Xian Xing Dai Shu

线性代数及其应用

张 杰 邹杰涛 主 编

刘 波 解加芳 副主编

中国财政经济出版社

线性代数及其应用

张　杰　邹杰涛　主　编
刘　波　解加芳　副主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/张杰，邹杰涛主编．—北京：中国财政经济出版社，2010.6
ISBN 978－7－5095－2379－7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… ②邹… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 142331 号

责任编辑：陆宗祥　　　　责任校对：张　凡
封面设计：九　州　　　　版式设计：兰　波

中国财政经济出版社出版
URL：http://www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　13.50 印张　330 000 字
2010 年 6 月第 1 版　2010 年 6 月北京第 1 次印刷
定价：22.00 元
ISBN 978－7－5095－2379－7/O·0026
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

前言 qian yan

线性代数是高等学校理工科和经济及管理学科有关专业的一门数学基础课。它不但是其他数学课程的基础，也是物理学、力学、经济学等课程的基础。实际上，任何与数学有关的课程都涉及线性代数知识。另外，计算机的飞速发展和广泛应用，使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算等途径而得到定量分析。因此，作为处理离散问题工具的线性代数，也是从事科学研究和工程计算类的科技人员所必备的数学基础。

本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上，为适应不同层次线性代数知识的教学要求，在原有《线性代数》讲义的基础上几经修改后编写而成的。根据教学改革的精神和本科专业对学习线性代数知识的不同要求，我们在内容结构等方面作了精心选择和编排。内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与线性方程组、相似矩阵与二次型以及线性空间与线性变换。

本书的主要特点是：

1. 层次分明，适用面广。全书有基础知识（第1章至第4章）、经典例题归纳与考研提高两个模块组成。基础模块是按国家教委指定的《线性代数课程教学基本要求》编写的，包括线性代数的主要内容和基本计算方法，讲授这部分约32学时；提高模块是对前面所学内容的综合应用，可供多学时（如48学时）教学使用，也可作为学有余力的学生的课外读物和考研同学的复习参考资料。因此，本书不但适合理工科本科少学时或多学时线性代数课程的教学需要，也适用于专科生的教学需求。

2. 分散难点，提高素质。线性代数所使用的各种推证方法、公理化定义、抽象化思维以及计算技巧及应用能力等都具有特色，是其他课程无法替代的，也是提高学生数学素质不可缺少的一环。为了既有适当的理论深度，又能便于理解，我们对一般线性代数中教学难度较大的内容做了适当的处理。例如，将向量组的线性相关性问题转化成矩阵秩的问题；将线性方程组有无解的问题与向量组的相关性问题紧密联系在一起，力求使它们都较为具体，简捷。此外，对各章内容所做的许多细化处理，也是颇有特色的。

3. 突出矩阵，加强变换。矩阵这一数学概念之所以能够与工程技术问题相结合并成为表达手段，主要是依赖于它的种种运算和变换。本书突出矩阵的四大变换，即初等变换、相似变换、合同变换和正交变换，特别是初等变换，几乎贯穿于全书各章的始终。

4. 应用案例丰富。本书每章后面都结合知识点的应用给出很多实例，从而使读者对线性代数知识的应用有了一个初步的体会，同时也增加了读者的学习兴趣。

5. 在学习了线性代数基本方法之后，数学实验知识的引入使得很多复杂繁琐的计算变得快捷、准确，这为今后的科学计算打下了良好基础。

在编写过程中，为便于教学与自学，我们力求做到叙述清晰，推证严谨，深入浅出，通俗易懂。

本书编写分工如下：邹杰涛（第 1 章与第 2 章），张杰（第 3 章与第 5 章），刘波（第 4 章及 Matlab 应用），解加芳（线性代数的应用）。全书由张杰统稿并负责修改定稿。

本书在编写过程中得到了北方工业大学数学系各位同事的关心和支持；吉林大学的胡成栋教授、兰州大学的牛培平教授仔细审阅了书稿，并提出了宝贵的修改意见；北方工业大学教务处为本书的出版给予了很大的支持与帮助，在此，一并表示衷心的感谢！

由于水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请同行与读者指正。

编者

2010 年 6 月于北方工业大学

目录

mu lu

第 1 章

行　列　式

行列式是线性代数中的一个重要概念. 初等数学中讲过二阶、三阶行列式，并用其求解二元、三元线性方程组. 本章从分析二阶、三阶行列式的构成出发，推广到 n 阶行列式，并导出行列式的一些基本性质及行列式按行(列)展开的定理，最后介绍利用行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则和齐次线性方程组有无非零解的判别定理.

§1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶、三阶行列式

在初等数学里，解二元及三元线性方程组时引进了二阶与三阶行列式，它们的计算公式分别为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.2}$$

以上两式是用对角线法则来定义的. 但是，对于四阶及以上的行列式便不适用了. 认真分析二阶、三阶行列式的表达式，我们发现有如下共同的特征：

（1）每一项都是不同行和不同列的元素的乘积，确切地说，每一项都包含了每一行的一个元素和每一列的一个元素；

（2）在每一项前面都附加以正号或负号；

（3）所包含的项数为所有可能的乘积.

因此，要推广到 n 阶行列式需要解决两个问题：

（1）每一项前面的符号按什么规律确定?

（2）一个 n 阶行列式的表达式中共有多少项?

下面，我们用排列的概念来解决这个问题.

1.1.2 排列及其逆序数

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列.

n 个不同数码的不同 n 阶排列总数用 P_n 表示，容易验证，$P_n=n!$，将任意一个排列记成 $p_1p_2\cdots p_n$.

定义 1.2 在一个排列中，如果某一个较大的数码排在较小的数码之前，就称这两个数码构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的逆序数.

显然，标准排列 $1\ 2\cdots n$ 的逆序数等于 0.

下面一般地讨论排列逆序数的求法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 1 到 n 的一个排列. 对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，排在它前面比它小的元素和 p_i 不构成逆序；排在它前面比它大的元素和 p_i 构成逆序. 设这样的逆序数为 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$，就称元素 p_i 的逆序数为 t_i. 容易看出，全体元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数之和：$t=t_1+t_2+\cdots+t_n$，就是这一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数有时记成 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例 1.1 求排列 43152 的逆序数.

解 排列 43152 共有 5 个元素，各元素的逆序数为：

4 排在首位，其逆序数为 0；

3 前面比 3 大的数有 4，故逆序数为 1；

1 前面比 1 大的数有 4、3，故逆序数为 2；

5 是最大数，它的逆序数总为 0；

2 前面比 2 大的数有 4、3、5，故逆序数为 3.

因此排列 43152 的逆序数为：$t=0+1+2+0+3=6$.

例 1.2 求排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数.

解 $1,3,\cdots,(2n-1),(2n)$ 的逆序数均为 0，$(2n-2)$ 的逆序数为 2，$(2n-4)$ 的逆序数为 4，…，2 的逆序数为 $2n-2$，故所求排列的逆序数为：$t=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 43152 是偶排列，排列 321 是奇排列.

1.1.3 对换

下面对排列中元素之间的位置关系进行讨论，引入对换的概念.

定义 1.4 在一个排列中，把任意两个元素的位置对调，而其它元素不动，就得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样一个变换叫做一个对换. 将相邻的两个元素对换，叫做相邻对换.

例如，排列 3124，经元素 3 和 4 对换，变成新排列 4123.

在对换下，排列的奇偶性会有变化.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

这是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 （1）先看相邻对换的情形. 设有排列 $p_1p_2\cdots p_kpqq_1q_2\cdots q_m$，对调 p、q，得到 $p_1p_2\cdots p_kqpq_1q_2\cdots q_m$. 可以看出，经对换后，元素 $p_1,\cdots,p_k$ 和 $q_1,\cdots,q_m$ 的逆序数没有改变，而元素 p、q 的逆序数可能改变. 当 $p<q$ 时，p 的逆序数增加 1，q 的逆序数不变；当 $p>q$ 时，p 的逆序数不变，q 的逆序数减少 1.

总之，对换后的新排列与原来排列的逆序数相差 1，它们的奇偶性相反.

根据定理 1.1，经过奇数次对换后，排列改变其奇偶性；经过偶数次对换后，排列不改变其奇偶性. 而标准排列是偶排列，于是有：

（2）一般对换的情形. 设有排列 $p_1\cdots p_kpq_1\cdots q_mqr_1\cdots r_n$，对换 p、q，将排列变成 $p_1\cdots p_kqq_1\cdots q_mpr_1\cdots r_n$. 这一对换可以看成是经若干次相邻对换得到的. 先将元素 p 与 $q_1,\cdots,q_m$ 依次作相邻对换，经 m 次以后，变成 $p_1\cdots p_kq_1\cdots q_mpqr_1\cdots r_n$；然后再将元素 q 与 p，$q_m,\cdots,q_1$ 依次作相邻对换，经 $m+1$ 次以后，变成 $p_1\cdots p_kqq_1\cdots q_mpr_1\cdots r_n$，即为上述的新排列. 这就是说，经过 $2m+1$ 次相邻对换，把原来的排列变成新排列.

由(1)知，经 $2m+1$ 次相邻对换后，排列的奇偶性改变. 所以原排列与新排列的奇偶性不相同. 证毕

推论 奇排列调成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

定理 1.2 $n\geqslant 2$，n 个元素的所有排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $n!/2$ 个.

证明 略.

1.1.4 n 阶行列式的定义

下面我们分析三阶行列式的表达式(1.2)的结构.

式(1.2)左端记号中有三行三列的元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$，每个元素 a_{ij}第一个下标 i 表示该元素所在的行，称为行标；第二个下标 j 表示该元素所在的列，称为列标.

式(1.2)右端式子中，每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积. 除了符号外，每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中 $p_1p_2p_3$ 是 1，2，3 的某个排列. 这样的排列共有 $3!=6$ 个，对应(1.2)式中共有 6 项. 即三阶行列式(1.2)等于所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积的 6 项代数和.

再来考察每一项的符号. (1.2)式右端前面三项取正号，它们的列标排列依次是 123, 231, 312, 这些都是偶排列；后面三项取负号，它们的列标排列依次是 132, 213, 321, 这些都是奇排列. 因此各项所取的符号可写成$(-1)^t$，其中 t 是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，或写成$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

于是三阶行列式(1.2)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

求和号“$\sum$”表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

根据三阶行列式这一定义形式，可以把行列式概念推广到 n 阶情形.

定义 1.5　设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的表，

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行、不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并带上符号$(-1)^t$，得到的项形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{1.3}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，形如(1.3)式的项共有 $n!$ 项，所有这些项的和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式的值. 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{即 } D = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

有时把行列式 D 简记作 $D=\Delta(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为 D 的元素.

用此定义所得到的二阶和三阶行列式，显然与前面给出的定义是一致的.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$. 注意和 a 的绝对值区分开，需要时加以说明.

行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**.

例 1.3　证明

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n;$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n.$$ 其中未写出的元素都是 0.

证 (1) 显然，由定义，此行列式除了$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项之外，其余项都含有0元素，值为0，从而

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^t a_1 a_2 \cdots a_n,$$

t 为排列 $12\cdots n$ 的逆序数，而 $t=0$,所以，

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^0 a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

即该行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积. 一般地,这样的行列式称为**对角行列式**.

(2) 类似于(1)，该行列式中除了$(-1)^t a_1 a_2\cdots a_n$ 一项外，其余项都等于0. 而此项的列标排列为 $n(n-1)\cdots 21$，它的逆序数

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以 $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$. 证毕

例 1.4 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$为 D 的任意一项. 当 n 个元素 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 中有一个等于0时，该项即为0，不用考虑这些项，由定义只需要计算可能不为0 的项即可. 在 D 的第 n 行中除了 a_{nn}外，其他元素均为0，因此只能取 $p_n=n$;第 $n-1$ 行除 $a_{n-1,n-1}$和 $a_{n-1,n}$ 两个元素外，其他元素为0，因此p_{n-1}可以取 $n-1$ 和 n，而前面已取 $p_n=n$，所以只能取 $p_{n-1}=n-1$，……,依次类推，可得 $p_2=2, p_1=1$. 这样，D 中可能不为零的项只有一项$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 其符号$(-1)^t=(-1)^0=1$,故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 证毕

例 1.4 中的行列式，它的主对角线以下的元素都是0，称为**上三角行列式**. 类似地，主对角线以上的元素都是0 的行列式，称为**下三角行列式**. 和上三角行列式相仿，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式与下三角行列式统称**三角行列式**. 在计算行列式时，常常把行列式化为三角行列式，以简化计算. 例 1.4 结果可作为公式应用.

例 1.5 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}$ 的值.

解 在四阶行列式 D 的所有项中，除 $aceg$、$bcef$ 两项外，其余项都为 0. $aceg$ 的列标排列为 1234，是偶排列；$bcef$ 的列标排列为 4231，逆序数 $\tau(4231)=5$，是奇排列. 所以 $D=aceg-bcef$.

为了使用起来方便，下面给出 n 阶行列式定义的另一种表示形式.

设 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，对 D 中的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots$，$a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ 行标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，列标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 为某一排列. 交换乘积的两个因子 a_{ip_i} 和 a_{jp_j}，这一项值不变，写成 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$. 这时，该项的行标排列为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$，列标排列为 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$. 它们是由原来的排列经过一次相应对换而得到的，排列的奇偶性同时改变，但它们的逆序数之和不改变奇偶性，即 $(-1)^t=(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1'}\cdots a_{jp_j'}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

将乘积中的两个元素交换一次，有这样的结论，那么交换多次也应该是这样. 经过若干次交换，我们使得列标排列由 $p_1p_2\cdots p_n$ 变为 $12\cdots n$，而行标排列则由 $12\cdots n$ 变为某一排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 设 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数为 s，那么就有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

显然，排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定，且不同的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应不同的排列 $q_1q_2\cdots q_n$.

这样，由 $n!$ 项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 得到 $n!$ 项不同的 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$，即为 $q_1q_2\cdots q_n$ 所有可能排列对应的项，于是得到

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

即有下面定义.

定义 1.6 **n 阶行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 可表示成 $D=\sum(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$，其中：$s$ 为行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 $q_1q_2\cdots q_n$ 的所有排列求和.**

§1.2 行列式的性质

根据 n 阶行列式的定义，计算一个 n 阶行列式，要求 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和. 当阶数 n 比较大时，这样的计算量是很大的，并且用起来不方便，因此我们有必要讨论行列式的计算方法.

在这一节，先研究行列式的一些运算性质，然后利用其性质给出一种简便的计算方法.

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，把 D 的各行换成同序号的列，得到另一个行列式，

记成
$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
D^T 称为行列式 D 的转置行列式. 易见，D 与 D^T 互为转置行列式.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式的值相等. 即 $D=D^T$

证　记 $D=\Delta(a_{ij})$ 的转置行列式为
$$D^T=\Delta(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$
则有元素 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 由定义
$$D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D.$$

由性质 1.1 知，行列式中“行”与“列”的地位是等同的，行与列具有相同的性质.

性质 1.2　互换行列式的其中两行(列)，行列式改变符号.

证　设 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换第 $i,j(i<j)$ 两行得到的，那么有 $b_{ip}=a_{jp}, b_{jp}=a_{ip}(p=1,2,\cdots,n)$.

当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}(p=1,2,\cdots,n)$. 于是

$$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$
$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

最后一式中的行标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是自然排列，列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 是由 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 经一次对换得到的. 设 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 s，则由对换性质有 $(-1)^t=-(-1)^s$，从而 $D_1=-\sum(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$. 证毕

用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示第 i 列. 交换行列式的第 i 行与第 j 行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$. 类似地，交换第 i 列与第 j 列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式中有两行(列)完全相同，那么行列式等于零.

证　交换相同的两行，由性质 1.2 得，$D=-D$，于是 $D=0$.

性质 1.3　将行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以数 k，等于用数 k 乘此行列式.

证　记 $D=\Delta(a_{ij})$，用数 k 乘以 D 的第 i 行，得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义 $D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$

$$=k\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i})\cdots a_{np_n}=kD.$$ 证毕

第 i 行元素乘以数 k，记作 $r_i\times k$. 类似地，第 i 列元素同乘以数 k，记作 $c_i\times k$.

推论　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i\div k$ 或 $(c_i\div k)$.

由性质 1.2 和性质 1.3 的推论即得下列性质.

性质 1.4　如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例，那么行列式等于零.

性质 1.5　如果行列式中的某一行(列)元素都是两个数之和，那么可以把该行列式表示成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.5 由读者自己证明.

性质 1.6　把行列式某一行(列)的元素同乘以数 k，加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 设原行列式为 D，变形后得到的行列式为 D_1，由性质 1.5 和性质 1.4 得，

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D+0=D.$$ 证毕

用数 k 乘以第 j 行(或列)加到第 i 行(或列)上去，记作 r_i+kr_j(或 c_i+kc_j).

由行列式的以上性质，可以把行列式化简，化为三角行列式的形式，从而方便地求出行列式的值. 此方法叫做**化上(下)三角形法**. 下面举一些例子.

例 1.6 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -4 \\ -5 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4+r_1 \\ r_3\div(-5)}]{r_2-3r_1} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-r_2]{r_3-r_2} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{4}{3}r_3} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 5\times 8 = 40.$$

例 1.7 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

证 设此行列式为 D，先把 D 化简，得

$$D\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&4a+4&6a+9\\b^2&2b+1&4b+4&6b+9\\c^2&2c+1&4c+4&6c+9\\d^2&2d+1&4d+4&6d+9\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{c_3-2c_2\\c_4-3c_2}}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&6\\b^2&2b+1&2&6\\c^2&2c+1&2&6\\d^2&2d+1&2&6\end{vmatrix}=0.$$

例 1.8 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解 从行列式 D 的元素排列特点看，每一列 n 个元素的和都相等，今把第 $2,3,\cdots,n$ 行同时加到第 1 行，提出公因子 $a+(n-1)b$，然后各行减去第一行的 b 倍，有

$$D\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&a+(n-1)b&\cdots&a+(n-1)b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_i-c_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

§1.3 行列式按行(列)展开

本节介绍另一种方法——降阶法. 一般来说，低阶行列式比高阶行列式的计算要简单，因此我们考虑用低阶行列式来表示高阶行列式，从而将高阶行列式的计算问题化为低阶行列式来进行. 为此，先介绍行列式的余子式和代数余子式的概念.

定义 1.7 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列去掉，留下的元素按原来的次序排成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，对 M_{ij} 冠以符号 $(-1)^{i+j}$，记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

如 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$，$a_{23}$ 的余子式为 $M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}$，