普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

高朝阳　杨晓东　李焱　等编

朱捷　主审

下册

ADVANCED MATHEMATICS

化学工业出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

下册

高朝阳　杨晓东　李　焱　等编
朱　捷　主审

化学工业出版社
·北京·

本书根据普通高等院校理工类本科专业高等数学课程的教学大纲编写而成，并在深度和广度上进行了适当的调整，精选了大量具有专业背景的案例，培养学生的数学素质、创新意识以及运用数学工具解决实际问题的能力。本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数及数学实验。书末附有习题答案与提示以及参考文献。本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂，注重实用性。

本书可作为高等学校工科专业本科生的教材，也可供工程技术、科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/高朝阳，杨晓东，李焱等编．—北京：化学工业出版社，2011.8
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-122-11831-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①高…②杨…③李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第139095号

责任编辑：袁俊红　唐旭华　　文字编辑：颜克俭
责任校对：徐贞珍　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
710mm×1000mm　1/16　印张15½　字数322千字　2011年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00元　

前　言

高等数学是工科院校最重要的基础课程之一，它不仅为后续的课程和科技工作提供必备的数学工具，而且对学生数学修养的培养和分析解决实际问题能力的提高起着重要而深远的作用．

本书符合国家教育部课程教学委员会提出的“高等数学教学基本要求”的应用型本科院校的培养目标，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以掌握概念、强化应用为教学重点，内容结构严谨、语言简明易懂，基本理论和基本方法的介绍由浅入深，并根据我们多年的教改与科研实践，在教学内容上进行了适当的取舍．

本书适应近年来随社会进步出现的专业调整和专业知识更新，适当地引进了一些现代数学的知识窗口，介绍了数学家和数学文化等内容，使教材具有较宽的口径和较大的适用性．本书注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养，介绍了 Matlab 软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题．通过使用 Matlab 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去由于计算技术的局限“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决．教材在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定了良好的数学基础．

本书分上下两册．上册内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程初步．下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分无穷级数、数学实验．带“ * ”号部分为选学内容．本书由高朝阳、杨晓东、李焱、王佳秋、刘龙、王春、张亚平、孙璐、刘莹、于海姝等人参与编写，全书由朱捷主审．

在本书编写过程中，宋作忠教授和徐晶副教授等给予了许多宝贵意见和建议，在此表示感谢．

本书可作为高等学校工科专业本科生的教材，也可供工程技术人员、科研人员参考．

由于水平有限，书中不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善。

编者
2011 年 6 月

目 录

第 5 章　向量代数与空间解析几何

在物理学以及日常生活中，我们经常遇见许多的量，如时间、功、面积、温度等，这些量在规定的单位下，都可以由一个数完全确定，这种只有大小的量叫标量. 另外还有一些量，如位移、力、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量叫向量. 向量不只是物理量的抽象，它也是几何空间的基本几何量，通过它可以反映空间中点与点之间的位置关系. 在将向量引进运算以后，它就成为研究空间中直线、平面等问题的有力工具.

5.1　向量及其线性运算

5.1.1　向量的概念

定义 5.1　既有大小又有方向的量称为向量.

向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母来表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{v}$、$\vec{s}$、$\vec{F}$ 等. 在几何上，常常用一个有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量也记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$，如图 5.1-1. 在以后的讨论中，我们对向量和表示它的有向线段不加区分，例如把有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 说成向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，或把向量 $\boldsymbol{a}$ 看成有向线段.

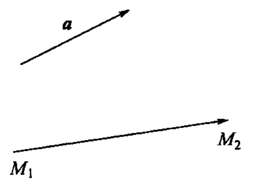

图 5.1-1

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 大小相等，方向相同，则称其为相等的向量，并记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由定义可知，如果两个有向线段的大小和方向是相同的，则不论它们的起点是否相同，我们都认为它们表示同一个向量. 这样理解的向量叫自由向量.

例如，在平行四边形 $ABCD$ 中，如图 5.1-2.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}.$$

由于自由向量可以在空间自由平移，因此可以如下规定：

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合后，它们所在的射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，如图 5.1-3，并记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等方向相反，则称 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

显然，若 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，那么 $\boldsymbol{a}$ 也是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，在图 5.1-2 中，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$. 按定义，显然 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

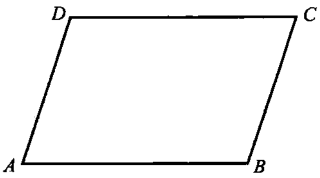

图 5.1-2

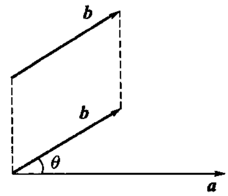

图 5.1-3

向量的大小叫做向量的模．向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$．模为 0 的向量称为零向量．记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$．

零向量实质上是起点与终点重合的向量．它的方向是不确定的，也可以说它的方向是任意的，可根据需要来选取它的方向．

模为 1 的向量叫单位向量．由于每个方向都有一个单位向量．若空间中所有单位向量都以 $\boldsymbol{O}$ 为起点，则这些向量的终点就构成一个以 $\boldsymbol{O}$ 点为球心、半径为 1 的球面．

如果两个非零向量的方向相同或者相反，就称这两个向量平行．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看成是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行．当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此，两向量平行，又称两向量共线．

设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量．当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面．

5.1.2 向量的线性运算

在实际问题中，向量与向量之间常发生一定的联系，并产生出另一个向量，把这种联系抽象成数学形式，就是向量的运算．本节先定义向量的加法运算以及向量与数的乘法运算，这两种运算统称为向量的线性运算．

(1)向量的加法

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC. 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 5.1-4．

以上规则叫做向量相加的平行四边形法则，但此法则对两个平行向量的加法没有做说明，而以下的法则不仅蕴含了平行四边形法则，还适用于平行向量的相加：

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 5.1-5.

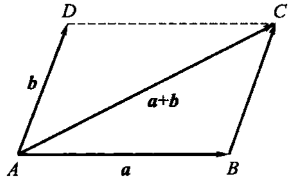

图 5.1-4

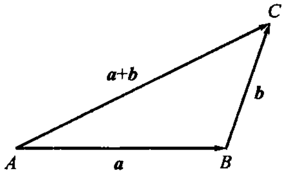

图 5.1-5

这一规则叫做向量相加的三角形法则．

向量的加法符合下列运算律：

① 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

② 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

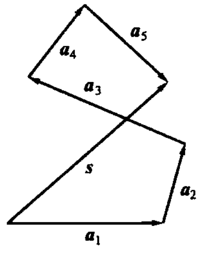

图 5.1-6

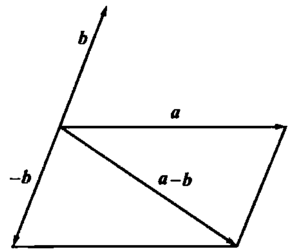

图 5.1-7

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点．相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和．如图 5.1-6，有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由此可以推得：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 由平行四边形法则给出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图法，如图 5.1-7. 由图可见，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是平行四边形另一条对角线上的向量．

(2)向量与数的乘法(数乘)

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，我们定义 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积(简称数乘)是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

② 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，故有 $-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘积满足下列运算规律：

① 结合律　$\lambda(u\boldsymbol{a})=u(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a}$.

② 分配律　$(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a}$；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且它的模

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1,$$

故$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，记作$\boldsymbol{e}_a$，即有$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 于是

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

由于向量$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$平行，因此常用向量与数的乘积来判定两个向量的平行关系，即有如下的定理．

定理 5.1 设向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$的充要条件是存在唯一的实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性由数乘的定义即得．下面证必要性．

设$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取$|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向时，$\lambda$取正值，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向时，$\lambda$取负值，即有$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数λ的唯一性．设$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设$\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{a}$. 两式相减，得$(\lambda-u)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即

$$|\lambda-u|\ |\boldsymbol{a}|=0.$$

由$|\boldsymbol{a}|\neq0$，故$|\lambda-u|=0$，即$\lambda=u$.

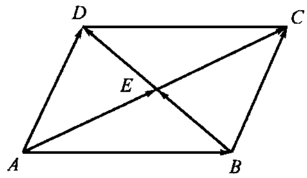

图 5.1-8

【例 5.1.1】 证明对角线互相平分的平面四边形是平行四边形．

证明 设平面四边形$ABCD$的对角线相交于E，如图 5.1-8，

由于$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}$，

故$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$，即$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$．

这就说明线段AD与BC平行且长度相等，即四边形$ABCD$是平行四边形．

习题 5.1

1. 设A、B、C为三角形的三个顶点，求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$．

2. 已知平行四边形两邻边向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，其对角线交点为$M$，求$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$．

3. 设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$来表示$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

4. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，证明$A$，$B$，$D$三点在一条直线上．

5. 设C为线段AB上一点且$|CB|=2|AC|$，O为AB外一点，记$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$来表示$\boldsymbol{c}$.

5.2 点的坐标与向量的坐标

5.2.1 空间直角坐标系

为了确定空间中一点的位置，就必须建立空间直角坐标系．它是平面直角坐标系的

推广.

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴 Ox,Oy,Oz,分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴). 这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位,它们的正方向符合右手法则:以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时,竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 5.2-1. 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 直角坐标系,点 O 称为该坐标系的原点.

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面,称为坐标面,由 x 轴和 y 轴确定的坐标面简称为 xOy 面,类似地还有 yOz 面与 zOx 面. 这三个坐标面把空间分成 8 个部分,每一部分叫做一个卦限. 如图 5.2-2. 八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ 表示,它们的编号顺序是按 xOy 平面的第一、二、三、四象限上方部分分别编为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限;对应地,在 xOy 平面下方部分依次编为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

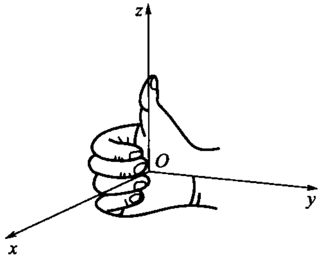

图 5.2-1

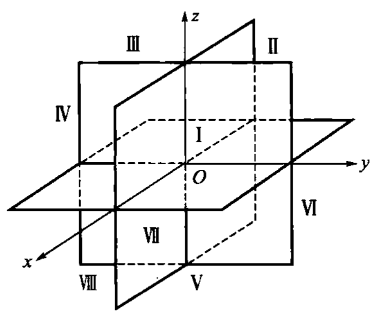

图 5.2-2

设 M 是空间中的一点,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P,Q,R 三点,如图 5.2-3. 这三个点分别称为点 M 在三个坐标轴上的投影点. 设 P,Q,R 三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x,y,z,于是空间中的一点 M 就唯一确定了一个有序数组(x,y,z). 反过来,对任意一个有序数组(x,y,z),在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x,y,z 确定的唯一的点. 这样,通过空间直角坐标系,空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间建立了一一对应的关系. 这组数(x,y,z)就叫做点 M 的坐标,并依次称 x,y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标,点 M 记为$M(x,y,z)$.

对于空间任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,过 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1,M_2 为对角线的长方体,如图 5.2-4,各棱长度分别为 $|x_1-x_2|$,$|y_1-y_2|$,$|z_1-z_2|$. 根据勾股定理,对角线 M_1M_2 的长度为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}. \qquad (5.2.1)$$

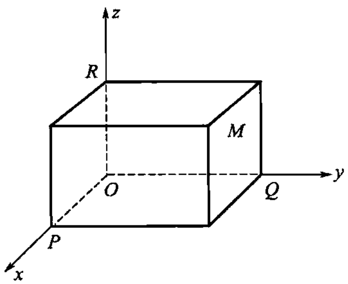

图 5.2-3

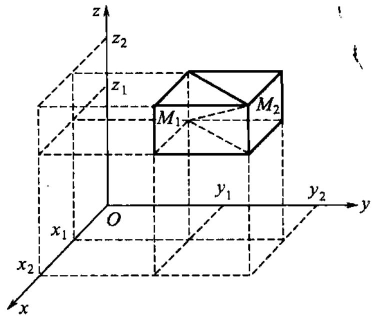

图 5.2-4

【例 5.2.1】 所有与原点的距离为常数 r 的点的坐标(x,y,z)应满足什么方程?把这些点的集合表示出来.

解 设 $M(x,y,z)$是满足题设条件的任一点,原点是 $O(0,0,0)$. 按题设,$|OM|=r$,即有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

或

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

这就是所求的方程.

记所有与原点距离为 r 的点的集合为 B,则

$$B=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=r^2\},$$

它是中心在原点、半径为 r 的球面.

5.2.2 向量的坐标

在空间直角坐标系中,记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量,称为 $Oxyz$ 坐标系下的标准单位向量.

任给向量 $\boldsymbol{a}$,总可以通过平移使其起点位于原点 O,从而有对应点 $M(a_x,a_y,a_z)$,满足 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$. 过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面,加上三个坐标面,六个平面围成一个长方体,OM 是其对角线,设点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴的投影点为 P,Q 和 R,如图 5.2-5,那么有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

且 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 a_x,a_y,a_z. 易知

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{5.2.2}$$

式(5.2.2)表明空间任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可写成标准单位向量的线性组合,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的标准分解式,其中 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 分别叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分向量.

显然,给定向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组(a_x,a_y,a_z)之间有一一对应的关系,据此我们把有

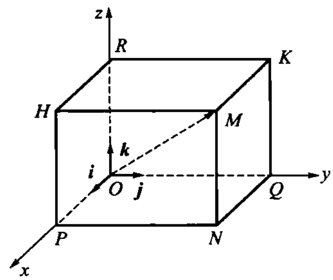

图 5.2-5

序数组(a_x,a_y,a_z)称为向量$\boldsymbol{a}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z). \tag{5.2.3}$$

式(5.2.3)称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标表示式.

空间任何一点$P(x,y,z)$,都对应一个向量$\overrightarrow{OP}$,称为 P 点(关于原点)的向径.

如果给定了向量的坐标表达式,则可方便地进行向量的加法、减法以及向量与数的乘法.

设
$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$
即
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数乘法的结合律与分配律,有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加、减及与数相乘,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 5.1 指出,当向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,向量$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$相当于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z).$$

这也就相当于向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$对应的坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{5.2.4}$$

【例 5.2.2】 设空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$,求$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

解 由图 5.2-6,有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

此例表明,起点不在原点的向量的坐标等于其终点的坐标减去起点的坐标.

5.2.3 向量的模、方向角和投影

(1)向量的模

设向量$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,则点 M 的坐标为(a_x,a_y,a_z),根据空间两点

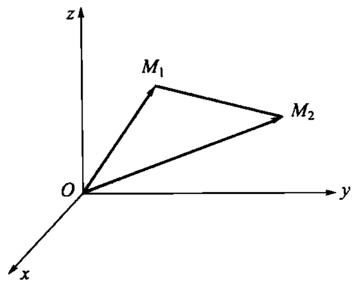

图 5.2-6

的距离公式,可得

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{OM}| = |OM| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{5.2.6}$$

【例 5.2.3】 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$,求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7,1,3) - (4,0,5) = (3,1,-2),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

于是

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

(2)方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角,即与标准单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 所成的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角($0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$),如图 5.2-7 方向角的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 方向角或方向余弦完全确定了 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

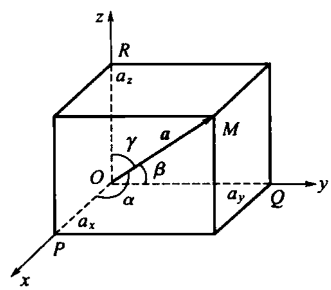

图 5.2-7

设 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$,$P,Q,R$ 分别为 M 点在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影点,则 P,Q,R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 a_x, a_y, a_z. 又有 $|\overrightarrow{OM}| = |\boldsymbol{a}|$,于是得到

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{5.2.7}$$

其中 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

容易验证,方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{5.2.8}$$

根据式(5.2.8),以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,即有

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

从式(5.2.6)与式(5.2.7)可知,当向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式给出后,它的模和方向角就确定了;反之,当 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角已知时,可得出它的坐标为

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \qquad (5.2.9)$$

(3)向量的投影

设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{ON}$，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，且$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \varphi$. 过 M 点作平面垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线并交该直线于点 M'. 如图 5.2-8，则称有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量．易知$\overrightarrow{OM'} = (|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_b = (|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_b$. 称上式中的数 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，并记作 $Prj_b\boldsymbol{a}$. 当 $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时，$Prj_b\boldsymbol{a}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\overrightarrow{OM'}$ 的长度；当 $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$ 时，$Prj_b\boldsymbol{a}$ 是该投影向量长度的相反数；当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，$Prj_b\boldsymbol{a}$ 等于零．按此定义并与式(5.2.9)比较，可知向量 a 的坐标即为 a 在三个坐标轴上的投影所组成的有序数组：

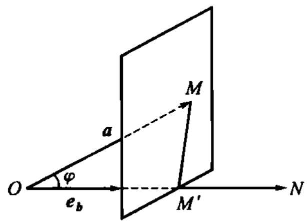

图 5.2-8

$$a_x = Prj_x\boldsymbol{a}, \quad a_y = Prj_y\boldsymbol{a}, \quad a_z = Prj_z\boldsymbol{a}.$$

【例 5.2.4】 已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦、方向角．

解 $\overrightarrow{AB} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2})$，

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2.$$

有

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

【例 5.2.5】 已知向量 $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量．

解 将已知向量代入解得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} \\ &= 4(3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) + 3(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) - (5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) \\ &= 13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

则在 x 轴上的投影为 $a_x = 13$，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 5.2

1. 指出下列各点所在的卦限．

$A(1,-2,3)$；　$B(2,3,-4)$；　$C(2,-3,-4)$；　$D(-2,-3,1)$.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置．

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

3. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 已知三角形的三个顶点$A(2,-1,4)$,$B(3,2,-6)$,$C(-5,0,2)$. 求分别过A,B,C三点的中线长度.

5. 已知点$A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$,写出以线段AB为直径的球面方程.

6. 已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

7. 向量$\overrightarrow{AB}$的起点坐标为$A(2,-1,7)$,且$\overrightarrow{AB}$与$\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$的方向相同,已知$|\overrightarrow{AB}|=34$,求点$B$的坐标.

8. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量$\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$在$x$轴上的投影以及在$y$轴上的分向量.

5.3 向量的乘法运算

5.3.1 向量的数量积(点积、内积)

设一物体在恒力$\boldsymbol{F}$的作用下沿直线从点M_1移动到点M_2,如图5.3-1. 以$\boldsymbol{s}$表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$,由物理学知道,力$\boldsymbol{F}$所做的功为

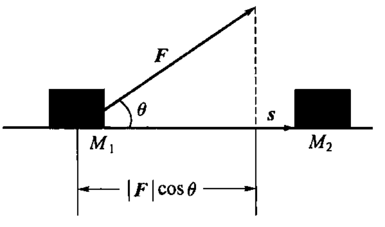

图 5.3-1

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ为力$\boldsymbol{F}$与位移$\boldsymbol{s}$之间的夹角. 在一些其他问题中,有时也会遇到上面形式的算式,下面引入向量的数量积的定义.

设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是两个向量,定义向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$)是由式(5.3.1)确定的一个数:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{5.3.1}$$

两向量的数量积也叫点积或内积. 按数量积的定义,力$\boldsymbol{F}$使物体产生位移$\boldsymbol{s}$时所做的功可以表示为$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时,$Prj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,$Prj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,其中$\theta$是$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$之间的夹角,这样,数量积又可以写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot Prj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot Prj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}, \tag{5.3.2}$$