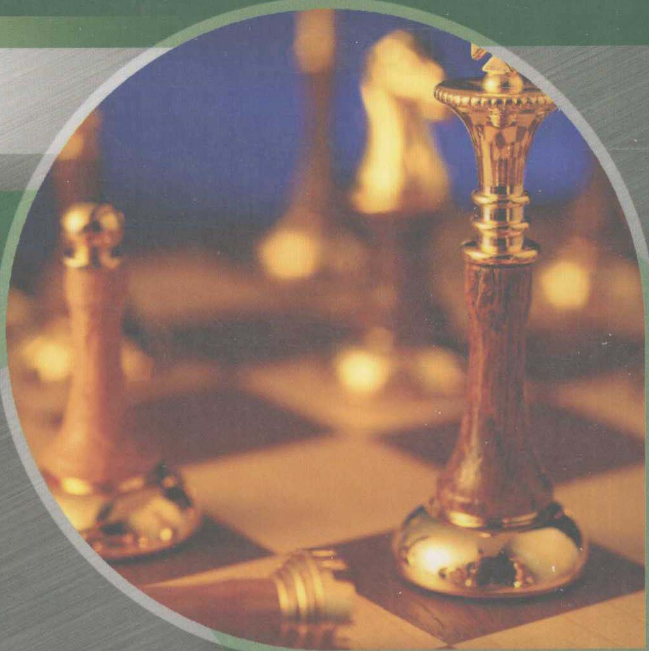
面向“十二五”
高等教育课程改革项目研究成果

经济数学
Economic Mathematics

主编 何 鹏 徐晓静
主审 许 青



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向“十二五”高等教育课程改革项目研究成果

经济数学

主　编　何　鹏　徐晓静
副主编　熊　伟　雷敏剑　程新华
主　审　许　青

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是在认真分析、总结、吸收高等院校高等数学课程教学改革的经验基础上编写完成的，从高等院校教育人才的培养目标出发优选了教学内容，注重循序渐进的教学原则，精心配置了每节例题、习题，以便于学生对有关知识点掌握和巩固.

本书内容分两篇，即一元函数微积分学篇和线性代数、概率论与数理统计初步篇，共11章. 一元函数微积分学篇包括函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用5章. 第二篇线性代数、概率论与数理统计初步包括行列式；矩阵；线性方程组；随机事件及其概率；随机变量及其数字特征；数理统计初步6章. 每章前后都安排了学习目标和本章小结，每篇都配备了两套复习题.

本书适用于高等院校经济管理类专业、成人高等学校各专业经济数学的教学，也可供经济管理人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

经济数学／何鹏，徐晓静主编.—北京：北京理工大学出版社，2010.7
ISBN 978－7－5640－3667－6

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①何…　②徐…　Ⅲ.①经济数学－高等学校－教材
Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第160256号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京燕旭开拓印务有限公司
开　　本／710毫米×1000毫米　1/16
印　　张／18.5
字　　数／348千字
版　　次／2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷　　责任编辑／张慧峰
印　　数／1～2000册　　责任校对／王　丹
定　　价／39.00元　　责任印制／边心超

前　言

PREFACE

本教材的编写以当前高等院校的应用型人才培养目标为依据，体现了“以应用为目的、以必需够用为度”的教学基本原则．编写过程中，我们在结合教学和教改中的成功经验的基础上，充分考虑了应用型本科学生的特点．在课程结构设计上和教学内容安排上，力求符合经管类专业学生的知识需求和接受能力；力求体现数学在经管类专业中的应用；力求用通俗易懂的语言，深入浅出地阐述数学的基本原理，减少繁琐的数学推理；力求表现解决问题的基本步骤，体现条理化的问题解决思路；力求在淡化理论的同时，突出数学应用技能的训练和培养，通过对基本问题的反复训练，促进学生对基本问题解决方法的掌握．全书内容共分十一章，包括：第一篇一元函数微积分学，第二篇线性代数、概率论与数理统计初步．

同时，为便于学生梳理知识结构和巩固知识技能，在各章均配备了学习目标、本章小结和一定数量的练习题．本书可作为应用型本科院校高等数学课程的教材和参考书．

本书由何鹏、徐晓静主编，熊伟、雷敏剑、程新华任副主编．具体编写分工如下：何鹏（第 1 章、第 11 章），章红玲（第 2 章），徐同胜（第 3 章），雷敏剑（第 6 章、第 7 章），徐晓静（第 8 章），许青（第 9 章），刘太平（第 10 章），程新华（第 4 章），程娟（第 5 章），熊伟编写了其中的部分习题．全书由何鹏、徐晓静负责修订、统稿，许青任主审．

我们虽然力求编写一本优秀教材，但限于水平和时间，不妥和疏漏在所难免，恳请读者不吝赐教．

编　者

目　录

CONTENTS

第1篇　一元函数微积分学

第 2 篇　线性代数和概率论与数理统计初步

第 1 篇

一元函数微积分学

本篇主要讨论一元函数微积分．它以函数为研究对象，研究函数变化的基本方法是极限方法，导数概念是微积分的重要概念，它是学习一元函数微积分的基础．

第 1 章　函数、 极限与连续

学习目标：了解并掌握函数的概念、性质及几类重要函数；理解极限、无穷小和无穷大的概念，掌握极限和无穷小的性质，以及无穷小与无穷大的关系；熟练掌握极限的运算法则和两个重要极限，掌握无穷小的比较；掌握函数连续的概念、初等函数的连续性及闭区间上连续的性质，会求间断点.

§ 1.1　函　数

初等数学中研究的对象基本上是不变的量，通常称为常量，而微积分则以变量为主要研究对象. 函数关系就是变量之间的对应关系，是微积分中的基本概念.

一、 函数的概念

1. 常数与变量

在日常生活、生产活动和工程技术中，经常遇到各种不同的量. 例如：体重、气温、产量、收入成本等. 这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们称它为常量. 例如，圆周率 π 是个永远不变的量，某商品的价格在一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称它为变量. 例如，一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量. 常量通常用字母 a，b，c 等表示，而变量通常用字母 x，y，z，t 等表示.

2. 函数的概念

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化，如果这些影响是依据某一规律的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 4 000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系为 $y=50x+4\,000$，当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个非空的数集. 如果当变量 x 在 D 内任取一数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域.

当自变量 x 在 D 内取定一数值 x_0 时，因变量 y 有一确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值. 记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_x=x_0$. 当 x 取遍定义域 D 内的所有数值时，对应

的全体函数值所组成的集合

$$Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域．平面直角坐标系中的点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的图像．

有时为了叙述方便，习惯上也常用 $f(x)$ 来表示函数．函数的记号 f 也可用其他符号代替，如 g，φ，F 等，相应地，函数记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等．有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$．这时字母 y 既表示因变量，又表示函数．

函数的表示法通常有三种：公式法（或解析法）、图像法和表格法．它们分别用公式、函数的图像和表格来表示函数．三种表示法各有所长．

构成函数的两要素分别为函数的定义域 D 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．例如，$y=\frac{1}{1+x}$ 和 $y=\frac{x}{x(1+x)}$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域不同．

研究任何函数都要首先考虑其定义域，函数的定义域是使其有意义的一切实数组成的集合．有一点需要注意，在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义决定．例如，销售某种商品，其单价为 2 元/件，则销售收入 R 与销售量 q 的函数关系为 $R=2q$，这可以看作 R 为因变量、q 为自变量的函数，注意这个函数的定义域为正整数集．

求函数定义域时，一般需要考虑以下几个方面：

（1）分式分母不能为零；

（2）开偶次方时，被开方部分非负；

（3）指数函数和对数函数中，底数大于零且不等于 1，对数函数中真数部分大于零；

（4）含反三角函数的 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$.

若函数同时含有以上几种情况，则取其交集．

例 1　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域．

解　这是两个函数 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 与 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 之和的定义域，先求出每个函数的定义域，然后取其公共部分即可．

使 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 有定义，必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$，解之，得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$. 即 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $(-\infty, -2]\cup[3, +\infty)$．

使 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有定义，必须满足 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，解之，得 $-3\leqslant x\leqslant 4$. 即 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3, 4]$．

于是，所给函数的定义域为 $[-3, -2]\cup[3, 4]$．

下面我们看几个函数的例子．

例 2　常函数：$y=C$（C 为某个常数）．其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $Z=\{C\}$，图形为一条平行于 x 轴的直线．

例3　绝对值函数：函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 其定义域为 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $Z=[0,\ +\infty)$. 它的图像如图 1－1－1 所示．

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数．分段函数是微积分中常见的一种函数．需要注意的是，分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数．对于自变量 x 在定义域内的某个值，函数 y 只能有唯一的值与之对应．分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并．

例4　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 3x, & x>1. \end{cases}$ 求 $f(\frac{1}{2})$，$f(2)$ 及函数定义域，并作出其图形．

解　因为 $\frac{1}{2}\in[0,\ 1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；因为 $2\in(1,\ +\infty)$，所以 $f(2)=6$，函数定义域为 $[0,\ +\infty)$，图像如图 1－1－2 所示．

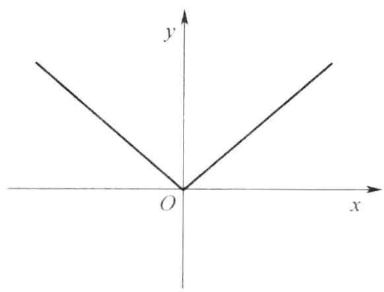


图　1－1－1

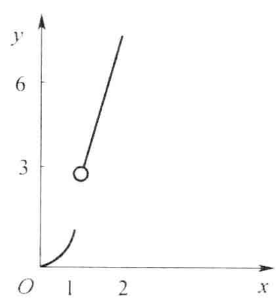


图　1－1－2

分段函数在实际问题中也是经常出现的．

例5　4 某运输公司规定货物的吨千米运价为：在 1 000 千米以内，每千米 k 元；超过 1 000千米，超出部分每千米 $\frac{4}{5}k$ 元，求运价 P 和运送里程 s 之间的函数关系．

解　根据题意，我们可得到如下关系：当 $0\leqslant s\leqslant 1\,000$ 时，$P=ks$；当 $s>1\,000$ 时，$P=1\,000k+\frac{4}{5}k(s-1\,000)=200\,k+\frac{4}{5}ks.$ 可以写作

$$P=\begin{cases} ks, & 0\leqslant s\leqslant 1\,000, \\ 200k+\frac{4}{5}ks, & s>1\,000. \end{cases}$$

这是一个分段函数．

二、　函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对一切 $x \in X$ 均成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有界．从函数图像来看，函数 $y=f(x)$ 的图像全部在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间．如果不存在这样的 M，也就是说，对于任意正数 M，总存在 $x_0 \in X$，使得

$$|f(x_0)|>M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上无界．从函数图像来看，就是找不到一对关于 x 轴对称的平行直线，使函数 $y=f(x)$ 的图像全部落入两平行线之间．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界 1，因为对一切 $x \in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x| \leqslant 1$ 成立．函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无界．因为对任意正数 M，总存在 $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $|\tan x_0|>M$.

需要注意的是，函数的有界性与定义域密切相关．例如，$y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上有界，因为 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对一切 $x \in(1,2)$ 成立．但它在区间 $(0,1)$ 上无界，因为对任意正数 M，总可取到 $x_0 \in(0,1)$ 且 $x_0<\frac{1}{M}$，于是 $\left|\frac{1}{x_0}\right|>M$.

2. 函数的单调性

设 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$．类似地有，$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为半开区间．其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度．

上述四类区间都是有限区间．从数轴上看，有限区间就是它的区间长度为有限值．与有限区间相对应的是所谓的无限区间，主要包括：

$$(-\infty,a]=\{x \mid -\infty<x \leqslant a\},(-\infty,a)=\{x \mid -\infty<x<a\},$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\},(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\},$$

其中 a 为一实数，$-\infty$ 和 $+\infty$ 为两个记号，分别读作负无穷和正无穷．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的．

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．

函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的．

关于函数单调性的判别方法我们将在后面的章节专门介绍．

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称（即若$x\in D$，则$-x\in D$）．如果对于任一$x\in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数．

如果对于任一$x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数．

偶函数的图像关于y轴对称，奇函数的图像关于原点对称．

$y=x^2$，$y=\cos x$都是偶函数，$y=x^3$，$y=\sin x$都是奇函数，$y=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在正数T，使得对于任意$x\in D$，都有$f(x+T)=f(x)$，则称其为周期函数．T为函数的周期，通常我们说到周期函数的周期T指的是它的最小正周期，周期函数在其定义域内每个长度为T的区间上，函数的图像有相同的形状．

例如，函数$\sin x$和$\cos x$都是以2π为周期的周期函数，函数$\tan x$和$\cot x$都是以π为周期的周期函数．

例6　判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=2^x+2^{-x}$；(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=x+\cos x$.

解　(1) 因为$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$，所以$f(x)=2^x+2^{-x}$是偶函数．

(2) 因为$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$

$$=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x),$$

所以$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数．

(3) 因为$f(-x)=-x+\cos(-x)$，$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$，所以$f(x)=x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数，称作非奇非偶函数．

三、反函数

函数$y=f(x)$反映了两变量之间的对应关系．当自变量x在函数的定义域D内取定一值时，因变量y便在值域Z内有唯一确定的值与之对应．有时这种对应会出现这样的情况：当自变量x在定义域D内取定任意两个不同的值时，因变量y便在值域Z内有两个不同的确定的值与它们对应．即对任意x_1，$x_2\in D$，$x_1\neq x_2$，有$f(x_1)\neq f(x_2)$．这时对值域内每一值，在定义域内有唯一确定的值与之对应，从而可以构成一个新的函数，这个新函数称为函数$y=f(x)$的反函数．严格定义之，如下：

定义2　设函数$y=f(x)$的定义域是数集D，值域是数集Z. 若对每一个$y\in Z$，都有唯一的$x\in D$适合关系$f(x)=y$，那么就把此x值作为取定的y值的对应值，从而得到一个定义在Z上的新函数．这个新函数称为$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$．这个函数的定义域为Z，值域为D. 相对于反函数$x=f^{-1}(y)$来说，原来的函数$y=f(x)$称为直接函数．

我们可以用示意图（图1-1-3）形象地表示直接函数$y=f(x)$与反函数$x=f^{-1}(y)$的关系．

由反函数的定义可以看出，反函数的自变量 y 是直接函数的因变量，而反函数的因变量 x 是直接函数的自变量．因为习惯上我们用 x 来表示自变量，用 y 来表示因变量，因此常常对调反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y，把它改写为 $y=f^{-1}(x)$．这时，直接函数与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称．今后提到反函数，一般指经过改写后的反函数．

例 7　求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并作出图像．

解　由 $y=2x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{2}$，将变量 x 与 y 交换，得：$y=\dfrac{x+1}{2}$，这就是函数 $y=2x-1$ 的反函数．图像如图 1－1－4.

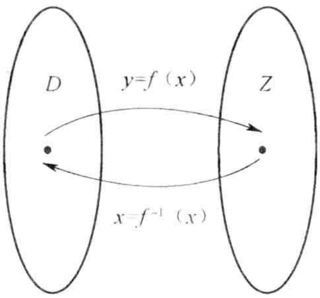


图 1－1－3

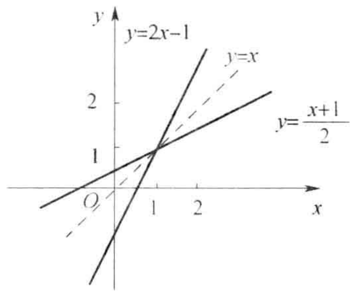


图 1－1－4

并不是所有函数都有反函数，但是单调函数的反函数总是存在．

四、 复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in U$，而 u 是 x 的函数 $u=g(x)$，$x\in D$，且 $u=g(x)$ 的值域 Z 含在 $y=f(u)$ 的定义域 U 内，即 $Z\subseteq U$，则 y 通过 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数．记作 $y=f[g(x)]$，称 x 为自变量，u 为中间变量．

对于复合函数 $y=f[g(x)]$，习惯上称 f 为外函数，g 为内函数．

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的对应法则如图 1－1－5 所示．

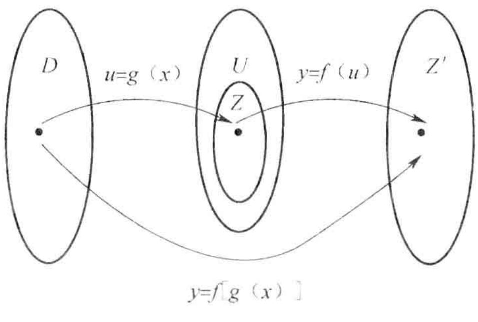


图 1－1－5

需要注意的是，函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成复合函数的条件是：函数 g 在 D 上的值域 Z 必须含在 f 的定义域 U 内，即 $Z\subseteq U$. 否则，不能构成复合函数．例如，设 $y=\arcsin u$，

$u=\sqrt{1-x^2}$，则两个函数可以复合且复合函数为 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. 但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为 $u=2+x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[(1, 1]$ 内.

值得注意的是，如何将一个较复杂的复合函数分解为几个简单函数，是研究复合函数的重要内容.

例 8　下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\ln\sin x$;　　(2) $y=e^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$.

解　(1) $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin x$ 复合而成的;

(2) $y=e^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{t}$，$t=\ln x+1$ 复合而成的.

复合函数是微积分中一类重要的函数，也是我们以后经常会遇见的一类函数.

五、 初等函数

在中学数学里已经接触过下面几类函数:

(1) 幂函数: $y=x^\mu$(μ 是实常数);

(2) 指数函数: $y=a^x$($a>0$，$a\neq1$);

(3) 对数函数: $y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$，当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$);

(4) 三角函数: 如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等;

(5) 反三角函数: 如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数.

基本初等函数的性质、图形在中学已经学过，在后面的学习中还要经常涉及，希望同学们熟练掌握，灵活应用.

定义 4　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为初等函数. 显然，分段函数不是初等函数.

例如，$y=\arctan(1+x^2)$，$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 都是初等函数. 而分段函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$ 不是一个解析式子表达的，$y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 不满足有限次运算，因此都不是初等函数.

六、 常用的经济函数

1. 总成本函数　总收入函数　总利润函数

在生产经营活动中，成本（记作 C）、收入（记作 R）和利润（记作 L）这些经济变量都与产品的产量或销售量（x）有关. 经过合理的简化和抽象，它们都可以看作 x 的函数，分别称为总成本函数（记作 $C(x)$）、总收入函数（记作 $R(x)$）、总利润函数（记作 $L(x)$）.

(1) 总成本函数

在生产活动中所进行的投入，大致可分为两大类. 一类是在短时间内不发生变化或变化很小或不明显地随产品（商品）的产量（销售量）变化而变化，称为固定成本，如厂房、设