高等学校教学参考书

微分几何

方德植编

人民教育出版社

本书以向量作为工具讲述"古典"微分几何。

全书内容共分四章。第一章主要是阐述"古典"微分几何的对象与方法。第二章与第三章对曲线论与曲面论的基础作了系统的、比较详细的介绍。还有一些重要的内容安排在第四章，作为补充教材之用。最后编入若干问题与定理供读者参考。

本书可作为综合大学数学专业及有关专业的教学参考书。

微 分 几 何

方 德 植 编

人民教育出版社出版

北 京 印 刷 一 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号13012·0435　开本850×1168 1/32　印张9 1/16

字数 225,000　印数 8,001—14,200　定价 (5)0.90元

1964年7月第1版　1980年7月北京第3次印刷

序　言

本书是以編者在厦門大学数学系多年来讲授微分几何所編的讲义为基础，并根据 1962 年教育部发下的綜合大学(五年制)数学专业教学計划(草案)中，对微分几何这門課程的安排(授課时数和开設学期)进行修訂而写成的.

本书总的特点是：由淺入深，循序漸进，以不多的篇幅(前三章)叙述了"古典"微分几何的基本內容；而且特别注意理論基础的系統性与严密性；此外，还注意到与力学的联系．最后介紹了在微分几何以及其他学科中常用的張量分析等；还以"問題与定理"为标題編入有关"古典"微分几何方面比較重要和著名的結論，供給讀者参考.

书中每节之末一般配有一定数量的习題，帮助讀者把所学到的理論与方法加以巩固和应用，其中个别习題还补充了正文的內容．在每章(除最后一章外)之末附有全章复习提綱与总习題，使讀者学完一个阶段后作一次有系統的复习，以达到对整个阶段的內容有較全面的理解；通过总习題使讀者能把每章的主要理論和方法灵活地运用到解决比較綜合性的問題.

全书共分四章．第一章讲述初步知識(曲綫和曲面——微分几何的主要对象)及預备知識(向量函数的运算及微分几何的方法和內容)．在这一章中闡明了利用向量分析这个方法作为工具的优越性，并且强調图形之間的接触及运动不变量等概念对全书具有基本的意义．这样，使讀者对微分几何这門課程具有初步的认識.

第二章(曲綫論)与第三章(曲面論)是微分几何的基本內容，

在这里作了系統的、比較詳細的叙述．特别是对曲面的“內在”几何与“外在”几何以及它們之間的联系作了比較清晰的闡明和討論．

为了使讀者获得更深入与更广泛的知識，因此，把一些內容，例如卵形綫、平行移动概念、直紋曲面、极小曲面、張量分析等补充知識編为第四章．

书中(前三章)不带星号的內容都是必要的，每周讲課三小时，一学期內可以讲完．但是带星号的內容（包括第四章）也是重要的，可以根据讲課时数与学生水平作适当的取舍，或者作为微分几何补充教程的一部分教材．

在編写过程中，我校几何教研室的同志們根据他們試用的情况，提出了不少的宝貴意見；特别是陈奕培同志不但在內容上提供意見，并且在行文上还协助修改．在这里向他們致以深切的謝意。

由于編者水平的限制，难免有不妥和錯誤之处，恳切地希望讀者給予指正。

方德植

一九六二年五月于厦門大学

目　　录

第三章 曲面論

*第四章　补充知識

*問題与定理

緒　論

微分几何是以无穷小分析的方法来研究几何图形的性质，首先是研究曲綫与曲面的理論．它的特点，基本上限于研究曲綫和曲面在“小范圍”內的性质，就是所謂局部(或微观)微分几何，即研究曲綫和曲面上一点充分小的邻域的性质．这些性质是由給定曲綫或曲面的方程中所出現的那些函数的导数表达的量来刻划的．因此，微分几何要求所有被討論的函数按我們的需要都具有足够阶的連續的导数．

上面所指出的，微分几何的主要研究对象是曲綫与曲面，但是我們要认識到这些图形的概念都是从現实世界中抽象出来的．由于人們在实踐活动和自然界的各种現象中，經常遇到各种形状的曲綫和曲面．例如行星在空間中运行的軌道，炮彈在空間中所經过的軌道，螺旋彈簧的形状等等曲綫的种类，是不胜枚举的．同样地，物体的表面、薄壳、輪船的外壳、机器的側面等等給出各种各样的曲面．当然，上面所列举的各种图形并不是几何上的曲綫与曲面，但是我們把現实的对象想像为几何的图形，即使只是最初的近似，也足以应用到研究很多的实际問題了．

客观現实各种各样的綫都是有粗細的，如果抽掉粗細的因素，就引出几何中的曲綫概念，因此我們就把曲綫想像为沒有厚度与寬度的綫．从这个抽象概念所反映出来的現实物体的普遍性质，就是当物体在其厚度和寬度比其长度小得多的情况下所具有性质．同样地，如果抽掉薄壳的厚度和物体表面的精确位置，就引出几何中的曲面概念．这些槪念的更严格的定义是屬于拓扑学的范圍，我們在这里暫不談它．

微分几何的产生与发展跟分析有不可分割的联系，分析的許多問題是从几何問題給出的．例如，由于切綫概念的产生引出了微分概念，面积和体积概念的产生引出了积分概念等等．

洛比大尔在 1695 年出版了“用来理解曲綫的无穷小分析”一书，闡明了分析与曲綫的紧密联系．

关于微分几何的形成，首先应該提起的是，伯努利在 1687 年提出要在給定曲面上求“最短道路”的問題，从此出发而发展了同微分几何有着紧密联系的变分法． 1760 年欧拉发表了关于在一个曲面上曲綫的曲率的著作．关于曲綫与曲面理論較完整的第一部著作是蒙日在 1795 年刊行的“分析在几何上的应用”．

与实踐問題有关的还有高斯关于曲面論的經典著作，从他在 1827 年所出版的“关于曲面的一般研究”，奠定了近代形式的曲面論基础，高斯是从地理制图的要求出发的．

曲綫和曲面的完整理論是在上世紀形成的，通常叫它为“古典”微分几何．“古典”微分几何的发展在达尔布所著的“一般曲面理論讲义”里作了全面的总結，这部名著共分四卷，是在 1887～1896 年分期出版的．

罗巴契夫斯基的非欧几何的发現，在整个几何的发展中起了革命的作用．到了 1854 年，黎曼的演讲“論作为几何基础的假設”，奠定了黎曼几何的基础．这对近代微分几何的发展起了巨大的作用．

在克莱茵(1872 年)所发表的“爱尔兰根綱領”里提出了群論观点，这个观点应用到各种几何上，使本世紀开端即从古典微分几何发展了一系列的新方向，它們都是統一在同一个群論观点之下的，这指的是专門研究曲綫、曲面在各种几何变换下的不变性质．古典微分几何无非是研究在运动之下图形的不变性质，射影微分几何是研究在射影变换之下图形的不变性质，仿射微分几何

是研究在仿射变换之下图形的不变性质．还有其它种类繁多的几何学，因为取定某一个变换群作为基础，就可以研究图形在这个群中的变换之下保留不变的性质．这个群論观点应用到几何上由嘉当所发展，他建立了“仿射联絡空間”和“射影联絡空間”的理論．这些都是近代微分几何的主要內容，但是我們在这个基础教程中仅限于叙述古典微分几何的基本內容．至于近代微分几何各个方面的成就則屬于几何专門組課程的范圍，这里不作介紹．

第一章　初步知識与预备知識

在本章里，我們首先把微分几何的主要对象——曲綫和曲面——的概念及其簡単的性质作初步的叙述，其中有些內容在数学分析和解析几何里已經讲过了，这里只作簡单的复习．其次，为了以后的需要，把研究微分几何的主要工具——向量分析——作扼要的介紹。最后把微分几何的方法和內容作概括性的叙述，使讀者对本門課程具有初步的认識．

§1．平面曲綫

1．曲綫的确定法．簡单曲綫段．在解析几何中，我們知道，可以用方程来确定平面曲綫．通常是用下列三种形式的方程来給定的．

1° 显式确定法　在緒論中已經指出，在微分几何里，只研究图形在小范圍內的性质，所以对于曲綫来說，只要考虑它的一小段就行了．因此，先来給出一个基本性的定义，所謂**簡单曲綫段**就是这样的点的軌迹，在直角笛氏坐标系的适当选擇下，点的坐标(x, y)满足下面形式的方程:

$$y=f(x), \tag{1}$$

这里横坐标x在区間$a\leqslant x\leqslant b$上取值，并且函数$f(x)$在这个区間上是单值、連續可微的．从直观来看，当横坐标x由a变到b时；簡单曲綫段AB(图 1)对应于区間$a\leqslant x\leqslant b$上每一点x与平行于y軸的直綫交于一个点而且只交于一个点P，这个点P沿着一个方向画出曲綫段AB．由此可見，这时曲綫弧上的点$P(x, y)$与区間

$a\leqslant x\leqslant b$ 上的点 x 构成一一对应. 所以簡单曲綫段自己不能相交. 此外, 由于函数 $f(x)$ 的連續可微性, AB 是一条光滑的曲綫段. 如果曲綫上的一点 P 的邻域是簡单曲綫段, 则 P 叫做曲綫上的一个**正常点**.

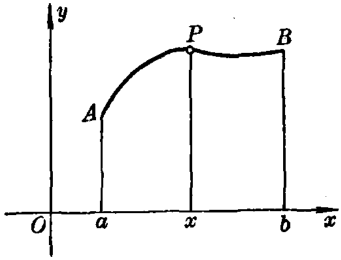

图 1

2° 隐式确定法 点的坐标 (x, y) 滿足一个隐式方程

$$\varphi(x, y)=0 \tag{2}$$

的軌迹; 其中函数 $\varphi(x, y)$ 在 xy 平面上的一个区域 D 中关于 x, y 是連續可微的, 并且两个偏导数 φ_x, φ_y 不全为零, 这个軌迹就叫做平面上的**曲綫**. 这样的命名是恰当的, 因为从下面的定理 1 的证明里就会看到, 軌迹(2)在区域 D 中某点 P_0 的充分小的邻域里具有簡单曲綫段的形状.

定理 1. 設 $P_0(x_0, y_0)$ 是曲綫(2)上的一个已知点, 假定函数 $\varphi(x, y)$ 在点 P_0 有連續的偏导数, 并且

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2>0, \tag{3}$$

则点 $P_0(x_0, y_0)$ 是曲綫上的一个正常点.

[证] 由条件(3)可知, $\varphi_x(x_0, y_0)$ 与 $\varphi_y(x_0, y_0)$ 之中, 至少有一个不等于零; 为了确定起見, 假設 $\varphi_y(x_0, y_0)\neq 0$. 此外因为 P_0 为曲綫(2)上的一个已知点, 所以 $\varphi(x_0, y_0)=0$. 因此, 根据隐函数的存在定理, 存在正数 δ 和 ε 以及在点 x_0 的一个邻域 $|x-x_0|<\delta$ 的一个单值、連續的可微函数 $y=f(x)$, 使得所有的点 $(x, f(x))$, $|x-x_0|<\delta$ 滿足方程(2), 并且这些点就是矩形 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\varepsilon$ 中所有滿足(2)的点. 因此, 由方程

$$y=f(x), \quad |x-x_0|<\delta$$

所确定的軌迹是一条簡单曲綫段. 而且按上段的定义可知

$P_0(x_0, y_0)$是曲綫(2)上的一个正常点.

3° 参数式确定法 如果把平面上的曲綫看作点的連續运动的軌迹, 則当点P从时間$t=\alpha$到时間$t=\beta$作曲綫运动时, 动点P的直角坐标就可以用t的函数$x(t)$, $y(t)$来表达. 反之, 对于給定的函数$x(t)$, $y(t)$就可以确定动点的坐标. 因此, 平面曲綫可以用下列形式的两个方程来給定:

$$x=x(t), \quad y=y(t). \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{4}$$

方程組(4)叫做曲綫的**参数表示**或者**参数方程**, t叫做**参数**.

当然, 变数t, 不必具有时間的意义, 因为从給定的参数t可以換成另一个参数, 例如, 可以用$t=u^2$或者一般地以$t=t(u)$引进另一个参数u, 并不变更曲綫本身.

和由方程(2)来定义曲綫一样, 在下面的定理2的证明中就会看到, 軌迹(4)在某一小段內具有簡单曲綫段的形状.

定理 2. 若函数$x(t)$, $y(t)$在一点t_0的充分小的邻域里都是单值的, 并且有連續的导数, 又

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)>0 \quad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}, \ \dot{y}=\frac{dy}{dt}\right), \tag{5}$$

則点t_0为曲綫上的一个正常点.

[证] 令

$$x_0=x(t_0), \qquad y_0=y(t_0); \tag{6}$$

由不等式(5)知, $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$之中至少有一个不等于零, 不妨假設

$$\dot{x}(t_0) \neq 0,$$

根据隐函数的存在定理, 从方程$x=x(t)$可以唯一地解出

$$t=\varphi(x), \tag{7}$$

使得在x_0的邻域里满足方程$x=x(t)$, 并且$t_0=\varphi(x_0)$. 把这个t的值代入方程$y=y(t)$, 我們得到:

$$y=f(x), \tag{8}$$

其中 $f(x)\equiv y[\varphi(x)]$; 这个函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域里具有連續的导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}. \tag{9}$$

因此, 方程(8)在点 t_0 的充分小的邻域里表示一条簡单曲綫段, 所以点 t_0 为曲綫(5)的一个正常点. 证毕.

最后, 我們指出当 t 从 $t=\alpha$ 变到 $t=\beta$ 时, 点 $P(x,y)$ 画出一条曲綫段 AB, 对于区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上每一个 t 的值, 在曲綫段 AB 上各有一个点而且只有一个点与它对应. 但反过来是不成立的, 因为曲綫段 AB 上的同一点有时可以有不同的 t 的值与它对应. 例如, 曲綫(图 2)

$$x=t^2,\quad y=t(1-t^2)$$

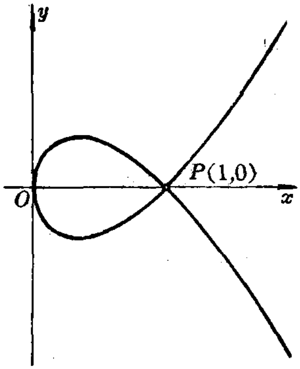

图 2

上的点 $P(1,0)$ 与两个 t 的值 $t=\pm1$ 对应.

但是, 在条件(5)之下, 限于在一点 t_0 的充分小的邻域里, 参数 t 与曲綫(4)上的点构成一一对应. 因为在这个邻域里, 若有两个 t 的值 t_1 和 t_2 对应于同一个点, 則有

$$x(t_1)-x(t_2)=0,$$
$$y(t_1)-y(t_2)=0.$$

根据拉格朗日(Lagrange)的有限改变量定理, 就可以推出

$$\dot{x}(\theta_1)=0,\qquad \dot{y}(\theta_2)=0,$$

其中 θ_1,θ_2 是介于 t_1,t_2 之間的值, 因为 t_1,t_2 可以充分地接近于 t_0, 从函数 $\dot{x}(t),\dot{y}(t)$ 的連續性, 就有

$$\dot{x}(t_0)=0,\qquad \dot{y}(t_0)=0.$$

这跟条件(5)矛盾.

2. 奇异点. 关于平面曲綫的奇异点的理論是相当复杂的，在这里只叙述主要的事实，幷列举一些例子加以說明，而不給出严格的证明.

我們来考虑由隐式方程(2):

$$\varphi(x, y)=0$$

所給定的曲綫. 如果点 $P_0(x_0, y_0)$ 不是曲綫(2)的正常点，則称 P_0 为它的一个**奇异点**. 根据定理 1, 奇异点的坐标必須同时滿足下列三个方程:

$$\varphi(x, y)=0,\quad \varphi_x(x, y)=0,\quad \varphi_y(x, y)=0. \tag{10}$$

如果函数 $\varphi(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的二阶偏导数不全为零，則称 P_0 为曲綫的一个**二重点**.

現在来考虑在二重点 P_0 处的切綫問題. 設曲綫可写为参数方程

$$x=x(t),\qquad y=y(t).$$

幷令在二重点所对应的参数值为 $t=t_0$, 为了求出曲綫的切綫，先把恒等式

$$\varphi\{x(t), y(t)\}=0$$

关于 t 求导数，得到

$$\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}=0.$$

关于 t 再微分一次，即得

$$\varphi_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\varphi_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\varphi_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\varphi_x\frac{d^2x}{dt^2}+\varphi_y\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

因在二重点处有 $\varphi_x(x, y)=0, \varphi_y(x, y)=0$, 所以

$$\varphi_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\varphi_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\varphi_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0.$$

若令

$$a=\varphi_{xx}(x_0, y_0),\quad b=\varphi_{xy}(x_0, y_0),\quad c=\varphi_{yy}(x_0, y_0),$$

則曲綫在二重点 P_0 的切綫方向由下面的方程来确定:

$$a dx^2+2b dx dy+c dy^2=0. \tag{11}$$

由此可見，曲綫在二重点的切綫的斜率 $m=\frac{dy}{dx}$ 应当是下面的二次方程的根:

$$a+2bm+cm^2=0. \tag{11'}$$

我們把它分为三种可能的情形来討論:

1° 判別式 $ac-b^2>0$. 这时方程(11′)的根为一对共軛复数; 这表明, 曲綫在点 P_0 不存在实的枝綫, 因为在該点的切綫的斜率是虛数. 这种点 P_0 叫曲綫的**孤立点**. 事实上, 我們可以证明, 这时在点 P_0 的充分小的邻域里, 除了点 P_0 外, 沒有曲綫上其他的点. 例如曲綫

$$(x^2+y^2)(x-1)=0$$

的軌迹是由直綫 $x=1$ 和原点(0, 0)組成的, 原点就是它的一个孤立点.

2° 判別式 $ac-b^2<0$. 这时方程(11′)的根为两个不同的实数; 因而曲綫在点 P_0 有两条不同的切綫, 所以曲綫有两条枝綫通过点 P_0, 这种点 P_0 叫做曲綫的一个**結点**. 例如双紐綫(图 3)

$$(x^2+y^2+1)^2-4x^2=1$$

是以原点(0, 0)为其結点.

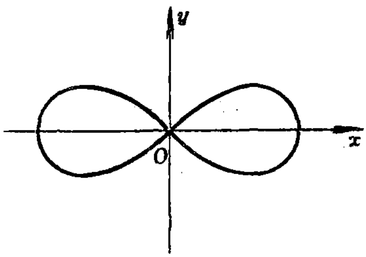

图 3

3° 判別式 $ac-b^2=0$. 这时方程(11′)的根为两个相等的实数; 因而在点 P_0 的两条切綫重合. 这时在点 P_0 曲綫会出現各种不同的形状, 現在列举屬于这种情形的一些例子.