KE XUE WEN CONG

科学文丛

镜子里的世界

——集合与反射

广州出版社

科学文丛

镜子里的世界

——集合与反射

（99）

广州出版社出版

图书在版编目（CIP）数据

科学文丛．何静华 形继祖 主编．广州出版社．2003.

书号 ISBN7-83638-837-5

Ⅰ．科学...Ⅱ....Ⅲ. 文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082275 号

科学文丛

主　编：何静华 形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本：787×1092 1/32 印张：482.725

版次：2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价：（全套 104 本）968.80 元

目　　录

1. 把美丽留给未来

清晨，当你站在泰山之巅眺望一轮红日冉冉升起时，瞬间，万道金光照亮了你脚下的千峰万壑、森林、河流；午后，当你迎着斜阳，抚摸这透着历史的苍凉的青砖，遥望迤逦万里的长城时，塞外惊鸿，大漠孤烟尽收眼底；傍晚，当你被草原的和风撩得心旷神怡的时候，蓦地，在太阳即将沉入的广阔的地平线上涌出浩大的马群，海浪般向你涌来；……大自然无与伦比的美和历史的洞穿时空的悲壮震撼了我们，我们情不自禁地举起了手中的像机……

当我们带上红领巾的时候；当我们小学毕业，告别师友的时候；也许有一天我们会带上博士帽，站在

牛顿门下……，当我们把这一页光彩与辉煌珍藏在记忆的空间时，多么希望在记录着自己的无数个故事的影集中再添上一张记录这美好瞬间的照片。

真实地记录一道美丽的风景，一个壮观的场面，甚至一个正在进行的伟大事件，这对我们来说已经是十分容易办到的事情了——轻轻地按下快门，摄像机这个忠实的朋友就会帮我们完成这一切。

照像机的发明无疑是人类文明史上的一个伟大事件。照像机把历史真实地呈现在我们的眼前，又把今天真实地留给未来。

那么，一张照片，或者一个录像镜头，为什么能准确地反映当时当地的情景呢？回答这个问题并不难，答案就在我们自己实实在在的体验中。

早晨当我们系好红领巾准备上学去，我们会走到一个大镜子前，看一看红领巾是否系正了。这时镜子中出现了另一个“我”，这个“我”与我一样地真实。当我调皮地向镜中的“我”做出一个怪相时，镜子中的“我”也同时还给我一个一模一样的怪相。

其实我们早就注意到了镜子中的“我”与我有一

种特殊的关系。我笑“我”就笑；我挥动左手“我”就挥动右手；我迈动右腿“我”就迈动左腿；我有一支左耳“我”就有一支右耳；我有一只漂亮的鼻子，“我”也有一只漂亮的鼻子；总之我身上有什么样的“部件”，“我”身上也相应地就有这样的“部件”。

如果我们再细心一点，把我身上对着镜子的一面（正面）分成很多个小点，我们就会发现对于我的正面的每一个小点，镜子里“我”中都有一个小点与之对应，我的正面有多少个小点，镜子里“我”就有多少个小点与之相对应，这种对应是一对一的，而且我正面的点的排列与镜子里“我”身上的点的排列是完全相似的，这正是镜子中的“我”与活生生的我一模一样的原因所在！

我与镜子里的“我”的关系包括了三个要素：(1)我正面的所有“点”的全体；(2)镜子中“我”身上的点的全体；(3)我正面的点与镜子里“我”相应点的对应规律——即对应点在两个“我”中的相应位置。在这里对于我正面的每一个点，在镜子里的“我”身上都有唯一的点与之对应。我们把这个对应叫做我正

面所有“点”的全体到镜子中“我”身上的点的全体的一个映射，我正面的“点”叫做原象，而我正面这一点在镜子中“我”身上的对应点叫做这一点的象。当我站在镜子前时，我正面的每一“点”都在光的作用下变成镜子里的象，而且保持了排列的相对位置不变。当然镜子中的“我”和现实中的我一模一样！

像这里我身上正面的所有“点”的全体构成一个集合。要讨论映射就必须先了解集合，在本书中我们将看到集合与映射的一些有趣的性质和奇妙的应用。

“以铜为镜，可以正衣冠。”我们人类很早以前就知道通过照镜子来了解自己的形象，最早的镜子大约就是铜镜。在制造铜器的冶炼技术还没有发展起来之前，我们的祖先大约只能站在清澈的湖水或溪流前来认识自己了。说到这里朋友们是否已会心地想到小时候在故园的月光下听奶奶讲过的那个猴子捞月亮的故事？

镜子可以真实地反映我们的微笑，我们的苦恼和我们身后的景物；清澈的湖水可以倒映山的俊秀，天的蔚蓝。但镜子却无法将这一切留给明天，留给遥远

的朋友。

当科学家们根据光电效应发明的照像机问世后，人类才不仅可以用语言转达喜怒哀乐，还可以用形象来揭示真善美丑，不仅可以用文字来撰写历史，更可以用画面来再现现实。

当 1949 年 10 月 1 日，中国的巨人毛泽东在天安门城楼升起第一面五星红旗；当华夏女儿潘多第一个登上世界屋脊，五星红旗第一次在珠穆朗玛峰飘扬；当……摄影机悄悄地将这震古烁今的美丽和辉煌留给了今天，留给了未来。

2. 集合

莱茵河以她的透明和深沉孕育过一个又一个卓越的思想家，如黑格尔、马克思，……这个行列中那些沉思着的数学家中的天才思想家康托尔，引入了集合概念并由此建立起集合理论。集合理论是数学化了的最生动、最精辟的逻辑学和哲学。就像莱茵河水滋润着两岸绿荫，集合已渗透到现代数学的各个领域。作为学习现代数学和科学的出发点，集合的概念和基础知识是我们必须首先掌握的内容。

集合是什么？这似乎是一个简单的问题。联合国

就是一个集合，它的元素是每一个加入了联合国的主权国家和地区。学校里的一个班就是一个集合，它的元素是这个班的每一个学生。

集合是什么？要说清楚似乎又不太简单。我们可以给圆、线段下一个准确的定义。但是对于集合所有这样的尝试是注定要失败的，因为集合是一个原始概念，根本不能精确定义。正因为集合是一个原始概念，所以它像点、直线一样成为构成现代数学各个分支的基本要素。通常我们说研究问题时所讨论的每一组对象的全体形成一个集合——这只是对集合概念的一个描述。

尽管如此，给定一个集合后，这个集合的元素是完全确定的。也就是说给定一个集合时就给定了判断某个对象是否为这个集合的元素的一个标准，是非界线是非常分明的。是或者不是，二者必居其一。这同时也说明一个集合中没有两个相同的元素。通常地我们用大写拉丁字母 A、B、C……等表示集合，而用小写拉丁字母 a、b、c……等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a \in A$；如果

a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$（或 $a \bar{\in} A$）。

例如 A 是全体正偶数所成之集，那么

$$2 \in A，而 1 \notin A。$$

给定一个集合后，如何来表示这个集合，这自然应该有一个统一的方法，通常表示一个集合可有如下三种方法。

韦恩图法：画一个封闭的圆圈，然后将所讨论的对象写进这个圆圈（如图 2—1），这种表示集合的图叫做韦恩图。

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法叫做列举法。用列举法表示集合时，可以不必考虑元素之间的顺序。

例如，由前 10 个质数组成的集合可以表示为：

$$\{2，3，5，7，11，13，17，19，23，29\}。$$

又如，由中国古代四大发明所组成的集合，可以表示为：

{造纸，火药，活字印刷，指南针}。

描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法。如果我们用 x 表示集合中的任一个元素，P 表示集合中的元素的公共属性，那么这个集合可写成下面的规范的形式

$$\{x \mid P(x)\}。$$

例如，所有大于 2 小于 3 的实数所成之集，可表示为

$$\{X \mid 2 < X < 3\}。$$

为了简便，在不致引起混淆的情况下，有些集合用描述法表示时，可省去竖线及其左边部分。例如，所有中国人的集合，可表示为：

{中国人}。

例 1　已知集合 {中华人民共和国的省、直辖市、自治区}，判断下列对象是否为这个集合的元素：天津、台湾、武汉、新加坡。

解　天津、台湾是所述集合的元素，而武汉、新加坡不是。

例 2　已知集合为 $\{x \mid x = a^2 + 2a + 1$，$a$ 为自然

数}，试判断 -1，0 是否为这个集合的元素。

解　$\because x=a^2+2a+1=(a+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore -1$ 不是所述集合的元素，而 0 是。

例 3　以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：①P 中的元素有正数，有负数；②P 中的元素有奇数，有偶数；③$-1\notin P$；④若 x，$y\in P$，则 $x+y\in P$。试判断实数 0 和 2 与集合 P 的关系。

解　由④知，若 $x\in P$，则 $kx\in P$，$(k\in N)$。

（1）由①可设 x，$y\in P$，且 $x>0$，$y<0$，则 $-yx=|y|\cdot x\ (|y|\in N)$。故 xy，$-yx\in P$。

由④，$0=(-yx)+xy\in P$。

（2）$2\notin P$。若 $2\in P$，则 P 中的负数全为偶数。不然的话，当 $-2k-1\in P\ (k\in N)$ 时，$-1=(-2k-1)+k\cdot 2\in P$，与③矛盾。于是由②知 P 中必有正奇数，设 $-2m$，$2n-1\in P\ (m,\ n\in N)$，我们取适当正整数 q，使 $q\cdot|-2m|>2n-1$，则负奇数 $-2qm+(2n-1)\in P$。前后矛盾。

含有有限个元素的集合叫做有限集，例如集合{前 10 个质数}；含有无限个元素的集合叫做无限集，

例如集合 $\{x|2<x<3\}$。

质数所成之集是有限集还是无限集呢？你有兴趣去弄清楚这个问题吗？

3. 子集

已知两个集合{台湾人}，{中国人}，这两个集合之间有什么关系？这肯定是大家所关心的事情。在知道了什么是集合之后，我们自然要来讨论两个集合之间有什么关系。两个集合之间可能的关系比较复杂，我们先来看比较简单的情况。

定义 1 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集。记作

$$A \subseteq B \text{（或 } B \supseteq A\text{），}$$

读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）。由于台湾人都是中国人，所以{台湾人} ⊆ {中国人}。