随机过程及应用习题集

张晓军　陈良均　编

清华大学出版社

ISBN 978-7-302-24106-5

9 787302 241065 >

定价：25.00元

随机过程及应用习题集

张晓军　陈良均　编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是作者在多年从事研究生课程"随机过程及应用"教学中，对工科、理科以及经济管理领域中典型习题进行了相关收集和整理而成的．书中给出了大量习题的详细求解过程和证明，同时加入了部分自编习题．全书注重理工结合，难度适中，强调各章节知识点间的联系和数学思维能力的训练．

本书可作为工科研究生、金融工程研究生、工科高年级本科生以及数学专业学生的学习用书，也可作为教师的教学辅导书．

图书在版编目（CIP）数据

随机过程及应用习题集/张晓军，陈良均编．--北京：清华大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-302-24106-5

Ⅰ．①随…　Ⅱ．①张…　②陈…　Ⅲ．①随机过程－研究生－习题　Ⅳ．①O211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 232280 号

责任编辑：佟丽霞　陈　明
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市清华园胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　　**印　　张**：15.5　　**字　　数**：374 千字
版　　次：2011 年 3 月第 1 版　　**印　　次**：2011 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00 元

产品编号：034665-01

前 言

随机过程作为研究随时间演化的随机现象的一门数学学科，已在信号分析与处理、金融工程、生物医学、电子工程以及计算机科学等领域得到了广泛的应用，并在这些领域的理论分析和实际应用方面显示出十分重要的作用. 目前随机过程及应用已成为工科院校研究生的一门重要理论基础课程.

学习和掌握随机过程及应用这门学科不仅需要高等数学、线性代数、概率统计、复变函数等方面的知识，还会涉及实变函数、泛函分析等内容，这导致在求解随机过程及应用的相关习题中需要综合以往学过的知识，无形之中增加了解题的难度. 从而对初学者来说往往是题目内容看明白了，却不知道如何下手. 而在随机过程及应用教学过程中长期存在的学生多、教师少的局面，使得教师无法满足每一个学生的需求. 我们深深感到出版一本帮助学生学习该门课程的辅导书是非常必要的. 为此我们以从前编写的《随机过程及应用》(高等教育出版社，2003)一书前 6 章的内容为蓝本编写了这本习题集.

全书共分 6 章，第 1 章为概率论概要，第 2 章为随机过程的基本概念，第 3 章为几种重要的随机过程，第 4 章为 Markov 过程，第 5 章为均方微积分，第 6 章为平稳过程. 每章由内容提要和习题解析两部分组成. 内容提要对每章的基本内容和要求读者掌握的重点进行了概括；习题解析部分对每章常见题型进行详细求解，并在一些重要习题后给了注释.

本书所选习题在注重理论基础的同时，强调随机过程的实际应用. 通过不断变换题中的已知条件求解同一类问题，来提高分析问题和解决问题的能力. 所选习题除了来自自编习题外，部分参阅了同行作者的相关著作，在此向他们致以谢意.

本书可作为工科研究生、金融工程研究生、工科高年级本科生以及数学专业学生的学习用书，也可作为教师教学的辅导用书.

由于水平和学识所限，在编写中难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正.

张晓军　陈良均

2010 年 8 月

目 录

第1章 概率论概要

内容提要

1. 概率空间

(1) 可测空间

设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集构成的集类，如果 $\mathscr{F}$ 满足

① $\Omega\in\mathscr{F}$;

② 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

③ 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

那么称 $\mathscr{F}$ 为随机事件体(域)，也称 $\mathscr{F}$ 为 σ 代数. 称二元组 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间.

(2) 概率空间

设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是一随机事件体，定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数 $P\{x\}$ 如果满足

① $\forall A\in\mathscr{F}, P\{A\}\geqslant 0$;

② $P\{\Omega\}=1$;

③ 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$，且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$，则

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}P\{A_n\}$$

那么称 P 是二元组 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度，称 $P\{A\}$ 为随机事件 A 的概率，称三元组 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

2. 随机变量及其分布

(1) 随机变量

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一概率空间，定义在 Ω 上的单值实函数 $X(\omega)$ 如果满足 $\forall x\in\mathbb{R}$，都有 $\{\omega\mid X(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 为随机变量.

(2) 分布函数

称 $F(x)=P\{\bar{\omega}\mid X(\bar{\omega})<x\}=P\{X<x\}(-\infty<x<+\infty)$ 为随机变量 X 的分布函数.

3. 随机变量的数字特征

(1) 数学期望

设 X 是一个随机变量，$F(x)$ 是其分布函数，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x\mid \mathrm{d}F(x)<+\infty$，则称 $E(X)=$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x)$ 为随机变量 X 的数学期望或均值.

(2) 方差

设 X 是随机变量,若 $E(X^2)<+\infty$,则称 $D(X)=E(X-E(X))^2$ 为随机变量 X 的方差.称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.

(3) 协方差

设 X,Y 是随机变量,若 $E(X^2)<+\infty,E(Y^2)<+\infty$,则称

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(XY)-E(X)E(Y)$$

为随机变量 X,Y 的协方差.

(4) 协方差矩阵

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机向量,称

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(X_1,X_1)\mathrm{cov}(X_1,X_2)\cdots\mathrm{cov}(X_1,X_n)\\ \mathrm{cov}(X_2,X_1)\mathrm{cov}(X_2,X_2)\cdots\mathrm{cov}(X_2,X_n)\\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ \mathrm{cov}(X_n,X_1)\mathrm{cov}(X_n,X_2)\cdots\mathrm{cov}(X_n,X_n)\end{pmatrix}$$

为 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵.

(5) 相关系数

设 X,Y 是随机变量,若 $D(X)>0,D(Y)>0$,则称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量 X,Y 的相关系数.若 $\rho_{XY}=0$,则称 X,Y 不相关.

(6) 相关性质

① 设 a,b 是任意常数,则 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$;

② 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是常数,则

$$E(\prod_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}E(X_i)$$

$$D(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$

③ 设 X 是随机变量,则 $D(X)=0$ 的充要条件是 $P\{X=E(X)\}=1$;

④ $|\rho_{XY}|\leqslant 1$,且 $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件为 $P\{Y=aX+b\}=1$;

⑤ $E(XY)\leqslant\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$;

⑥ 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机向量,其联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是连续函数. 如果$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 存在,则

$$E(g(X_1,X_2,\cdots,X_n))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

4. 条件数学期望

(1) 条件数学期望

设(X,Y)是二维随机变量,$F_{X|Y}(x|y)$是 X 的条件分布函数,则称

$$E(X \mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d} F_{X \mid Y}(x \mid y)$$

为 X 在条件 $Y=y$ 下的条件数学期望.

由于 $E(X|Y=y)$ 是 y 的函数,因此 $E(X|Y)$ 是随机变量 Y 的函数,称为 X 在条件 Y 下的条件数学期望.类似地,有 Y 在条件 X 下的条件数学期望 $E(Y|X)$.

(2) 条件方差

称

$$D(X \mid Y=y_j)=E((X-E(X \mid Y=y_j))^2 \mid Y=y_j)$$

为在 $Y=y_j$ 条件下,随机变量 X 的条件方差.

(3) 主要的性质和结论

① $E(E(X|Y))=E(X)$;

② 设 X,Y 相互独立,则 $E(X|Y)=E(X)$;

③ 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机向量,$g(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 是连续函数,则

$$\begin{aligned} & E(X_i g(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n) \mid X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n) \\ = & g(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n) E(X_i \mid X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_n) \end{aligned}$$

④ 全期望公式

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_y E(X \mid Y=y) P\{Y=y\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \mid Y=y) f_Y(y) \mathrm{d} y\end{cases}$$

⑤ $D(X)=E(D(X|Y))+D(E(X|Y))$;

⑥ $E(X-E(X|Y))^2 \leqslant E(X-g(Y))^2$.

5. 随机变量的特征函数

(1) 特征函数

设 X 是实随机变量,其分布函数为 $F(x)$,则称

$$\varphi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d} F(x), \quad -\infty<t<+\infty, \mathrm{i}=\sqrt{-1}$$

为随机变量 X 的特征函数.

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机向量,其联合分布函数为 $F(x)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{t}) & =\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}})=E\left(\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^n t_k X_k\right)\right) \\ & =\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\mathrm{i}(t_1 x_1+t_2 x_2+\cdots+t_n x_n)] \mathrm{d} F(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \boldsymbol{t} & =(t_1,t_2,\cdots,t_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

为 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的特征函数.

设 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数,$\varphi(t)$ 绝对可积,则

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x) \mathrm{d} x$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

(2) 主要性质和结论

① $|\varphi_X(t)|\leqslant\varphi(0)=1$;

② $\overline{\varphi_X(t)}=\varphi_X(-t)$,其中$\overline{\varphi_X(t)}$表示 $\varphi_X(t)$的共轭;

③ $\varphi_X(t)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续;

④ $\varphi_X(t)$是非负定的,即对于任意的正整数 n,任意的复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 和任意的实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,有

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_l-t_k)z_l\bar{z}_k\geqslant 0$$

⑤ 设随机变量 $Y=aX+b$,其中 a,b 是常数,则 $\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\varphi_X(at)$;

⑥ 设随机变量 X,Y 相互独立,$Z=X+Y$,则 $\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$;

⑦ 设随机变量 X 的 n 阶原点矩存在,则 $\varphi(t)$存在 $k(k\leqslant n)$阶导数,且

$$\varphi^{(k)}(0)=\mathrm{i}^kE(X^k),\quad k\leqslant n$$

⑧ 随机变量的分布函数和特征函数相互惟一确定;

⑨ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\cdots\varphi_{X_n}(t_n)$;

⑩ 如果 $E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$存在,则

$$E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})=\mathrm{i}^{\sum\limits_{l=1}^{n}k_l}\cdot\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

⑪ 若函数 $\varphi(t)$连续、非负定且 $\varphi(0)=1$,则 $\varphi(t)$为某一随机变量的特征函数.

6. 随机变量序列的收敛性

(1) (依分布收敛)设随机变量 X_n 和 X 的分布函数分别为 $F_n(x)$和 $F(x)$,如果 $F_n(x)\xrightarrow{\mathrm{W}}F(x)$,则称$\{X_n\}$依分布收敛于 X,并记为 $X_n\xrightarrow{\mathrm{L}}X$.

(2) (依概率收敛)若$\forall\varepsilon>0$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0$,则称$\{X_n\}$依概率收敛于 X,并记为 $X_n\xrightarrow{\mathrm{P}}X$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=X(P)$.

(3) (r 阶收敛)设随机变量 X_n 及 X 满足 $E(|X_n|^r)<+\infty$,$E(|X|^r)<+\infty$,其中 $r(r>0)$为常数,如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}E(|X_n-X|^r)=0$,则称$\{X_n\}$$r$ 阶收敛于 X,并记为 $X_n\xrightarrow{r}X$.

(4) (几乎处处收敛)如果 $P\{\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=X\}=1$,则称$\{X_n\}$几乎处处收敛于 X,又称$\{X_n\}$以概率 1 收敛于 X,并记为 $X_n\xrightarrow{\mathrm{a.s.}}X$.

(5) 主要的性质和结论:

几乎处处收敛 ⇒ 依概率收敛 ⇒ 依分布收敛

r 阶收敛 ⇒ 依概率收敛 ⇒ 依分布收敛

(6) 大数定律

① (Bernoulli 大数定律)设 n_A 表示在 n 重 Bernoulli 试验中事件 A 出现的次数,而 p 表示每次试验中事件 A 出现的概率,则$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

② (Chebyshev 大数定律)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是由两两不相关的随机变量构成的序列,每一随机变量都有有限的方差,并且方差有公共的上界,即存在 $M>0$,使得 $D(X_k)\leqslant M,k=1,2,\cdots$,则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

③ (Khintchine 大数定律)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立同分布的随机变量序列,且有有限的数学期望,即 $\mu=E(X_k)<+\infty,k=1,2,\cdots$,则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

④ (Markov 大数定律)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是随机变量序列,且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0$$

则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

(7) 中心极限定理

① (独立同分布中心极限定理)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立同分布的随机变量序列,且$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2$,则

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

② (棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立同 0-1 分布的随机变量序列,满足 $P\{X_i=1\}=p,q=1-p,i=1,2,\cdots$,则有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{npq}}<x\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

习题解析

1. 设随机试验 E 是将一枚硬币抛两次,观察正面(H),反面(T)出现的情况,试写出概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$.

解　样本空间为 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

设

$$\begin{aligned}\mathscr{F}=2^{\Omega}=\{&\varnothing,\{(H,H)\},\{(H,T)\},\{(T,H)\},\{(T,T)\},\{(H,H),(H,T)\},\{(H,H),(T,H)\},\\&\{(H,H),(T,T)\},\{(H,T),(T,H)\},\{(H,T),(T,T)\},\{(T,H),(T,T)\},\\&\{(H,H),(H,T),(T,H)\},\{(H,H),(H,T),(T,T)\},\{(H,H),(T,H),(T,T)\},\\&\{(H,T),(T,H),(T,T)\},\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}\}\end{aligned}$$

定义　$P\{A\}=\dfrac{k}{4}$,其中 k 为事件A 包含的样本点数,则$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一古典概率空间.

2. 设随机试验 E 是将一颗骰子连掷两次，观察两次所得的点数，试写出概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

解 样本空间为 $\Omega=\{(i,j)\mid 1\leqslant i,j\leqslant 6, i,j\in\mathbb{Z}\}$.

设 $\mathscr{F}=2^{\Omega}$(共 2^{36} 个元素)，定义 $P\{A\}=\frac{k}{36}$，其中 k 为事件 A 包含的样本点数，则 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一古典概率空间.

3. 将 3 个球任意放入 3 个盒子中去，设 X 为有球的盒子数. 求：

(1) X 的分布律； (2) $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 (1) X 为离散型随机变量，取值为 1,2,3，且有

$$P\{X=1\}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9},\quad P\{X=2\}=\frac{C_3^2(2^3-2)}{27}=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=3\}=\frac{3!}{27}=\frac{2}{9}$$

则 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$

(2) $E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{2}{9}=\frac{19}{9}$

$E(X^2)=1\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{3}+9\times\frac{2}{9}=4\frac{7}{9}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{26}{81}$

4. 设有 2 个红球、4 个白球，先将它们分放到甲、乙两个盒子中去，各放 3 个. 设 X 为甲盒中的红球数. 然后再在甲、乙两盒各取一个进行交换. 设 Y 为此时甲盒中的红球数.

(1) 求 X 的分布律；

(2) 已知 X 的条件下求 Y 的分布律；

(3) 求 Y 的分布律.

解 (1) X 的取值为 0,1,2，且有

$$P\{X=0\}=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},\quad P\{X=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2\cdot C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$$

则 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 当 $X=0$ 时，Y 的取值为 0,1，有

$$P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{1}{3},\quad P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{2}{3}$$

故在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

当 $X=1$ 时，Y 的取值为 0，1，2，有

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

故在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

当 $X=2$ 时，Y 的取值为 1，2，有

$$P\{Y=1 \mid X=2\}=\frac{2}{3},\quad P\{Y=2 \mid X=2\}=\frac{1}{3}$$

故在 $X=2$ 的条件下，Y 的条件分布律为

Y	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) Y 的取值为 0，1，2，有

$$\begin{aligned}P\{Y=0\}&=\sum_{k=0}^{2}P\{Y=0 \mid X=k\}\cdot P\{X=k\}\\&=P\{Y=0 \mid X=0\}\cdot\frac{1}{5}+P\{Y=0 \mid X=1\}\cdot\frac{3}{5}+0\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{9}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

同理有

$$P\{Y=1\}=\frac{3}{5},\quad P\{Y=2\}=\frac{1}{5}$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

5. 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布律如右表所示，求：

(1) 随机变量 X 和 Y 的边缘分布律；

(2) 随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数；

(3) 随机变量(X,Y)的联合分布函数；

(4) 判断随机变量 X 与 Y 的独立性；

(5) $E(X)$，$E(Y)$，$D(X)$，$D(Y)$，$\mathrm{cov}(X,Y)$和 ρ_{XY}.

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

解 (1) X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

即 $X \sim B\left(1, \frac{5}{8}\right)$.

Y 的分布律为

Y	0	1
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

即 $Y \sim B\left(1, \frac{3}{8}\right)$.

(2) X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{3}{8}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ \frac{5}{8}, & 0 < y \leqslant 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

(3) (X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0\\ \dfrac{1}{4}, & 0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 1\\ \dfrac{5}{8}, & x>1,0<y\leqslant 1\\ \dfrac{3}{8}, & 0<x\leqslant 1,y>1\\ 1, & x,y>1\end{cases}$$

(4) 因为 $p_{00}=\dfrac{1}{4}$,$p_{0\cdot}\cdot p_{\cdot 0}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{64}$,$p_{00}\neq p_{0\cdot}\cdot p_{\cdot 0}$,所以 X,Y 不相互独立.

(5) 因为 $X\sim B\left(1,\dfrac{5}{8}\right)$,所以

$$E(X)=\frac{5}{8},\quad D(X)=\frac{5}{8}\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{64}$$

同理

$$E(Y)=\frac{3}{8},\quad D(Y)=\frac{15}{64}$$

$$E(XY)=0+1\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{15}{64}=\frac{1}{64}$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\dfrac{1}{64}}{\dfrac{15}{64}}=\frac{1}{15}$$

6. 某数字通信系统在通信中传送一个二进码数,由于存在信道噪声,接受端不可能正确解码. 令 X 为发送数,Y 为解码数,设发送数字为 0 或 1 的概率为

$$P\{X=0\}=q=1-p,\quad P\{X=1\}=p$$

再设发送数是 0 或 1 的条件下,解码数是 0 或 1 的条件概率为

$$P\{Y=0\mid X=0\}=p_0,\quad P\{Y=1\mid X=0\}=q_0=1-p_0$$

$$P\{Y=0\mid X=1\}=1-p_1=q_1,\quad P\{Y=1\mid X=1\}=p_1$$

求:(1) Y 的分布律;

(2) 发生误码的概率.

解　(1) Y 的取值为 0,1,计算得到

$$P\{Y=0\}=\sum_{i=0}^{1}P\{Y=0\mid X=i\}\cdot P\{X=i\}$$
$$=(1-p)\cdot p_0+p(1-p_1)=p_0q+pq_1$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{i=0}^{1}P\{Y=1\mid X=i\}\cdot P\{X=i\}$$
$$=(1-p)(1-p_0)+pp_1=qq_0+pp_1$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1
P	p_0q+pq_1	qq_0+pp_1

(2) 发生误码的概率为

$$
\begin{aligned}
p &= P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\} \\
&= P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\mid X=0\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\mid X=1\} \\
&= qq_0+pq_1
\end{aligned}
$$

7. 已知 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$且相互独立，分别求如下 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(1) $Z=X+Y$； (2) $Z=X-Y$；

(3) $Z=\dfrac{X}{Y}$； (4) $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$；

(5) $Z=X^2+Y^2$； (6) $Z=\max\{X,Y\}$；

(7) $Z=\min\{X,Y\}$.

解 (1) 因为 X,Y 相互独立同正态分布，故由正态分布的可加性，有

$$Z=X+Y\sim N(0,2)$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}},\quad z\in\mathbb{R}$$

(2) 由$-Y\sim N(0,1)$，故 $Z=X-Y=X+(-Y)\sim N(0,2)$，于是

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{4}},\quad z\in\mathbb{R}$$

(3)
$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{e}^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+z^2},\quad z\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(4)
$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}<z\}\xlongequal{z\geqslant 0}P\{X^2+Y^2<z^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2<z^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^z\left[\int_0^{2\pi}r\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r=1-\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}$$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ z\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}, & z>0\end{cases}$$

(5) 由 $\chi^2(n)$分布定义有 $Z\sim\chi^2(2)$，故

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}, & z>0\end{cases}$$