (1-1-18) 是标量积分表达式。由 3 个分量计算电场强度矢量

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \quad (1-1-19)$$

当场点无限靠近线电荷所在的线时, 被积函数趋于无穷大。在线电荷情况下, 无限靠近线电荷的场点的电场强度趋于无穷大, 且从线外不同方向趋近线上所得电场强度方向不同。

4. 无限长直线电荷电场强度计算公式

真空中, 平行于 z 轴放置的一条无限长直线电荷, 其电荷线密度为 τ , 则其产生的电场强度表达式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{R} \mathbf{e}_R \quad (1-1-20)$$

式中, R 为从电荷所在轴线到场点的垂直距离。

多条平行于 z 轴放置的无限长直线电荷, 其电场强度表达式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k}{R_k} \mathbf{e}_k \quad (1-1-21)$$

将其展开成直角坐标系的两个分量 (此处电场强度的 z 分量为零, 不用计算)

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{(x-x'_k)\tau_k}{R_k^2} \quad (1-1-22)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{(y-y'_k)\tau_k}{R_k^2} \quad (1-1-23)$$

由两个分量计算电场强度矢量

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \quad (1-1-24)$$

5. 任意面电荷电场强度计算公式

根据矢量叠加原理和电荷元电场强度计算公式, 得面电荷电场强度积分公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \quad (1-1-25)$$

式中, S' 为面电荷的源区, 可以是空间的任意曲面。

在直角坐标系中, 电场强度各分量的积分表达式为

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{(x-x')\sigma}{R^3} dS' \quad (1-1-26)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{(y-y')\sigma}{R^3} dS' \quad (1-1-27)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{(z-z')\sigma}{R^3} dS' \quad (1-1-28)$$

式中, x 、 y 、 z 是场点的坐标; x' 、 y' 、 z' 为面积分曲面上面积元所在源点的坐标。

合成电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \quad (1-1-29)$$

当场点无限靠近面电荷所在的面时, 被积函数趋于无穷大。在面电荷情况下, 除了边缘以外, 场点靠近源点电场强度不会趋于无穷大, 但从面两侧方向靠近电荷所在面, 所得电场强度不同, 电场强度突变量与电荷面密度有关。在有限大面电荷的边缘处, 电场强度趋于无穷。

6. 任意体电荷电场强度计算公式

根据矢量叠加原理和电荷元电场强度计算公式, 得体电荷电场强度积分公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1-1-30)$$

式中, V' 为体电荷的源区, 可以是空间的任意体积。

在直角坐标系中, 电场强度各分量的表达式为

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{(x-x')\rho}{R^3} dV' \quad (1-1-31)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{(y-y')\rho}{R^3} dV' \quad (1-1-32)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{(z-z')\rho}{R^3} dV' \quad (1-1-33)$$

式中, x, y, z 是场点的坐标; x', y', z' 为体积分区域中体积元所在源点的坐标。

合成电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \quad (1-1-34)$$

当场点落在体电荷所在的体积上时, 被积函数趋于无穷大。在体电荷情况下, 场点与源点重合, 电场强度不会趋于无穷大, 而且电场强度数值和方向也不会突变。因此, 体电荷产生的电场强度具有全方位的连续性。

7. 无限长体电荷平行平面场电场强度的计算公式

平行于 z 轴放置的无限长柱形体电荷, 形成平行平面电场。这种体电荷的柱形体积在 x, y 平面上的截面可以是任意的, 但沿着 z 轴分布是相同的且两端都是无限长的。根据无限长线电荷电场计算公式, 应用叠加原理, 得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho \mathbf{e}_R}{R} dS' \quad (1-1-35)$$

式中, S' 为体电荷的源区在 x, y 平面的截面, 可以是任意形状的面积。

展开成直角坐标系的两个分量 (此处电场强度的 z 分量为零, 不用计算)

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{(x-x')\rho}{R^2} dS' \quad (1-1-36)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{(y-y')\rho}{R^2} dS' \quad (1-1-37)$$

由两个分量计算电场强度矢量

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \quad (1-1-38)$$

平行于 z 轴放置的无限长面电荷, 也形成平行平面电场, 其电场强度计算公式为 x, y 平面上的线积分。

8. 分布电荷电位的积分公式

根据电位与电场强度的关系 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 和 $\varphi = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 如果电荷分布在有限区域内, 设无限远处为电位参考点, 即 Q 点设在无限远处, 可得 P 点的电位。

单个点电荷的电位表达式为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1-1-39)$$

其电位云图如图 1-1-4 所示。

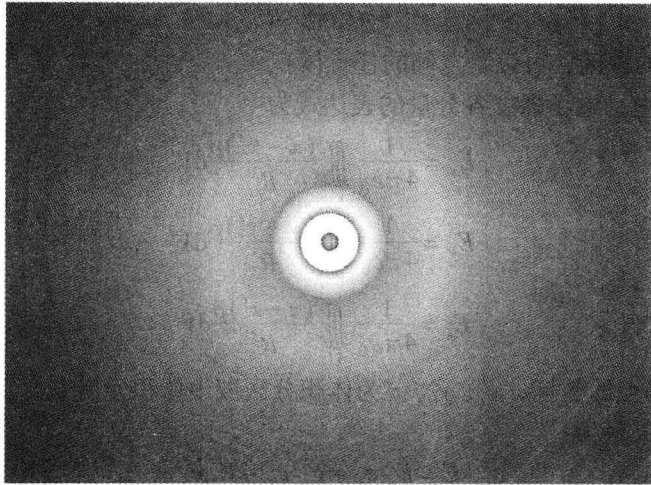


图 1-1-4 点电荷电位云图

多个点电荷的情况下, 根据叠加原理, 电位表达式为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k} \quad (1-1-40)$$

式中, q_k 是第 k 个点电荷的电荷量, 是 R_k 从第 k 个点电荷到场点的距离。

对于连续分布的电荷, 电荷元的电位为

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \quad (1-1-41)$$

利用叠加原理, 线电荷电位积分计算公式为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau dl'}{R} \quad (1-1-42)$$

面电荷电位计算公式为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma dS'}{R} \quad (1-1-43)$$

体电荷电位计算公式为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho dV'}{R} \quad (1-1-44)$$

当场点落在电荷所在的源区上时被积函数趋于无穷大。当场点无限靠近源点时点电荷电

位趋于无穷大；当场点无限靠近电荷所在面上时，面电荷电位不会趋近无穷，而且当场点穿过电荷所在面时电位连续；当场点经过电荷所在体积上时，体电荷电位连续。

当无限长线电荷、面电荷和体电荷形成平行平面电场时，因电荷分布延伸到无限远处，其所产生电场的电位不能取无限远处为参考点。这时可以取有限远处为参考点，叠加和积分过程中，电位参考点可以改变。叠加和积分完毕后，形成最终的电位参考点。

9. 电偶极子电位的计算公式

电偶极子是一对相互无限靠近的等量异号电荷，用电偶极矩表示其大小和方向。相对于点电荷，电偶极子是电场源的另一种表示模型。对于单个电偶极子 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ ，在球坐标系中，若电偶极矩方向与极轴重合，则电位的计算公式为

$$\varphi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1-1-45)$$

一般情况下，在直角坐标系中

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [(x-x')p_x + (y-y')p_y + (z-z')p_z] \quad (1-1-46)$$

式中， p_x 、 p_y 和 p_z 是直角坐标系中 \mathbf{p} 的三个分量。

单个电偶极子的电场分布如图 1-1-5 所示，其中上下对称的闭合线为等电位线。过正负电荷中心的水平线是电位为 0 的等位线。

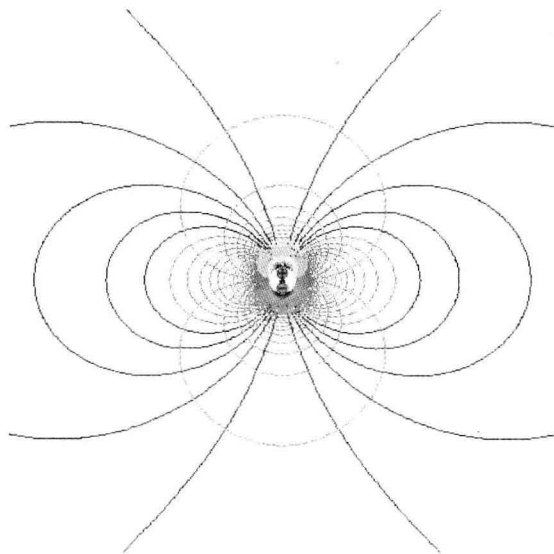


图 1-1-5 单个电偶极子的电场分布

被极化的电介质体积中连续分布的电偶极子所产生的电位（以极化强度 \mathbf{P} 表示偶极矩的体密度）表示为

$$\varphi = \iiint_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV' = \iiint_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [(x-x')P_x + (y-y')P_y + (z-z')P_z] dV' \quad (1-1-47)$$

电介质体积中电偶极矩产生的电场，当场点与一个源点重合时被积函数也会趋于无穷

大, 但场点经过电偶极子连续分布的体积时, 电位连续。

10. 电偶极子电场强度的计算公式

在球坐标系中

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2\cos\theta\mathbf{e}_R + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \quad (1-1-48)$$

一般情况下, 在直角坐标系中

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right) \\ &= -p_x \nabla \frac{x-x'}{4\pi\epsilon_0 R^3} - p_y \nabla \frac{y-y'}{4\pi\epsilon_0 R^3} - p_z \nabla \frac{z-z'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ &= - (x-x') p_x \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} - p_x \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \nabla (x-x') \\ &\quad - (y-y') p_y \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} - p_y \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \nabla (y-y') \\ &\quad - (z-z') p_z \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} - p_z \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \nabla (z-z') \\ &= - (x-x') p_x \frac{-3}{4\pi\epsilon_0 R^4} \nabla R - p_x \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_x \\ &\quad - (y-y') p_y \frac{-3}{4\pi\epsilon_0 R^4} \nabla R - p_y \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_y \\ &\quad - (z-z') p_z \frac{-3}{4\pi\epsilon_0 R^4} \nabla R - p_z \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1-1-49)$$

因

$$\nabla R = \mathbf{e}_R = \frac{(x-x')}{R} \mathbf{e}_x + \frac{(y-y')}{R} \mathbf{e}_y + \frac{(z-z')}{R} \mathbf{e}_z \quad (1-1-50)$$

所以, 得直角坐标系中电偶极子电场强度计算公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^5} \{ 3[(x-x')p_x + (y-y')p_y + (z-z')p_z](x-x')\mathbf{e}_x - p_x R^2 \mathbf{e}_x \\ &\quad + 3[(x-x')p_x + (y-y')p_y + (z-z')p_z](y-y')\mathbf{e}_y - p_y R^2 \mathbf{e}_y \\ &\quad + 3[(x-x')p_x + (y-y')p_y + (z-z')p_z](z-z')\mathbf{e}_z - p_z R^2 \mathbf{e}_z \} \end{aligned} \quad (1-1-51)$$

将电偶极子电场强度公式做积分处理, 即可得出整个极化电介质体积中连续分布电偶极子产生的电场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \iiint_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^5} \{ 3[(x-x')P_x + (y-y')P_y + (z-z')P_z](x-x')\mathbf{e}_x - P_x R^2 \mathbf{e}_x \} dV' \\ &\quad + \iiint_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^5} \{ 3[(x-x')P_x + (y-y')P_y + (z-z')P_z](y-y')\mathbf{e}_y - P_y R^2 \mathbf{e}_y \} dV' \\ &\quad + \iiint_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^5} \{ 3[(x-x')P_x + (y-y')P_y + (z-z')P_z](z-z')\mathbf{e}_z - P_z R^2 \mathbf{e}_z \} dV' \end{aligned} \quad (1-1-52)$$

式中, P_x 、 P_y 和 P_z 是 \mathbf{P} 的三个分量。

体积中电偶极矩产生的电场, 当场点与一个源点重合时被积函数会趋于无穷大, 电场强度不连续, 在偶极子源区的边界上有突变。

1.2 恒定磁场的积分公式

1. 点电流的磁感应强度计算公式

在给定的时刻, 单个运动电荷处在某个位置, 就是一个点电流 qv , 所产生磁场的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1-2-1)$$

单个运动电荷产生的磁场不是恒定磁场。在空间一个场点上, 不同时刻计算出的磁感应强度是不同的。式 (1-2-1) 可以用来计算瞬时值, 其条件是电荷运动相对较慢, 且场点离源点较近。如果不满足上述条件, 需要用时变场的公式计算磁感应强度。

图 1-2-1 是单个点电流产生的磁感应强度分布。当场点趋近于源点时, 磁感应强度趋近无穷大。

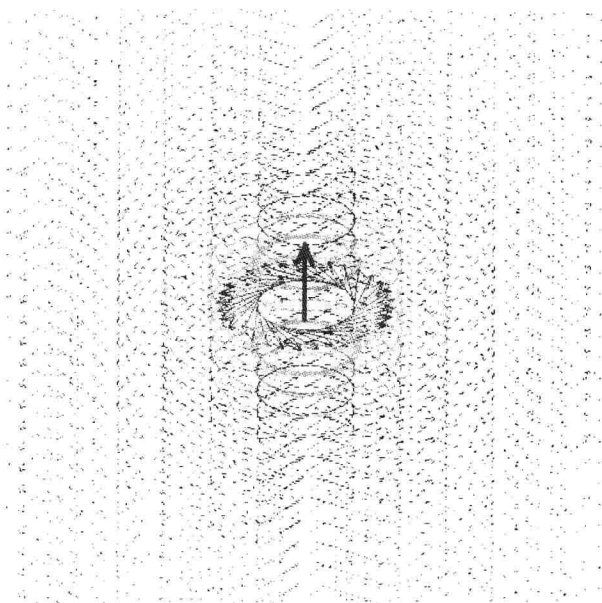


图 1-2-1 点电流磁感应强度分布

2. 电流元的磁感应强度计算公式

如图 1-2-2 所示, 除点电流外, 还有线电流、面电流和体电流。对于线电流、面电流和体电流, 相应的电流元可表示为 Idl' 、 $\mathbf{K}dS'$ 和 $\mathbf{J}dV'$ 。电流元产生的磁感应强度, 对线电流

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1-2-2)$$

对面电流

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{KdS' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1-2-3)$$

对体电流

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{JdV' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1-2-4)$$

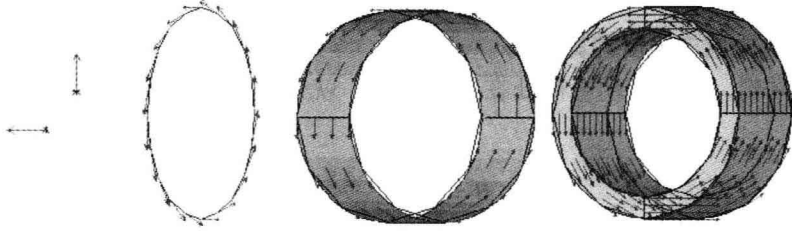


图 1-2-2 点线面体电流模型

3. 任意线电流的磁感应强度计算公式

疏绕的载流线圈可以看作是一种线电流，所产生磁场的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{Idl' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1-2-5)$$

式中， l' 为线电流的源区，在直角坐标系，磁感应强度各分量表达式为

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \left[\frac{(z-z')Idl'_y}{R^3} - \frac{(y-y')Idl'_z}{R^3} \right] \quad (1-2-6)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \left[\frac{(x-x')Idl'_z}{R^3} - \frac{(z-z')Idl'_x}{R^3} \right] \quad (1-2-7)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \left[\frac{(y-y')Idl'_x}{R^3} - \frac{(x-x')Idl'_y}{R^3} \right] \quad (1-2-8)$$

式中， dl'_x 、 dl'_y 和 dl'_z 是 dl' 分别在坐标轴 x 、 y 和 z 上的投影。当场点趋近于源点时，磁感应强度趋近无穷大。磁感应强度方向与电流方向成右手螺旋关系。

4. 无限长直线电流磁感应强度计算

在无限大真空中，平行于 z 轴放置的无限长线电流产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R}{R} \quad (1-2-9)$$

磁感应强度的两个分量表示为

$$B_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(y-y')I}{R^2} \quad (1-2-10)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(x-x')I}{R^2} \quad (1-2-11)$$

当场点趋近于源点时，磁感应强度趋近无穷大。磁感应强度方向与电流方向成右手螺旋关系。多条平行于 z 轴放置的无限长直线电流，其磁感应强度表达式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{R_k} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k \quad (1-2-12)$$

将其展开成直角坐标系的两个分量（此处磁感应强度的 z 分量为零，不用计算）

$$B_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(y-y'_k)I_k}{R_k^2} \quad (1-2-13)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(x-x'_k)I_k}{R_k^2} \quad (1-2-14)$$

由两个分量计算磁感应强度矢量

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y \quad (1-2-15)$$

5. 任意面电流的磁感应强度计算公式

面电流产生的磁感应强度表达式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \quad (1-2-16)$$

式中， S' 为面电流的源区。在直角坐标系中各分量为

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \left[\frac{(z-z')K_y}{R^3} - \frac{(y-y')K_z}{R^3} \right] dS' \quad (1-2-17)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \left[\frac{(x-x')K_z}{R^3} - \frac{(z-z')K_x}{R^3} \right] dS' \quad (1-2-18)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \left[\frac{(y-y')K_x}{R^3} - \frac{(x-x')K_y}{R^3} \right] dS' \quad (1-2-19)$$

当场点趋近于源点时，面两侧磁感应强度发生突变。

6. 任意体电流的磁感应强度计算公式

体电流产生的磁感应强度表达式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1-2-20)$$

式中， V' 为体电流的源区。在直角坐标系中，磁感应强度各分量表示为

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left[\frac{(z-z')J_y}{R^3} - \frac{(y-y')J_z}{R^3} \right] dV' \quad (1-2-21)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left[\frac{(x-x')J_z}{R^3} - \frac{(z-z')J_x}{R^3} \right] dV' \quad (1-2-22)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left[\frac{(y-y')J_x}{R^3} - \frac{(x-x')J_y}{R^3} \right] dV' \quad (1-2-23)$$

体电流情况下，无论有源还是无源区域，磁感应强度都连续分布。

7. 无限长体电流平行平面磁场磁感应强度的积分公式

无限大真空中，平行于 z 轴放置的无限长柱形体电流，电流只有 z 轴分量，所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{e}_R}{R} dS' \quad (1-2-24)$$

式中， S' 为面电流的源区在 x 、 y 平面的截面，可以是任意形状的面积。直角坐标中磁感应强度两个分量为