# 分形几何与分形插值

孙洪泉 著

科学出版社

# 分形几何与分形插值

孙洪泉　著

本书获得国家自然科学基金项目(40772198)资助

科　学　出　版　社

北　京

## 内 容 简 介


本书以分形理论、分形维数和分形插值为主线，介绍分形几何理论与分形的应用. 讲述了拓扑分析、概率论和代数的基本知识；介绍了经典分形集及其构造方法，Hausdorff 测度、Hausdorff 维数、盒维数的计算公式，几种经典分形集的自相似维数；给出了工程实际应用中盒维数的计算方法(各种不同盒子的取法)；讨论了多重测度理论、多重分形；结合研究成果，介绍了分形插值曲线、分形插值曲面的理论与构造方法；给出了岩石断裂表面和断层面分形插值曲面研究实例，提出了维数精度和偏差精度的概念，给出了插值邻域的划分和多重纵向压缩比的确定方法. 为了便于读者应用，本书最后给出了用 MATLAB 语言编写的分形插值曲线和分形插值曲面计算机源程序，并详细介绍了程序功能、使用方法与计算实例.

本书内容概念讲述清楚，数学推导严密，研究实例实用. 可作为应用数学、力学、岩土工程、地质、采矿等专业高年级本科生、研究生的学习参考书，也可作为相关专业大专院校教师和研究院所研究人员的科研参考书.



**图书在版编目(CIP)数据**

分形几何与分形插值/孙洪泉著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-024713-1

Ⅰ. 分… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 分形几何 Ⅳ. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 004225 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：鑫联必升

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011 年 3 月第一次印刷 印张：14 3/4

印数：1—2 500 字数：284 000

**定价：48.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

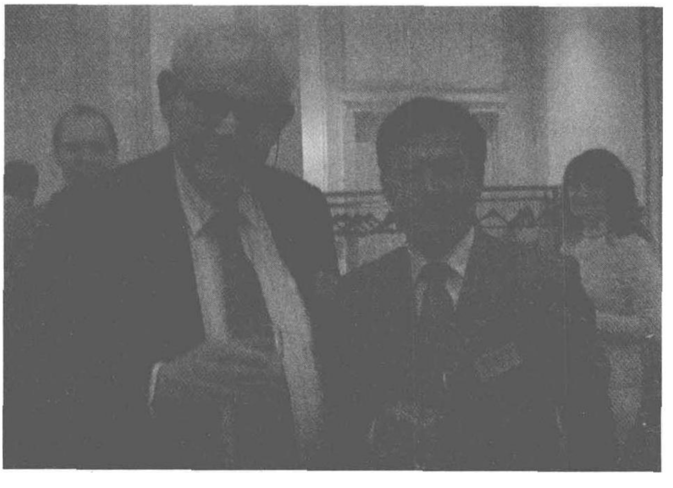
# 作 者 简 介

孙洪泉, 男, 教授, 博士. 1981 年毕业于中国矿业大学数学专业, 获理学学士学位; 1998 年毕业于中国矿业大学工程力学专业, 获工学博士学位. 1993 年 4 月 ~ 1994 年 4 月, 赴美国爱达荷大学, 高级访问学者; 2003 年 10 月 ~2004 年 4 月, 赴澳大利亚悉尼大学, 高级访问学者. 曾任国际地质统计学学会会员、中国教育工会第四届全国委员会委员等职.

主要研究方向有分形理论及应用研究、地质统计学、空间信息统计分析、计算机应用软件开发. 将分形几何、空间信息统计方法应用到土木工程、工程力学、地理信息系统、环境保护、地球科学、资源开发等领域中, 研究统计规律, 进行预测、预报. 较早地开展了地质统计学、分形几何的教学和应用研究工作, 出版了我国煤炭系统第一本《地质统计学及其应用》的教科书. 作为课题组的主要成员, 他的科研成果先后获得教育部自然科学奖一等奖、科学进步奖三等奖、江苏省科技进步奖四等奖.

主要讲授课程有 “分形几何”、“MATLAB 语言”、“地质统计学”、“数学地质”、“程序设计”、“多元统计分析”、“数据结构”、“运筹学”、“有限元分析”、“结构力学”、“振动力学”、“张量分析”、“工程力学” 等.

曾被评为煤炭工业部优秀青年知识分子、煤炭工业部优秀学生工作干部, 获得学校优秀教学质量一等奖、教书育人优秀教师、优秀教学成果奖、三育人先进个人等荣誉称号.



孙洪泉教授 (右) 与 B. B. Mandelbrot(左) 合影 (2004 年 4 月于温哥华)

# 前言

自从 20 世纪 70 年代法国数学家曼德尔布罗特 (B. B. Mandelbrot) 创立分形几何学以来, 有关分形理论与应用的研究已深入到各个科学技术领域, 并取得了令人瞩目的成就.

人类在认识世界和改造世界的活动中离不开几何学. 在历史上, 科学技术的发展与几何学的进步始终是密切相关的. 在生产实践和科学研究中, 人们用以描述客观世界的几何学是欧几里得几何学以及解析几何、射影几何、微分几何等, 它们能有效地描述三维世界的许多对象, 如各种工业产品的形状、建筑物的外形和结构等, 因而千百年来一直是人们生产与科研的有用工具.

随着现代科学和计算机技术的发展, 人们逐渐感到用传统的几何学已不能有效地描述自然界中大量存在的对象, 如海岸线、山形、河川、岩石、断裂、树木、森林、云团、闪电等. 它们都是非规则形状, 无法用欧几里得几何学来描述. 欧氏几何只能用直线、圆、正方体等规则的几何形体来近似描述自然界中的景物. 曼德尔布罗特说过: "为什么几何学常常被称为是 '干的' 和 '冷的', 其中一个原因在于它无法描述像云彩、山脉、海岸线或树木那样的形状. 云彩不是球体, 山峰不是锥体, 海岸线不是圆形, 树皮不是光滑的, 闪电也不在一条直线上传播". 分形几何为人们研究自然界中广泛存在的复杂无序、不规则的现象提供了一种定量描述手段; 为人们从局部认识整体、从有限认识无限提供了新的方法; 为人们认识自然界、拓宽思维提供了新的理论. 经过近几十年的开拓和发展, 分形理论在地球科学、计算机科学、物理学、材料科学、哲学、数学、医学等众多学科得到了广泛的应用, 甚至在电影、音乐、美术和书法等艺术领域也有诸多研究成果. 分形对现代科学产生了至为深远的影响, 所以美国著名物理学家惠勒说: "可以相信, 明天谁不熟悉分形, 谁就不能被认为是科学上的文化人! "

纵观几十年来人们对分形理论与应用的研究, 主要体现在以下 4 个方面: 一是对自相似性的研究. 自相似性是分形的一个重要特征, 它既是对自然界复杂事物是否具有分形特征的鉴别, 也是运用迭代函数系统产生分形图形的理论基础. 二是对分形维数 (分数维) 的研究. 分数维是对长期以来人们对传统维数 (整数维) 概念的一个划时代的推广. 在实际应用中, 主要是研究多种分形维数的定义和计算方法, 以及用分形维数作为描述自然界复杂现象的定量指标. 三是对分形插值的研究. 根据分形的自相似原理, 运用迭代函数系的方法, 由分形物体的部分信息, 得出分形物体的整体形态, 主要用于分形体的模拟. 四是对分形理论的研究. 分形空间中的有关分形变量、数学公式、定理、定律进一步完善. 分形的研究进一步促进了分形

理论自身的发展.

本书是作者在多年教学和科研的基础上总结而成的. 作者一直想向读者奉献一本介绍分形几何的基本内容、在工程实际中分形维数的求法和分形插值的理论与应用方法的书, 以推动分形应用的普及和提高. 令人感到高兴的是, 在有关专家和同行们的大力支持下, 这一愿望今天得以实现了.

全书共 9 章. 第 1 章绪论, 主要介绍分形的起源及分形几何与标度不变性的概念, 分析维数与分形维数的关系、插值与分形插值的原理. 第 2 章数学基础, 主要讲述拓扑分析、概率论和代数的基本知识. 第 3 章分形集的构造, 给出了经典分形集的构造方法. 第 4 章分形维数, 系统介绍 Hausdorff 测度、Hausdorff 维数、分形维数的定义、几种经典分形集的自相似维数, 并结合工程实际应用, 给出了在盒维数计算中各种不同盒子的取法. 第 5 章多重分形, 讨论多重测度理论、一维和二维规则多重分形、广义分形维数、不规则多重分形谱的计算. 第 6 章分形插值曲线, 着重介绍迭代函数系统、分形插值函数、广义分形插值. 第 7 章分形插值曲面, 叙述分形曲面的生成方法及三角形区域上的分形插值曲面的构造, 研究矩形区域分形插值曲面理论, 解决了矩形区域分形插值曲面的连续性问题, 给出了改进的分形插值函数公式. 第 8 章介绍岩石断裂表面和断层面分形插值曲面研究实例, 提出维数精度和偏差精度的概念, 给出插值邻域的划分和多重纵向压缩比的确定方法. 第 9 章为分形插值 MATLAB 程序, 简要介绍 MATLAB 语言, 给出了分形插值曲线和分形插值曲面的 MATLAB 语言计算机源程序, 包括自仿射分形插值曲面子程序和改进的自仿射分形插值曲面子程序.

作者力求做到基本概念清楚, 数学推导严密. 为了使读者更好地掌握分形插值方式, 并能在实际工作中得到应用, 书中给出了用 MATLAB 语言编写的分形插值曲线和分形插值曲面源程序清单.

本书在编写过程中得到了谢和平院士的精心指导, 这使本书在理论水平和应用方法上都有了很大的提高, 在此作者表示衷心的感谢. 感谢彭苏萍院士、秦勇教授、于广明教授、冯志刚教授从不同的角度、多个方面给本书的提出有益的建议和指导. 有许多同行专家对本书的编写都提了宝贵的意见, 使本书的内容更加完善, 在此一并表示诚挚的谢意.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (40772198) 的资助.

由于作者水平有限, 书中不妥之处, 恳请读者批评指正.

孙洪泉

2010 年 3 月于苏州

# 目　录

# 第1章 绪　　论

## 1.1 分形的起源

人类在认识世界和改造世界的活动中离不开几何学. 在历史上, 科学技术的发展与几何学的进步始终是密切相关的. 在经典几何学中, 可以用直线、圆锥、球等一类规则的形状去描述诸如车轮、道路、建筑物等人造物体. 因为这些物体本来就是根据欧氏几何的规则图形生成的. 然而, 在自然界中, 却存在着许许多多极其复杂、极不规则的形状, 如海岸线、山川、河流、岩石、断裂、森林、闪电等, 它们都是非规则形状, 无法用欧几里得几何来描述.

下面给出欧氏空间中不能解释的一些"奇怪"现象.

科赫 (Koch) 雪花[1] 的面积有限, 周长为无限. 这是欧氏空间中的"奇怪"现象. 为了说明这样的事实, 下面给出 Koch 雪花的生成步骤 (图 1.1).

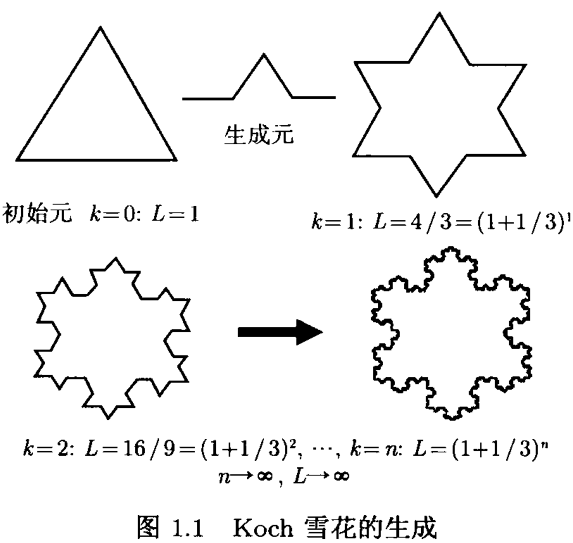



图 1.1　Koch 雪花的生成

取周长为 1 的正三角形为初始元.

第 1 步 ($k$=1)　将边长三等分, 并以中间的一份为底边构造正三角形, 去掉该三角形的底边, 将两腰与剩下的两份相连, 得到生成元 (图 1.1). 原三角形每条边都用生成元替换, 得到具有 6 个凸顶点的 12 边形.

第 2 步 ($k$=2)　对第 1 步得到的图形, 同样将其边长三等分, 并以中间的一份构造正三角形, 去掉该三角形的底边, 将两腰与两边的两份相连, 得到生成元. 原

12 边形的每条边都用生成元替换, 得到 24 个凸顶点的 48 边形.

如此方法, 一直做下去, 当 $k \to \infty$ 时便得到了 Koch 雪花.

运用初等几何和初等代数的知识不难求得每一步中图形的周长 (设 $k$ 为步数, $L$ 为图形边长) 如下:

$$
\begin{aligned}
&k=0: \quad L=1,\\
&k=1: \quad L=\frac{4}{3}=\left(1+\frac{1}{3}\right)^1=\left(\frac{4}{3}\right)^1,\\
&k=2: \quad L=\frac{16}{9}=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2,\\
&\cdots\cdots\\
&k=n: \quad L=\left(1+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n,\\
&n\to\infty: \quad L\to\infty.
\end{aligned}
$$

由此可见, 随着 $n \to \infty$, Koch 雪花的周长 $L \to \infty$.

然而, 由 Koch 雪花的制作过程可知, 每一步的图形都包含在半径为 1 的单位圆中. 因此, Koch 雪花的面积是有限的. 这种面积有限、周长为无穷大的图形在欧氏空间中也是一种不可思议的 “奇怪” 现象.

为什么会有这种 “奇怪” 的现象发生呢? 从分形的概念引入之后, 人们发现用上述方法作出的 Koch 雪花边长是极其复杂的, 它的维数已不是欧氏空间中曲线的维数 —— 一维了, 它的维数是大于一维的. 但这个边长也不能填满任何一个小的面积, 所以它的维数是小于二维的.

同样, 在测量英国海岸线时, 人们发现海岸线的长度随着测量时使用的码尺的变小而增大. 1967 年, 法国数学家曼德尔布罗特 (B. B. Mandelbrot) 提出了 “英国的海岸线有多长” 的问题, 这好像极其简单, 因为长度依赖于测量单位. 以 1km 为单位测量海岸线, 那些短于 1km 的迂回曲折都忽略掉了; 若以 1m 为单位测量, 则那些大于 1m 的迂回曲折就能被测量出来, 所以测出的长度将变大. 测量单位进一步变小, 测得的长度将越来越大. 如果这些越来越大的长度能趋近于一个确定值, 那么这个极限值就是海岸线的长度. 但 Mandelbrot 发现: 当测量单位变小时, 所得的长度是无限增大的. 难道海岸线的长度是不确定的, 或者说, 海岸线是无限长的. 为什么? 后来人们发现, 英国海岸线以及 Koch 雪花的周长都是极其复杂的几何图形, 它们的维数是介于 1~2 的分数维. 而人们使用的量测码尺都是一维的. 用小于图形维数的码尺去度量图形, 得到的结果只能是无穷大. 反之, 用大于图形维数的码尺去度量图形, 得到的结果只能是零.

上述例子说明确实存在维数不是整数的图形, 分数维 —— 分形几何的思想便从这里萌芽.

"分形" 一词译于英文 fractal, 是分形几何的创始人 Mandelbrot 于 1975 年由拉丁语 *frangere* 一词创造而成, 词本身具有 "破碎"、"不规则" 等含义. 1973 年, 法国数学家 Mandelbrot 在法兰西学院讲课时, 首次提出了分维和分形几何的设想. 他创造了 "分形 (fractal)" 这个新术语. 分形这个词也与拉丁语 *fractus* 极其相似, 其原义具有不规则、分裂、支离破碎等意思. 引入中国, fractal 起初被人们译为 "分形"、"分维"、"分数维"、"分维数" 等, 现在已基本上统一称为 "分形".

Mandelbrot 创立的分形几何[2] 借助自相似性原理, 洞察混乱现象中的精细结构, 其研究对象为自然界和社会活动中广泛存在的复杂无序, 而又具有某种规律的系统, 它为人们从局部认识整体、从有限认识无限提供了新的方法, 为研究自然界中的不规则现象提供了一种定量描述手段. 因此, 近年来, 分形几何不论在理论上, 还是在应用上都得到了迅速的发展[3~7].

## 1.2 什么是分形

人类生活的世界是一个极其复杂的世界, 如喧闹的都市生活、变幻莫测的股市变化、复杂的生命现象、蜿蜒曲折的海岸线、坑坑洼洼的地面等, 都表现了客观世界特别丰富的现象. 在传统欧氏几何学里, 人们总是把研究对象想象成一个个规则的形体, 如直线、圆形、方形、曲面、立方体等, 而人类生活的现实世界中存在的物体, 竟有如此多的不规则和支离破碎. 与欧几里得几何图形相比, 拥有完全不同层次的复杂性, 分形几何则提供了一种描述和研究这种不规则复杂现象的新方法.

什么是分形几何? 通俗一点说, 就是研究无限复杂但具有一定意义下的自相似图形和结构的几何学. 什么是自相似呢? 日常生活中的菜花就是一个具有统计自相似性的分形几何体的很好的例子 (图 1.2). 从一棵菜花上掰下一枝, 放大后它与整体是相似的, 再从这枝上掰下更小的一枝, 再进行放大, 它与这棵菜花的整体也是相似的 …… 又如, 河流水系 (图 1.3), 一个大的河流水系与它的支流、更小的水系就具有统计意义上的自相似性. 图 1.3 显示了亚马逊河水系的自相似特征, 经测量计算得其分形维数为 1.85.

其实, 自相似的例子在我们身边到处可见. 例如, 一棵大树与它自身上的树枝及树枝上的枝杈, 在形状上没什么大的区别, 所以说, 大树与树枝的这种关系在几何形状上称为自相似关系; 再拿来一片树叶, 仔细观察一下叶脉, 它们也具备这种性质; 动物也不例外, 一头牛身体的一个细胞中的基因记录着这头牛的全部生长信息; 还有高山的表面, 无论怎样放大其局部, 它都如此粗糙不平, 等等.

分形几何的创始人 Mandelbrot 说过: "云团不是球体, 山峰不是锥形, 海岸线不是圆弧, 树皮也并不光滑, 闪电也不是直线传播."[2] 这就说明了在自然界中, 大量的物体都不能用传统的几何形态来精确地进行描述, 而在这些 "不规则" 的形体

中, 大量都具有分形的特征.

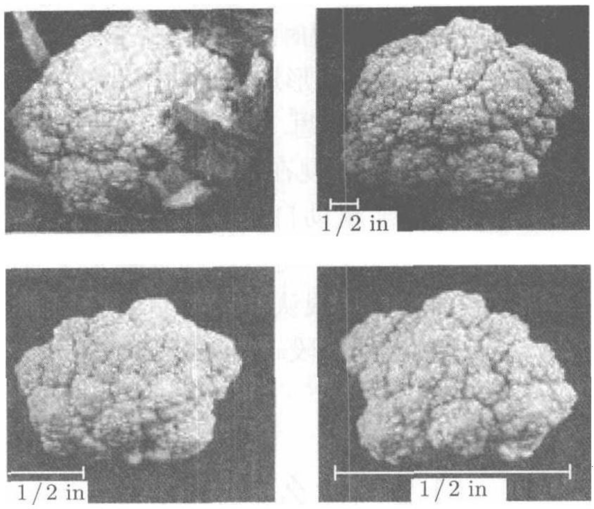



图 1.2　菜花的自相似性征

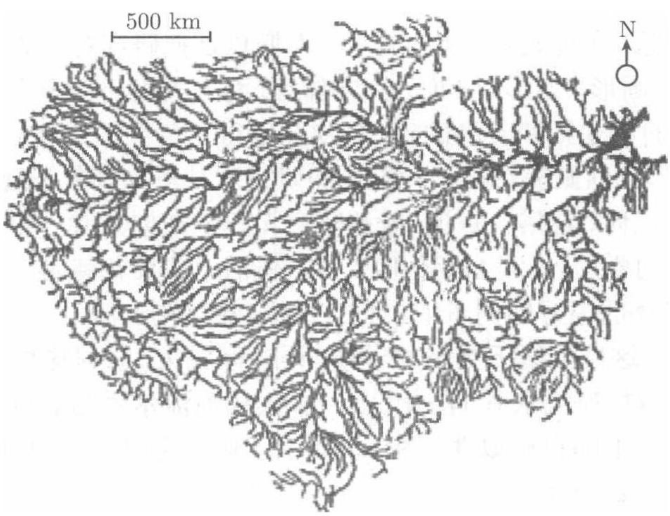



图 1.3　河流水系的分形特征

分形是适合于描述大自然的几何. 研究表明星云的分布、海岸线的形状、山形的起伏、地震、河网水系、材料组织生长、湍流、酶和蛋白质的结构、人体血管系统、肺膜结构、脑电图、城市噪声、股市的涨落等, 大至宇宙星云分布, 小到准晶态的晶体结构, 从地学、生物学、物理学、化学以至社会科学都普遍存在分形现象.

分形几何揭示了世界的本质, 分形几何是真正描述大自然的几何学. 区别于经典几何, 分形几何有两个基本特征, 即自相似性与分形维数. 自相似性就是说物体

的任何细小部分与整体相似, 如上述 Koch 雪花的周长. 这种相似性称为严格自相似性. 然而, 自然界中常见的自相似是统计自相似, 即统计意义上的自相似性. 分形维数则意味着维数可以不再是整数了.

对上述分形的描述加以引申, 可以得到下列分形的含义:

(1) 分形既可以是几何图形, 也可以是由 "功能" 或 "信息" 架起的数理模型;

(2) 分形可以同时具有形态、功能和信息三方面的自相似性, 也可以只有其中某一方面的自相似性;

(3) 自相似性可以是严格的, 也可以是统计意义上的, 自然界的大多数分形都是统计自相似的;

(4) 相似性有层次结构上的差异, 数学中的分形具有无限嵌套的层次结构, 而自然界中的分形只有有限层次的嵌套, 并且要进入到一定的层次结构以后才有分形的规律;

(5) 相似性有级别 (即使用生成元的次数或放大倍数) 上的差异, 级别最高的是整体, 最低的称为 0 级生成元, 级别越接近, 则越相似, 级别相差越大, 相似性越差, 可用无标度区间或标度不变性表示.

## 1.3 标度不变性

为了理解自相似性, 有必要了解什么是标度不变性 (亦称为无标度性). 无标度性是指不具有特征长度的客观对象的重要特性. 这里提到的特征长度, 通常是用来表征某一形状特征的长度. 一般只要特征长度不变, 则其性质就不会有根本的变化. 自相似性是不具有特征长度的对象 (或图形) 的重要特征. 自相似性是分形的基本特性, 是跨越不同尺度 (也包括空间和时间尺度) 的对称性.

地质现象的尺度是地质学的重要概念之一. 在对一些地质现象拍照时, 一定要放上一个能表示尺度大小的物体, 如一枚硬币、一把锤子或站上一个人. 没有这些物体, 就很难确定这些照片反映的是 10m 还是 10km 范围的现象. 因为在这样的尺度范围内各种褶皱看起来都是相似的. 另一个例子是关于岩石海岸线的航空照片, 如果没有表示特征长度的物体, 一棵树或一所房屋, 那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的. 当观察一块石头时, 就会发现它像一座微缩的山脉. 大自然的神工鬼斧可以把大尺度的山脉微缩成小尺度, 在一块一两英尺大小的石块上, 可以找到自然界中各种图形和构造的变化形态. 石头的上苔藓像森林, 晶体的颗粒像悬崖. 在多数情况下, 石头的表面与天然山脉表面相比, 更引人入胜, 在形态上更多种多样, 在色彩上更加五光十色, 特别对于从结晶山脉上滚落下来的石头更是如此[7].

任何规则的几何形状都具有一定的特征尺度. 例如, 画一个圆, 在特征尺度内观察, 它是圆, 尺度变小时观察它的一部分, 就成为一段圆弧, 尺度再变到很小时观

察, 就只能看到一小段直线段了. 对地球的观察也是这样, 卫星上的宇航员可以看到地球是一个球体, 而生活在地球上的人们则看不到球体. 放眼望去, 可以看到山川地貌. 如果只看到眼皮底下, 只能看到一小块平地了. 然而, 分形无特征尺度, 它含有一切尺度的要素. 在每一尺度上都有其复杂的细节. 这就称为无标度性, 或者叫做自相似性. 所谓分形的复杂性就在于此, 它给出了自然界中复杂几何形态的一种定量描述.

自相似性或标度不变性在数学上可表示为

$$f(\lambda r) = \lambda^m f(r), \tag{1.3.1}$$

即把 $r$ 扩大为 $\lambda r$ 后, 新的函数就增大为原函数的 $\lambda^m$ 倍 ($\lambda$ 和 $m$ 都是常数), 即标度改变了 $\lambda$ 倍后, 函数具有自相似性 (新函数是膨胀的或收缩的原函数) 或标度不变性. 说得严格一点, 此时函数具有标度变换下的不变性, $\lambda^m$ 就是所谓的标度因子. 满足这一性质的简单函数是幂函数,

$$f(r) \sim r^m. \tag{1.3.2}$$

由此可得

$$f(\lambda r) \sim (\lambda r)^m = \lambda^m r^m = \lambda^m f(r). \tag{1.3.3}$$

对于规则分形, 标度扩大的倍数 $\lambda$ 取间断的值.

其他形式的函数, 如指数函数、高斯函数等, 就不具有这种标度不变性. 改变它们的标度后, 新函数和原先的函数没有简单的正比关系. 这些函数包含有一个特征长度, 在此范围内它们衰减很快. 幂函数没有这种特征长度, 它不仅衰减慢, 而且在不同层次 (如上一个数量级和下一个数量级) 以同样的比例衰减. 这就是说, 它们具有标度不变性, 或标度变换下的不变性.

## 1.4 维数与分形维数

在欧氏空间中, 人们习惯把空间看成三维的, 平面或球面看成二维的, 而把直线或曲线看成一维的. 也可以稍加推广, 认为点是零维的. 还可以引入高维空间, 但通常人们习惯于整数的维数.

分形的另一个特征是分数维数, 即维数可以是分数的. 这类维数是在研究自然界中的复杂现象时需要引入的一个重要概念.

为了弄清楚分形维数的计算方法, 首先回顾在欧氏空间中, 度量不同维数的单位形体时, 尺码与度量次的关系 (图 1.4).

取单位长的线段 (一维形体), 以长为 $r = 1/2$ 的码尺去度量它, 度量的次数为 $N(r)= 2$, 它是码尺的一次幂分之一; 若以长为 $r = 1/3$ 的码尺去度量它, 则度量的

次数为 $N(r)=3$, 它仍然是码尺的一次幂分之一; …… 若以长为 $r=1/n$ 的码尺去度量它, 则度量的次数为 $N(r)=n$, 它仍然是码尺的一次幂分之一, 如图 1.4(a) 所示.

$$r=\frac{1}{2}, N(r)=2=2^1=\frac{1}{(1/2)^1}, \quad l(r)=r^1\cdot N(r)=1$$

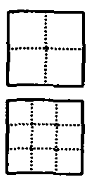
$$r=\frac{1}{3}, N(r)=3=3^1=\frac{1}{(1/3)^1}, \quad l(r)=r^1\cdot N(r)=1$$

……

……

$$r=\frac{1}{n}, N(r)=n=n^1=\frac{1}{(1/n)^1}, \quad l(r)=r^1\cdot N(r)=1$$

(a) 一维形体



$$r=\frac{1}{2}, N(r)=4=2^2=\frac{1}{(1/2)^2}, \quad l(r)=r^2\cdot N(r)=1$$

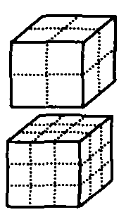
$$r=\frac{1}{3}, N(r)=9=3^2=\frac{1}{(1/3)^2}, \quad l(r)=r^2\cdot N(r)=1$$

……

……

$$r=\frac{1}{n}, N(r)=\cdots=n^2=\frac{1}{(1/n)^2}, \quad l(r)=r^2\cdot N(r)=1$$

(b) 二维形体



$$r=\frac{1}{2}, N(r)=8=2^3=\frac{1}{(1/2)^3}, \quad l(r)=r^3\cdot N(r)=1$$

$$r=\frac{1}{3}, N(r)=27=3^3=\frac{1}{(1/3)^3}, \quad l(r)=r^3\cdot N(r)=1$$

……

……

$$r=\frac{1}{n}, N(r)=\cdots=n^3=\frac{1}{(1/n)^3}, \quad l(r)=r^3\cdot N(r)=1$$

(c) 三维形体

图 1.4 欧氏空间中单位形体码尺与度量次数之间关系

$r$: 码尺, $N(r)$: 度量次数, $l(r)$: 单位形体体积

再取单位正方形 (二维形体), 以边长为 $r=1/2$(码尺) 的小正方形去度量它, 度量的次数为 $N(r)=4$, 它是码尺的二次幂分之一; 若以边长为 $r=1/3$(码尺) 的小正方形去度量它, 则度量的次数为 $N(r)=9$, 它仍然是码尺的二次幂分之一; ……