公共课系列 2001年研究生入学考试应试指导丛书

18

2001

策划：北京大学研究生院

2001

Entrance Exams for MD

研究生入学考试

数学冲刺

（工学类）

邵士敏 主编

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

2001年研究生入学考试

数学冲刺

（工学类）

主　编　邵士敏
撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽
　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂

北京大学出版社
北　京

书　　名：2001年研究生入学考试数学冲刺（工学类）
著作责任者：邵士敏
责 任 编 辑：刘金海
标 准 书 号：ISBN 7-301-04125-X/O·0437
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752027
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：北京飞达印刷厂印刷
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　15印张　374千字
2000年9月第一版　2000年9月第一次印刷
定　　价：20.00元

前　言

按照教育部制定的2001年全国工学硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求，我们编写了这本辅导书．内容有高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步三部分．包括新考试大纲数学一、二类（工学类）的全部内容．

为了帮助参加研究生入学考试的考生在最后冲刺阶段有效的复习和顺利应考，编写时，我们重点突出大纲中要求"掌握"和"熟练掌握"的内容．书中除叙述基本概念、基本定理、计算公式外，还着重总结解题方法．

我们仔细分析了近十年的研究生入学考试（工学类）试题，发现近几年的试题中综合性的题逐渐增多，往往在一个题中，用到几个知识点．例如，计算重积分时，用到较多的解析几何知识；计算微分方程时，用到线积分知识等等．针对这种情况，我们选编典型例题时，不仅选编一些基本题，也选编一些较综合性的题，还适当选编一些过去的试题．以提高考生的综合解题能力，使他们能尽快提高并顺利通过应考大关．

本书中的概念，符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中不另作说明．

由于时间仓促，难免有疏误之处，诚望广大考生及众读者提供宝贵意见．

编　者

2000年8月于北京大学

目　　录

高　等　数　学

一　函数、极限、连续

1. 函数(请自己复习以下(1)、(2)的内容)

(1) 函数的定义

(2) 复合函数

(3) 反函数

设函数 $y=f(x)$的值域为Y. 若对 Y 中每一个 y 值,都可由方程 $y=f(x)$惟一确定出 x 值,则得到一个定义在 Y 上的函数,称为 $y=f(x)$的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in Y,$$

易知,严格单调函数必有反函数,并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x) \quad (x\in X)$与其反函数 $x=f^{-1}(y) \quad (y\in Y)$的图形相同.

在习惯上,为了强调对应规律 f^{-1},并将因变量仍记作 y,通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x) \qquad x\in Y,$$

它的图形与 $y=f(x) \quad (x\in X)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数,称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数:常数函数,幂函数,指数函

数，对数函数，三角函数，反三角函数.

2. 极限

(1) 数列极限的定义

设有数列$\{x_n\}$及常数 a. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 号码(即正整数)N，$\ni$·当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 n 趋向于无穷时，$\{x_n\}$以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a,$$

或 $$x_n\to a \quad (n\to+\infty).$$

(2) 函数极限的定义

定义 1 $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\right)$ 设 $f(x)$在 x 充分大时有定义，A 为常数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，$\ni$·当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于正无穷时，$f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

或 $$f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

可类似给出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

定义 2 $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\right)$ 设 $f(x)$在$|x|$充分大时有定义，A 为常数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，$\ni$·当$|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于无穷时，$f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,$$

或 $$f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

定义 3 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\right)$ 设 $f(x)$在点 x_0 附近有定义(点 x_0 本身可能除外)，A 为常数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\ni$·当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

或 $f(x)\to A \quad (x\to x_0)$.

定义 4 $\left(\text{右极限} \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\right)$ 设 $f(x)$在点 x_0 的右近旁有定义，A 为常数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\ni$·当 $0<x-x_0<\delta$(即 $x_0<x<x_0+\delta$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$在点 x_0 处的右极限为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A,$$

或 $f(x)\to A \quad (x\to x_0+0)$,

有时也记作 $f(x_0+0)=A$.

可类似定义左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$.

左、右极限统称为单侧极限.

(3) 定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=A$.

类似地，有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$.

(4) 无穷小量

定义 在某一极限过程中，以 0 为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的阶的比较：

设 α,β 是同一极限过程中的两个无穷小量.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=K\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶(或同级)无穷小量. 特别地，

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 更高阶的无穷小量，记作

$\alpha=o(\beta)$.

(5) 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼定理) 若在点 x_0 的某邻域内(点 x_0 本身可能除外)恒有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=0.$$

夹逼定理的数列形式为:若 $\exists\ N$,$\ni$·当 $n>N$ 时,恒有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

且

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=A,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=A.$$

准则Ⅱ 单调上升(或下降)且有上界(或下界)的数列必有极限.

(6) 两个重要极限

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

或 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

(7) 极限的四则运算

定理 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在,则

(i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$,

(ii) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$,

特别地，$\lim K \cdot f(x) = K\lim f(x)$，$K$ 为常数，

(iii) 当 $\lim g(x) \neq 0$ 时，有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

3. 连续

(1) 函数在某一点处连续

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，此时 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

定义 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

可类似定义左连续. 左、右连续统称为单侧连续.

(2) 间断点的分类

(i) 可去(或可改)间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，但极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；或 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(ii) 第一类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在，但不相等：$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

可去间断点有时也称为第一类间断点.

(iii) 第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数在某一区间连续

定义 3 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，记作 $f \in C(a,b)$.

定义 4 若 $f \in C(a,b)$，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记作 $f\in C[a,b]$.

(4) 连续函数的运算

定理 1(四则运算)　或 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

(i) 和、差、积

$$f(x)\pm g(x) \qquad f(x)\cdot g(x)$$

在点 x_0 处连续，

(ii) 当 $g(x_0)\neq 0$ 时，商

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

在点 x_0 处连续.

定理 2(复合函数的连续性)　设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

定理 3(反函数的连续性)　若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调上升(或下降)，并且连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在值域区间 $[f(a),f(b)]$(或 $[f(b),f(a)]$)上也严格单调上升(或下降)，并且连续.

对于开区间 (a,b) 或无穷区间，有类似定理.

(5) 初等函数的连续性

一切初等函数在各自的定义域内都是连续的.

(6) 闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值、最小值定理)　若 $f\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值，即 $\exists\ x_1,x_2\in[a,b]$，$\ni\cdot\ f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，$f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

推论　闭区间上的连续函数是有界的.

定理 2(中间值定理，或介值定理)　若 $f\in C[a,b]$，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数，则在 (a,b) 内部至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

推论 1(零点存在定理)　若 $f\in C[a,b]$,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a,b) 内部至少存在一点 ξ,使得　$f(\xi)=0$.

推论 2　若 $f\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 可以取到介于其最大值 M 与最小值 m 之间的一切实数.

例 1.1　(1997 年硕士研究生入学试题,理工类(二))

设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$

求 $g[f(x)]$.

解　当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$,因此

$$g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x,$$

当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$,因此

$$g[f(x)]=2+f(x)=2+x^2,$$

于是有

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

例 1.2　试用极限定义证明:当 $|q|<1$ 时,有

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n=0.$$

证　因为 $|q|<1$,$\dfrac{1}{|q|}>1$,所以可设 $\dfrac{1}{|q|}=1+h\ (h>0)$.

从而

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$
$$>\frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

因此有

$$n|q|^n<\frac{2}{(n-1)h^2}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|nq^n-0|=n|q|^n<\varepsilon$,只要 $\dfrac{2}{(n-1)h^2}<\varepsilon$,亦即只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon h^2}+1$.取正整数 $N\geqslant\dfrac{2}{\varepsilon h^2}+1$,当 $n>N$ 时,就有 $n>\dfrac{2}{\varepsilon h^2}+1$,也

就有$|nq^n|<\varepsilon$. 于是证明了

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n=0 \qquad (|q|<1).$$

例 1.3 证明：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a \quad (x_n\neq a)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.

证 由$\lim\limits_{n\to a}f(x)=A$知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\ni$·当$0<|x-a|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

又由$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a \quad (x_n\neq a)$知，对于上述$\delta>0$，$\exists$ 正整数N，$\ni$·当$n>N$时，恒有$0<|x_n-a|<\delta$.

将以上二者结合起来知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数N，$\ni$·当$n>N$时，恒有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 于是证明了

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=A.$$

例 1.4 （1995 年试题，理工类（二））求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right).$$

解 记$x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，则

$$x_n>\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot n}{n^2+n+n},$$

又，

$$x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot n}{n^2+n+1},$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}(n+1)\cdot n}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

于是由夹逼定理知，原式

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

例 1.5 （1996 年试题，理工类（一））

设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}, n=1,2,\cdots$ 求证：数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

证 可用数学归纳法证明：$\{x_n\}$单调下降.

由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{x_1+6}=\sqrt{10+6}=4$ 知，$x_1>x_2$.

设 $n=k$ 时，不等式 $x_k>x_{k+1}$成立，则

$$x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2},$$

即不等式对 $n=k+1$ 仍成立，因此由数学归纳法知，不等式 $x_n>x_{n+1}$对一切自然数 n 成立，亦即$\{x_n\}$单调下降.

又，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}>0$，即$\{x_n\}$有下界.

于是由极限存在准则Ⅱ（单调下降且有下界的数列必有极限）知，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$ 存在.

在表达式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$两边，令 $n\to+\infty$，得

$$A=\sqrt{A+6},$$

即

$$A^2-A-6=0,$$

解出

$$A=3,-2.$$

因为 $x_n>0$，所以应取 $A=3$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=3$.

例 1.6 （1）（1996 年试题，理工类（一））

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a.

（2）（1997 年试题，理工类（二））求极限

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}.$$

解 （1）由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\left(\frac{x-a}{3a}\cdot 3a\right)+a}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{a}$$

$$=e^{3a}\cdot 1=e^{3a}\xlongequal{(\text{已知})}8,\text{得到 } 3a=\ln 8=3\ln 2,$$

因此　$a=\ln 2$.

(2) 令 $x=-t$,且用 t 除以分子,分母,得

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1.$$

例 1.7　(1998 年试题,理工类(二))求函数

$$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$$

在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解　在区间$(0,2\pi)$内,当 $x=\frac{\pi}{4}$或 $x=\frac{5\pi}{4}$时,$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$;当 $x=\frac{3\pi}{4}$或 $x=\frac{7\pi}{4}$时,$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\infty$.

因为$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=1$,$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=1$,所以 $x=\frac{3\pi}{4}$和 $x=\frac{7\pi}{4}$是函数的两个可去间断点.

又,因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}+0}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=+\infty,$$

所以 $x=\frac{\pi}{4}$和 $x=\frac{5\pi}{4}$是两个第二类间断点(或:无穷间断点).